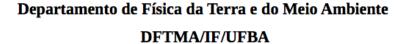


UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Instituto de Física





Física Geral Teórica I - FISD36

Notas de Aulas: Módulo VI

ALANNA DUTRA, EDVALDO SUZARTHE

E REYNAM PESTANA

25 de novembro de 2020

Salvador, Bahia, Brasil

Universidade Federal da Bahia Federal & Instituo de Física (IF/UFBA)
Departamento de Física da Terra e do Meio ambiente R. Barão de Geremoabo, Salvador, Bahia, Brasil 40.170-290

E-mails: alannacd@ufba.br, esaraujo@ufba.br, reynam@ufba.br

Índice

Índice .		3
Índice d	le Tabelas	Ę
Índice d	le Figuras	7
1 Ro	otação, torque e momento angular	Ć
1.1	Cinemática rotacional de um corpo rígido	Ć
	1.1.1 Relação vetorial entre as grandezas lineares e angulares	13
1.2	Torque	14
1.3	Cálculo do momento de inércia	15
	1.3.1 Teorema dos eixos paralelos	17
1.4	Estática de corpos rígidos	18
1.5	Energia cinética rotacional	18
1.6	Teorema trabalho - Energia cinética na rotação	19
1.7	Rolagem: Combinação da translação e rotação	22
1.8	Momento angular	
	1.8.1 Momento angular de um sistema de partículas	26
	1.8.2 Momento angular de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo	
1.9	Conservação do momento angular	28
1.10	Exercícios Resolvidos	31
	Resumo	
Dafanân	ains Ribliográfians	40

4 Índice

Índice de Tabelas

 $1.1\,$ Analogia entre as equações de translação 1D e rotação em torno de único eixo fixo. . $\,30\,$

<u>6</u> Índice de Tabelas

Índice de Figuras

1.1	Movimento de rotação de uma roda gigante	9
1.2	Rotação de um corpo rígido em torno do eixo z, que passa por O	10
1.3	Componentes da aceleração de um partícula no ponto P de um corpo rígido girando	
	em torno do eixo z	11
1.4	Regra da mão direita para determinar a direção do vetor velocidade angular (Serway,	
	2018)	12
1.5	Rotação no sentido anti-horário: (a) $\vec{\omega}$ aumentando e (b) $\vec{\omega}$ diminuindo	12
1.6	Uma partícula em A no corpo rígido que gira em torno do eixo z está localizada em \vec{r}	
	medido em relação à origem O. A partícula possui velocidade angular $\vec{\omega}$, velocidade	
	tangencial \vec{v} , aceleração angular $\vec{\alpha}$, aceleração tangencial \vec{a}_t e aceleração radial \vec{a}_r	
	(Alonso e Finn, 2009)	13
1.7	Uma força \vec{F} é aplicada a uma partícula presa a uma haste rígida de massa desprezível	
	que gira no plano xy. O torque devido à força \vec{F} está na direção positiva de z (para	
	fora da página)	14
1.8	Corpo rígido: (a) uma força \vec{P} aplicada e (b) forças que atuam sobre cada partícula.	15
1.9	Momento de inércia de corpos rígidos homogêneos (Serway, 2018)	17
1.10	Movimento de Rotação de um objeto (Serway, 2018)	18
1.11	Um corpo rígido simples, rotaciona em torno de um eixo, e que sofre a ação de uma	
	força externa \vec{F} aplicada no ponto P (Serway, 2018)	20
1.12	Movimento de rolamento, conforme o cilindro gira através de um ângulo θ seu centro	
1 10	de massa move com uma distância linear paralela à superfície $(s=R\theta)$ (Serway, 2018)	22
1.13	Movimento de rolamento de um objeto pode ser modelado como uma combinação de	22
1 1 4	translação pura e rotação pura (Serway, 2018).	22
1.14	Uma partícula ao passar pelo ponto A tem momento linear $(\vec{p} = m\vec{v})$, com o vetor \vec{p}	
	no plano xy. A partícula tem momento angular $(\vec{l} = m\vec{r} \times \vec{p})$ em relação à origem O.	
	Pela regra da mão direita, o vetor momento angular aponta no sentido positivo de z.	
	(a) O módulo de l é dado por $l = rp_{\perp} = rmv_{\perp}$. (b) O módulo de l também é dado	24
1 15	por $l = r_{\perp}p = r_{\perp}mv$ (Halliday et al, 2010)	24
1.10	mesma direção da velocidade angular $\vec{\omega}$ de acordo com a expressão $\vec{L} = I\vec{\omega}$ (Serway,	
		27
	2018)	41

Índice de Figuras

1

Rotação, torque e momento angular

Neste módulo estudaremos o movimento de rotação de corpos rígidos (como uma roda, uma bola, uma haste etc.) em torno de qualquer eixo. Analisaremos também a combinação dos movimentos de translação e rotação. Apresentaremos novas grandezas físicas como torque, momento de inércia, momento angular e vamos estender a lei de conservação de energia mecânica de forma a incluir o movimento de rotação e, além disso, veremos a lei de conservação de momento angular.

