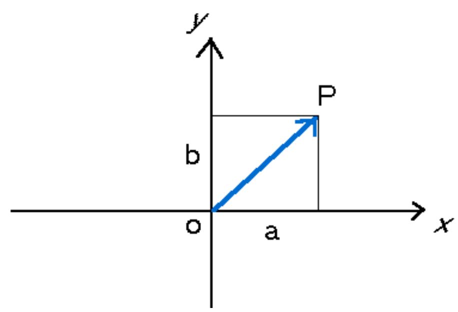
REVISÃO DE NOTAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Consideremos um ponto P do plano xy, cujo vetor posição é

$$r = a\hat{x} + b\hat{y}$$

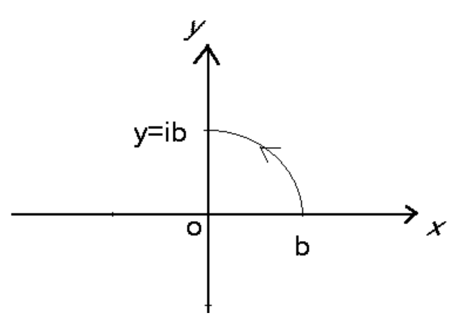


Podemos associar a P um número complexo Z,

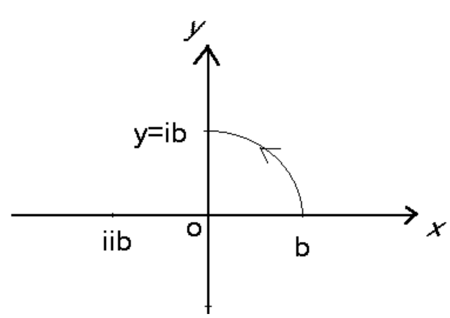
$$Z = a + ib,$$

onde i representa uma rotação de $\pi/2$ no plano xy

$$z = ib$$



aplicando duas vezes



o que leva a $i = \sqrt{-1}$, o número complexo i chama-se unidade imaginária.

Define-se

$$z = a + ib \quad \begin{cases} a \equiv \mathrm{Re}[Z] \\ b \equiv \mathrm{Im}[Z] \end{cases}$$

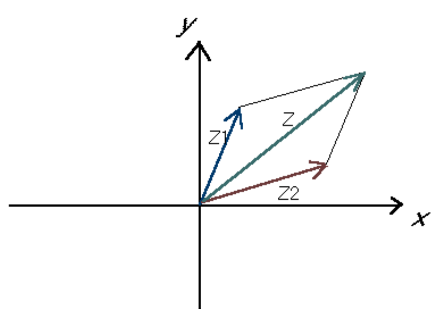
Propriedades:

a) Soma de números complexos

$$Z = Z_1 + Z_2$$

$$Z_1 = a_1 + ib_1$$
$$Z_2 = a_2 + ib_2$$

$$Z = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$



b) Complexo conjugado de um número complexo

Seja o número complexo

$$Z = a + ib$$

o seu complexo conjugado é

$$Z^* = a - ib$$

Assim

$$\mathrm{Re}[Z] = \frac{1}{2}\left(Z + Z^*\right)$$
$$\mathrm{Im}[Z] = \frac{1}{2i}\left(Z - Z^*\right)$$

c) Produto entre números complexos

$$Z = Z_1 \bullet Z_2$$

$$Z_1 = a_1 + ib_1$$
$$Z_2 = a_2 + ib_2$$

$$Z = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

d) Módulo do número complexo

$$|Z| = \sqrt{Z^* Z} = \sqrt{(a - ib)(a + ib)} = \sqrt{(a^2 + b^2}$$

e) Quociente de dois números complexos

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$Z_1 = a_1 + ib_1$$
$$Z_2 = a_2 + ib_2$$

$$Z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

f) Notação de Euler

Notação polar

$$Z = re^{i\theta}$$

Notação retangular

$$Z = x + iy = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta\,,$$

sendo

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z|$$

$$\theta = arctg\,\frac{y}{x} \quad ,$$

onde r é o módulo de Z e θ é o seu argumento.

O produto entre dois números complexos nesta notação é

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 Z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} \\ Z &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned} \quad ,$$

e a divisão fica

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

g) Outras propriedades

- Exponencial de um número complexo

$$e^Z = e^{(a+ib)} = e^a(\cos b + i\,\mathrm{sen}\,b)$$

- Seja λ_1 e λ_2 reais e Z_1 e Z_2 complexos, então

$$\mathrm{Re}[\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2] = \lambda_1\,\mathrm{Re}[Z_1] + \lambda_2\,\mathrm{Re}[Z_2]$$

- Se $Z(t) = x(t) + iy(t)$ é função de um parâmetro real t, temos

$$\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\big(x(t) + iy(t)\big) = \frac{dx(t)}{dt} + i\,\frac{dy(t)}{dt}$$

de modo que

$$\mathrm{Re}\left[\frac{dZ(t)}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\mathrm{Re}[Z(t)]$$

o que se estende a derivadas de ordem superior.