1.1 Cinemática rotacional de um corpo rígido

O movimento mais simples de rotação de um corpo rígido é a rotação em torno de um eixo fixo, como por exemplo o movimento dos ponteiros que marca as horas, minutos e segundos de um relógio analógico e outro exemplo é o movimento de uma roda gigante (ver Figura 1.1).



Figura 1.1: Movimento de rotação de uma roda gigante.

Na Figura 1.2 temos o exemplo de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo (eixo z). Cada partícula desse corpo realiza um movimento circular, cujo o centro está no eixo de rotação.

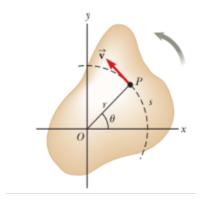


Figura 1.2: Rotação de um corpo rígido em torno do eixo z, que passa por O.

Para começarmos o nosso estudo do movimento de rotação do corpo rígido, apresentado na Figura 1.2, vamos obter a distância s percorrida pelo ponto P num certo intervalo de tempo (considerando que em $t_i = 0$, $\theta_i = 0$ rad). Usando a expressão de comprimento de arco temos que:

$$s(t) = r\theta(t) . (1.1)$$

Para calcularmos a velocidade tangencial da partícula, vamos derivar a equação (1.1) em relação ao tempo, ou seja:

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \ . \tag{1.2}$$

O termo ds/dt é conhecido como velocidade tangencial v e o termo $d\theta/dt$ é denominado de velocidade angular ω e tem unidade no SI de radianos por segundo (rad/s), que também pode ser escrito como s^{-1} , porque radiano é adimensional. Assim, a equação (1.2) pode ser escrita como:

$$v(t) = r\omega(t) , \qquad (1.3)$$

onde vemos claramente a relação entre a velocidade linear e a valocidade angular. Derivando agora a equação (1.3) em relação ao tempo, resulta em:

$$\frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \ . \tag{1.4}$$

O termo dv/dt na equação (1.4) é exatamente a aceleração tangencial a_t e o termo $d\omega/dt$ é definido na literatura como aceleração angular α . Logo, a equação (1.4) pode ser reescrita como

$$a_t(t) = r\alpha(t) . (1.5)$$

Queremos lembrar que no movimento circular, além da aceleração tangencial a_t , temos também a aceleração radial (conhecida como aceleração centrípeta) que é dada pela expressão

$$a_r(t) = \frac{[v(t)]^2}{r} = r[\omega(t)]^2$$
, (1.6)

e o módulo da acelaração é dado por

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2} = \sqrt{r^2 \alpha^2 + r^2 \omega^4} = r \sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$
 (1.7)

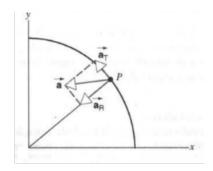


Figura 1.3: Componentes da aceleração de um partícula no ponto P de um corpo rígido girando em torno do eixo z.

Na Figura 1.3 apresentamos o vetor aceleração e suas componentes para o ponto P do corpo rígido que realiza o movimento de rotação em torno do eixo z.

Neste ponto do módulo, vamos analisar de forma breve as grandezas angulares θ , ω e α . Vamos obter alguns resultados importantes. Sabemos que

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}.\tag{1.8}$$

Reescrevendo a equação (1.8) temos:

$$d\omega = \alpha dt . ag{1.9}$$

Considerando a aceleração angular α constante e integrando os dois lado da equação (1.9) temos

$$\int_{\omega_i}^{\omega} d\omega = \alpha \int_0^t dt \ . \tag{1.10}$$

Depois de efetuar as integrações da equação (1.10), obtém-se

$$\omega(t) = \omega_i + \alpha t \ . \tag{1.11}$$

Para encontrar uma expressão que permita calcular o ângulo θ em qualquer instante de tempo, vamos usar a definição da velocidade angular

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \ . \tag{1.12}$$

Usando as equações (1.11) e (1.12) obtém-se

$$d\theta = (\omega_i + \alpha t)dt \,, \tag{1.13}$$

e integrando os dois lados da equação (1.13) resulta em

$$\int_{\theta_i}^{\theta} d\theta = \int_0^t (\omega_i + \alpha t) dt . \tag{1.14}$$

Assim obtém-se a seguinte expressão:

$$\theta(t) = \theta_i + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \ . \tag{1.15}$$

Observamos então que, conhecendo a **aceleração angular** que o corpo é submetido, é possível determinar as expressões para o cálculo da valocidade angular e o ângulo em qualquer instante de

tempo, usando a técnica de integração. O procedimento apresentado acima, foi o mesmo usado no estudo do movimento de translação, quando objeto tinha uma aceleração linear constante. Se a aceleração for nula, a equação (1.15) reduz-se a

$$\theta(t) = \theta_i + \omega_i t \,, \tag{1.16}$$

onde a velocidade angular ω_i é constante para qualquer instante de tempo. É importante chamar atenção de que as expressões (1.15) e (1.16) fornecem o ângulo em radianos.

Não especificamos nenhuma direção para uma variação angular $d\theta$, velocidade angular ω e aceleração angular α . Pode-se mostrar que para rotações infinitesimais, essas grandezas podem ser tratadas como vetores, e uma discussão detalhada é apresentada por Resnick, Halliday e Krane (2003) e Nussenzveig (2008). A convenção adotada é que se a rotação for no sentido anti-horário, o vetor $\vec{\omega}$ aponta no sentido positivo do eixo de rotação e se a rotação for no sentido horário o vetor $\vec{\omega}$ aponta para o sentido negativo do eixo de rotação. Na Figura 1.4 apresentamos a convenção adotada para o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$.

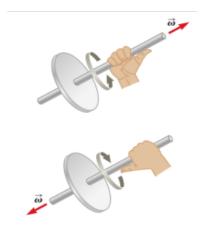


Figura 1.4: Regra da mão direita para determinar a direção do vetor velocidade angular (Serway, 2018).

Seguindo a convenção adotada, o vetor aceleração angular $\vec{\alpha}$ aponta na mesma direção e sentido do vetor velocidade angular, quando $\vec{\omega}$ vai aumentando com o tempo (ver Figura 1.5(a)), e o vetor aceleração angular aponta na mesma direção de $\vec{\omega}$, mas no sentido contrário quando $\vec{\omega}$ estiver diminuindo com o tempo (ver Figura 1.5(b)).

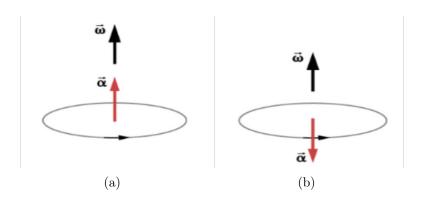


Figura 1.5: Rotação no sentido anti-horário: (a) $\vec{\omega}$ aumentando e (b) $\vec{\omega}$ diminuindo.

Nas equações (1.17) e (1.18), apresentamos a forma vetorial das grandezas angulares discutidas.

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\theta}(t)}{dt} \,, \tag{1.17}$$

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} \ . \tag{1.18}$$

1.1.1 Relação vetorial entre as grandezas lineares e angulares

A relação entre o vetor deslocamento infinitesimal $d\vec{s}$ e o ângulo de rotação infinitesimal $d\vec{\theta}$, para um ponto P do corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo (ver Figura 1.2), é dado por

$$d\vec{s} = d\vec{\theta} \times \vec{r} . \tag{1.19}$$

Derivando a equação (1.19) em relação ao tempo resulta na relação entre a velocidade linear e angular vetorialmente:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} . \tag{1.20}$$

Derivando agora a equação (1.20) em relação ao tempo obtém-se:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}, \qquad (1.21)$$

onde o termo $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ é o vetor componente tangencial da aceleração \vec{a} e o termo $\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}$ é vetor componente radial da aceleração \vec{a} . Na Figura 1.6 apresentamos os vetores associados ao movimento de uma partícula em A num corpo rígido em rotação. Onde podemos ver claramente que o termo $\vec{a}_r = \vec{\omega} \times \vec{v}$ aponta na direção radial e para o centro do círculo e você pode verificar que o termo $\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ aponta na mesma direção e sentido de \vec{v} .

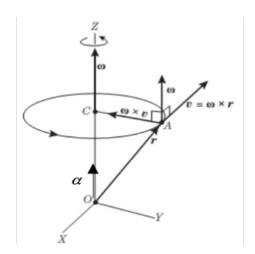


Figura 1.6: Uma partícula em A no corpo rígido que gira em torno do eixo z está localizada em \vec{r} medido em relação à origem O. A partícula possui velocidade angular $\vec{\omega}$, velocidade tangencial \vec{v} , aceleração angular $\vec{\alpha}$, aceleração tangencial \vec{a}_t e aceleração radial \vec{a}_r (Alonso e Finn, 2009).

1.2 Torque

Em nosso estudo do movimento translacional, depois de investigarmos a descrição de movimento, estudamos a causa de alterações no movimento devido à aplicação de uma força. Aqui, vamos seguir o mesmo procedimento. Estudaremos a causa das alterações no movimento de rotação. Analisamos inicialmente a Figura 1.7. Nesta figura, observamos que a partícula é livre para girar em torno do eixo z, estando presa a este eixo por uma haste fina de comprimento r e de massa desprezível. Uma força é aplicada à particula numa direção arbitrária que faz um ângulo θ com a haste.

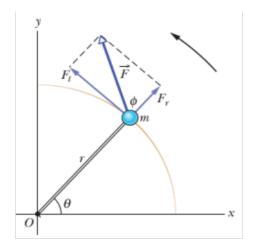


Figura 1.7: Uma força \vec{F} é aplicada a uma partícula presa a uma haste rígida de massa desprezível que gira no plano xy. O torque devido à força \vec{F} está na direção positiva de z (para fora da página).

Apenas a componente tangencial da força \vec{F} contribui para o movimento da partícula. Aplicando a segunda lei de Newton ao movimento tangencial da partícula resulta em

$$F \operatorname{sen} \theta = ma_t = m\alpha_z r . \tag{1.22}$$

Mutiplicando a equação (1.22) por r temos

$$rF \operatorname{sen} \theta = mra_t = mr^2 \alpha_z \,, \tag{1.23}$$

onde podemos ver que o termo $rF \operatorname{sen} \theta$ é o módulo do torque, onde o torque é definido como o produto vetorial do vetor posição \vec{r} com o vetor força \vec{F} , ou seja:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \,, \tag{1.24}$$

e a unidade do torque no SI é N.m. Já o termo do lado esquerdo $(I=mr^2)$ é definido como momento de inércia, também chamado de inércia rotacional.

O momento de inércia depende da massa da partícula e da distância perpendicular entre a partícula e o eixo de rotação. À medida que a distância da partícula ao eixo aumenta, o momento de inércia aumenta, mesmo que a massa não mude.

Rescrevendo a equação 1.23 em função das novas grandezas físicas temos:

$$\tau_z = I\alpha_z \,\,, \tag{1.25}$$

e, assim, podemos observar que para a rotação em torno de único eixo (eixo z) temos uma analogia com a segunda lei de Newton em uma dimensão, ou seja, $F_z = ma_z$.

Neste módulo trataremos de problemas de rotação apenas envolvendo um único eixo, já que o momento de inércia depende do eixo de rotação considerado. Vamos considerar mais um exemplo envolvendo o torque. Na Figura 1.8(a), mostramos um corpo rígido composto de duas partículas de massas m_1 e m_2 , ambas livres para rodar no plano xy em torno do eixo z. As partículas estão conectadas ao eixo por hastes de massa desprezível e de comprimentos r_1 e r_2 , respectivamente, e também estão conectadas entre si por uma haste similar. Uma força externa \vec{P} no plano xy é aplicada à partícula 1. Na Figura 1.8(b), as forças que atuam em cada partícula são identificadas. Como discutido anteriormente, as forças em que a linha de ação passa pelo eixo de rotação não contribuem para o torque. Assim, apenas as componentes tangenciais das forças resultantes contribuem para o torque resultante em relação ao eixo de rotação (eixo z) passando por O. Então o torque resultante é:

$$\tau_z = \tau_{(1z)} + \tau_{(2z)} = F_{(1t)}r_1 + F_{(2t)}r_2. \tag{1.26}$$

Usando a segunda lei de Newton $(F_t = ma_t)$ e lembrando que a aceleração angular é a mesma para ambas as partículas, porque o objeto formado por essas duas partículas giram como um corpo rígido, então podemos reescrever a equação (1.26) como

$$\tau_z = m_1 a_{(1t)} r_1 + m_2 a_{(2t)} r_2 = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \alpha_z = I \alpha_z , \qquad (1.27)$$

onde $I=m_1r_1^2+m_2r_2^2$ e podemos escrever $\tau_z=I\alpha_z$.

 $\tau_{res,z} = I\alpha_z$ (forma rotacional da segunda lei de Newton).

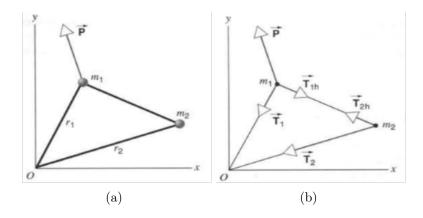


Figura 1.8: Corpo rígido: (a) uma força \vec{P} aplicada e (b) forças que atuam sobre cada partícula.

1.3 Cálculo do momento de inércia

Nesta seção vamos mostrar o cálculo do momento de uma barra em relação a um eixo passando pelo centro de massa e depois apresentaremos um teorema que nos auxiliará no cálculo do momento de inércia em relação a qualquer outro eixo, um vez conhecido o momento de inércia em relação ao centro de massa.

Usando a definição do momento de inércia $I=\sum_i r_i^2 \ \Delta m_i$ e fazendo $\Delta m_i \to 0$ nesta soma resulta em

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_{i} r_i^2 \, \Delta m_i = \int r^2 \, dm \,. \tag{1.28}$$

Geralmente, é mais fácil calcular momentos de inércia em termos do volume dos elementos em vez da massa deles. Usando o conceito de densidade de massa volumétrica temos:

$$\rho = \frac{m}{V} \ . \tag{1.29}$$

onde ρ é a densidade do corpo e V é o volume. A partir dessa relação, a massa de um elemento pequeno é $dm = \rho dV$. Substituindo este resultado na equação (1.28), obtemos:

$$I = \int \rho r^2 dV \ . \tag{1.30}$$

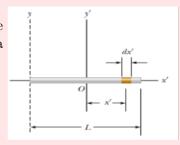
Se ρ é constante temos então

$$I = \rho \int r^2 dV \ . \tag{1.31}$$

No caso de uma haste de área transversal uniforme e onde a massa é distribuída ao longo da mesma, temos então a densidade de massa linear $\lambda = M/L$. Esta relação permite escrever $dm = \lambda dl$, onde dl é um pequeno comprimento da haste. A seguir temos um exemplo de como calcular o momento de inércia de uma haste em relação a um eixo passando pelo centro de massa.

Barra rígida uniforme

Calcule o momento de inércia de uma barra rígida uniforme de comprimento L e massa M sobre um eixo perpendicular à barra (o eixo y') e passando por seu centro de massa.



O elemento sobreado de comprimento dx', mostrado na figura, tem uma massa dm que é igual a massa por unidade de comprimento λ multiplicado por dx'. Expressando dm em termos de dx':

$$dm = \lambda dx' = \frac{M}{L} dx' \,. \tag{1.32}$$

Substituindo a equação (1.32) em (1.28), com $r^2 = (x')^2$, temos que:

$$I_{y,cm} = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} (x')^2 \frac{M}{L} dx' = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} (x')^2 dx'$$
 (1.33)

$$I_{y(cm)} = \frac{M}{L} \left[\frac{(x')^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} M L^2 .$$
 (1.34)

Considerando agora um eixo passando por y, repetindo os mesmos cálculos, resulta em

$$I_y = \frac{M}{L} \left[\frac{(x')^3}{3} \right]_0^L = \frac{1}{3} M L^2 .$$
 (1.35)

1.3.1 Teorema dos eixos paralelos

O resultado do problema resolvido anterior leva ao teorema dos eixos paralelos:

O momento de inércia de um corpo qualquer em relação a um eixo arbitrário é igual ao momento de inércia em relação a um eixo paralelo que passa pelo centro de massa somada da massa total vezes a distância entre os dois eixos ao quadrado.

Matematicamente, o teorema dos eixos paralelos possui a seguinte forma:

$$I = I_{cm} + Mh^2 \,, \tag{1.36}$$

onde I é o momento de inércia em relação a um eixo arbitrário, I_{cm} é o momento de inércia em relação a um eixo paralelo e que passa pelo centro de massa, M é a massa total do corpo e h é a distância perpendicular entre os dois eixos. Observem que os dois eixos precisam ser paralelos. Usando esse teorema você chega no mesmo resultado do exemplo anterior, quando o eixo de rotação passa por uma das extremidades da barra. Verifique!

Atenção: é mais fácil girar um corpo em torno de um eixo passando pelo centro de massa do que em torno de qualquer outro eixo paralelo.

A seguir apresentamos alguns momento de inércia em relação ao CM que serão usados.

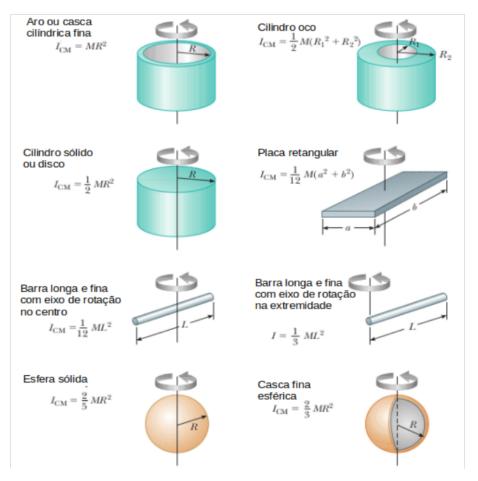


Figura 1.9: Momento de inércia de corpos rígidos homogêneos (Serway, 2018).

1.4 Estática de corpos rígidos

A condição necessária e suficiente para o equilíbrio de um corpo rígido é que a força resultante que atua sobre o corpo seja nula e o torque resultante em relação a um dado ponto, que pode ser escolhido arbitrariamente, seja nulo. Matematicamente, temos duas seguintes equações:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{i} \vec{F}_{i} = \vec{0} ,$$
 (1.37)

e

$$\vec{\tau}_{res} = \sum_{i} \vec{\tau}_{i} = \vec{0} .$$
(1.38)

Um caso especial de equilíbrio estático é quando o corpo está em repouso em relação ao observador e não tem velocidade translacional e nem angular (isto é, $v_{cm}=0$ e $\omega=0$). Na seção exercícios resolvidos mostramos alguns exemplos envolvendo o conceito de equilíbrio estático.

1.5 Energia cinética rotacional

No módulo IV, definimos a energia cinética de um objeto como a energia associada ao seu movimento de translação. Uma vez que um objeto gira em torno de um eixo fixo e permanece estacionário no espaço, não há energia cinética associada ao movimento de translação.

As partículas individuais que constituem o objeto em rotação, entretanto, estão se movendo através do espaço; elas seguem caminhos circulares. Consequentemente, há energia cinética associada ao movimento rotacional. Vamos considerar um corpo rígido como um conjunto de partículas e assumir que ele gira em torno de um eixo fixo z com uma velocidade angular ω . A Figura 1.10 mostra um corpo rígido em rotação e identifica uma partícula localizada a uma distância r_i do eixo de rotação.

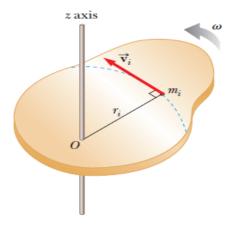


Figura 1.10: Movimento de Rotação de um objeto (Serway, 2018).

Se a massa da i-ésima partícula é m_i e sua velocidade tangencial é v_i , sua energia cinética é:

$$K = \frac{1}{2}m_i v_i^2 \ . {1.39}$$

Para prosseguir, lembre-se que, embora cada partícula no corpo rígido tenha a mesma velocidade angular ω , as velocidades tangenciais individuais dependem da distância r_i do eixo de rotação. A energia cinética total deste corpo rígido em rotação é a soma das energias cinéticas das partículas individuais:

$$K_R = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$
 (1.40)

Podemos escrever essa expressão na forma:

$$K_R = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 . \tag{1.41}$$

Simplificamos esta expressão definindo a quantidade entre parênteses como o momento de inércia (I) que é dado por:

$$I = \sum_{i} m_i r_i^2 . (1.42)$$

A partir dessa definição reescrevemos a expressão para K_R e a equação (1.41) torna-se

$$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2 \ . \tag{1.43}$$

Embora comumente nos referimos à quantidade como energia cinética rotacional, não é uma nova forma de energia. De fato é energia cinética comum porque é derivada de um soma das energias cinéticas individuais das partículas contidas no corpo rígido.

A forma matemática da energia cinética dada pela equação (1.43) é conveniente quando estamos lidando com movimento rotacional, desde que saibamos como calcular I. É importante também reconhecer a analogia entre a energia cinética associada ao movimento translacional em uma dimensão apenas e a energia cinética associada a rotação em torno de um eixo fixo. As quantidades I e ω no movimento rotacional são análogas a m e v no movimento translacional, respectivamente. O momento de inércia I é uma medida da resistência de um objeto às mudanças em seu movimento rotacional, assim como a massa é uma medida da tendência de um objeto resistir às mudanças em seu movimento translacional.

1.6 Teorema trabalho - Energia cinética na rotação

Como foi visto anteriormente, quando uma força \vec{F} acelera um corpo rígido de massa m, a força realiza um trabalho W sobre este corpo. Isso significa que a energia cinética dele $(K = \frac{1}{2}mv^2)$ pode mudar. Suponha que essa seja a única energia do corpo que muda. Nesse caso, podemos relacionar a variação ΔK da energia cinética ao trabalho W por meio do **Teorema do Trabalho e Energia Cinética**:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}m_i v_f^2 - \frac{1}{2}m_i v_i^2 = W.$$
 (1.44)

Para um movimento restrito a um eixo x, podemos calcular o trabalho utilizando

$$W = \int_{i}^{f} F dx . (1.45)$$

A equação 1.45 se reduz a W = Fd quando F é constante e o deslocamento do corpo é d. A taxa com a qual o trabalho é realizado é a potência, que pode ser calculada usando:

$$P = \frac{dW}{dt} = Fv \ . \tag{1.46}$$

Vamos considerar uma situação análoga para rotações. Quando um torque acelera um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, o torque realiza um trabalho W sobre o corpo. Isso significa que a energia cinética rotacional do corpo ($K=\frac{1}{2}I\omega^2$) pode mudar. Suponha que essa seja a única energia do corpo que muda. Nesse caso, podemos relacionar a variação ΔK da energia cinética ao trabalho W por meio do teorema do trabalho e energia cinética. Agora, com a diferença que a energia cinética é rotacional e o **Teorema do Trabalho e Energia Cinética para Movimento Rotacional** passa a ser expresso por:

$$\Delta K_R = K_{Rf} - K_{Ri} = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2 = W , \qquad (1.47)$$

em que I é o momento de inércia do corpo em relação ao eixo fixo, ω_i e ω_f são as velocidades angulares do corpo antes e depois que o trabalho é realizado.

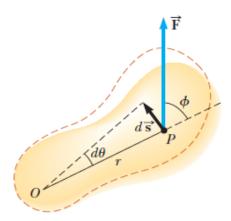


Figura 1.11: Um corpo rígido simples, rotaciona em torno de um eixo, e que sofre a ação de uma força externa \vec{F} aplicada no ponto P (Serway, 2018)

Vamos agora calcular o trabalho W realizado sobre o corpo no movimento de rotação e relacionálo ao torque τ exercido pela força \vec{F} aplicada sobre o corpo, quando a partícula se desloca de uma distância ds ao longo da trajetória circular (Figura 1.11). Assim, a força \vec{F} realiza trabalho sobre a partícula.

Esse trabalho dW pode ser escrito como $dW = \vec{F} \cdot \vec{ds}$. Entretanto, podemos substituir \vec{F} por $F_t = F \sec \phi$ que é a componente tangencial da força ao longo do deslocamento (a componente que realiza trabalho). E podemos substituir ds por $rd\theta$, em que $d\theta$ é o ângulo descrito pela partícula. Temos, portanto:

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds} = F_t r d\theta . \tag{1.48}$$

O produto $F_t r$ é igual ao torque τ , de modo que podemos escrever:

$$dW = \tau d\theta . ag{1.49}$$

Podemos calcular o trabalho executado durante uma rotação usando uma equação análoga à equação (1.45):

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta , \qquad (1.50)$$

onde **W** é o trabalho do movimento rotacional em torno de um eixo fixo, τ é o torque responsável pelo trabalho W, e θ_i e θ_f são, respectivamente, a posição angular do corpo antes e depois da rotação. Quando τ é constante, temos:

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) . \tag{1.51}$$

A taxa com a qual o trabalho é realizado é a potência, que pode ser calculada usando uma equação equivalente à equação (1.46).

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau \omega \tag{1.52}$$

Através de uma abordagem em termos da energia do sistema, vimos no estudo do movimento translacional que podemos obter respostas extremamente úteis para a descrição do comportamento desse sistema. Pelo que aprendemos sobre o movimento rotacional, esperamos que seja realizado trabalho por forças externas, quando um objeto simétrico gira em torno de um eixo fixo, e que este seja igual à mudança na energia rotacional do objeto. Para provar esse fato, vamos começar com $\tau = I\alpha$. Usando a regra da cadeia do cálculo, podemos expressar o torque como:

$$\tau = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\omega \tag{1.53}$$

Reorganizando esta expressão e observando que $\tau d\theta = dW$ temos que

$$\tau d\theta = dW = I\omega d\omega . \tag{1.54}$$

Integrando esta expressão, obtemos para o trabalho total realizado por várias forças externas atuando em um sistema:

$$W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega d\omega = \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 , \qquad (1.55)$$

onde a velocidade angular muda de ω_i para ω_f .

A equação (1.55) corresponde ao teorema do **Trabalho - Energia Cinética** para o movimento rotacional. Semelhante ao teorema da energia cinética de trabalho no movimento translacional (módulo IV), este teorema afirma que o trabalho realizado por forças externas ao girar um corpo rígido simétrico em torno de um eixo fixo é igual à mudança na energia rotacional do objeto. Este teorema é uma formulação para o modelo de um sistema não isolado.

1.7 Rolagem: Combinação da translação e rotação

Podemos considerar objetos que rolam em uma superfície, ou seja, que rolam sem escorregar ou quicar na superfície, como o movimento de rolagem suave mostrado na Figura 1.12 a seguir.

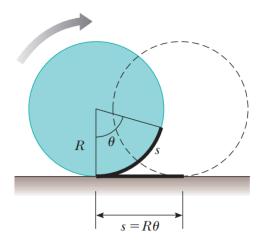


Figura 1.12: Movimento de rolamento, conforme o cilindro gira através de um ângulo θ seu centro de massa move com uma distância linear paralela à superfície ($s=R\theta$) (Serway, 2018)

O centro do objeto se move em uma linha reta paralela à superfície, mas o ponto da borda não apresenta o mesmo movimento. Desta forma, podemos estudar o movimento de rolagem tratando-o como uma combinação de translação do centro de massa e rotação do resto do objeto em torno desse centro de massa.

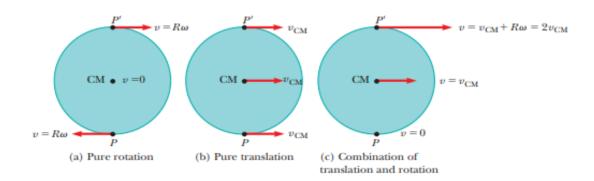


Figura 1.13: Movimento de rolamento de um objeto pode ser modelado como uma combinação de translação pura e rotação pura (Serway, 2018).

A Figura 1.13 mostra um cilindro rolando em uma trajetória reta de forma que o eixo de rotação permaneça paralelo à sua orientação inicial no espaço, e um ponto na borda do cilindro se move em um caminho circular. Simplificaremos o exemplo, concentrando-nos no centro de massa em vez de um ponto na borda do objeto rolante, conforme mostrado na Figura 1.13, em que o centro de massa

se move em linha reta. No movimento puro de rotação todos os pontos do cilindro giram em torno do centro com velocidade angular ω .

Se um objeto como um cilindro rola sem deslizar na superfície, chamamos esse movimento de rolamento puro. O movimento de qualquer corpo redondo suavemente em uma superfície pode ser separado em movimentos puros de rotação e translação. Nesse tipo de movimento existe uma relação simples entre seus movimentos de rotação e translação, e quando consideramos um cilindro uniforme de raio R rolando sem escorregar em uma superfície horizontal, verificamos que conforme o cilindro gira em um ângulo θ , seu centro de massa move uma distância linear $s = R\theta$.

A velocidade de translação do centro de massa para o movimento de rolamento puro é dada por $v_{cm} = R\omega$, onde ω é a velocidade angular do cilindro. O módulo da aceleração linear do centro de massa para movimento de rolamento puro é $a_{cm} = R\alpha$, em que α é a aceleração angular do cilindro.

Vamos agora calcular a **energia cinética de uma roda em rolagem** do ponto de vista de um observador estacionário. Quando encaramos a rolagem como uma rotação pura em torno de um eixo que passa pelo ponto P da Figura 1.13, a energia cinética é

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \,, \tag{1.56}$$

onde I_P é o momento de inércia da roda em relação a um eixo passando por P.

De acordo com o teorema dos eixos paralelos temos:

$$I_P = I_{cm} + MR^2 (1.57)$$

em que M é a massa da roda, I_{cm} é o momento de inércia da roda em relação a um eixo passando pelo centro de massa e R (o raio da roda) é a distância perpendicular entre os eixos. Substituindo a equação 1.57 em 1.56, obtemos

$$K = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 , \qquad (1.58)$$

e usando $v_{cm} = R\omega$ resulta em

$$K = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 \ . \tag{1.59}$$

Observando a equação (1.58), interpretamos o termo $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$ como a energia cinética associada à rotação da roda em torno de um eixo que passa pelo centro de massa, e o termo $\frac{1}{2}MR^2\omega^2$ como a energia cinética associada ao movimento de translação do centro de massa da roda.

1.8 Momento angular

No módulo V vimos que o conceito de momento linear \vec{p} e o princípio de conservação do momento linear são ferramentas importantes no tratamento do movimento de translação de partículas isoladas ou de sistemas de partículas em que incluem corpos rígidos.

No movimento de rotação, uma grandeza correspondente a \vec{p} , análoga à lei de conservação do momento linear, é chamada de quantidade de movimento angular \vec{l} , que é definida a seguir para o caso especial de uma partícula. Essa grandeza é estudada em movimentos como no balé, nos saltos ornamentais, na patinação no gelo, e em muitas outras atividades esportivas.

Considera-se uma partícula de massa m e momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$, na posição \vec{r} em relação à origem O de um sistema inercial de referência. Por conveniência, escolhe-se o plano definido pelos vetores \vec{p} e \vec{r} como sendo o plano xy. Define-se o **momento angular** \vec{l} da partícula em relação à origem:

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \tag{1.60}$$

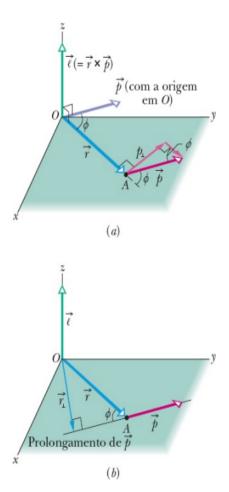


Figura 1.14: Uma partícula ao passar pelo ponto A tem momento linear $(\vec{p}=m\vec{v})$, com o vetor \vec{p} no plano xy. A partícula tem momento angular $(\vec{l}=m\vec{r}\times\vec{p})$ em relação à origem O. Pela regra da mão direita, o vetor momento angular aponta no sentido positivo de z. (a) O módulo de \vec{l} é dado por $l=rp_{\perp}=rmv_{\perp}$. (b) O módulo de \vec{l} também é dado por $l=r_{\perp}p=r_{\perp}mv$ (Halliday et al, 2010).

O ponto A num plano xy mostrado na Figura 1.14 representa o ponto por onde passa uma partícula de massa m e momento linear \vec{p} . Quando a partícula se move em relação a O, na direção do momento linear, o vetor posição gira em torno de O.

Como no caso de um momento ou de um torque, o momento angular é definido através do produto vetorial. O momento angular é também um vetor e sua intensidade pode ser calculada por:

$$l = rp \operatorname{sen} \theta \tag{1.61}$$

onde θ é o menor ângulo entre \vec{r} e \vec{p} ; seu sentido é perpendicular ao plano formado pelos vetores \vec{r} e \vec{p} . O sentido desse vetor deve ser definido pela regra da mão direita: girando-se da mão direita a partir do vetor \vec{r} em direção ao vetor \vec{p} , através do menor ângulo entre eles; o polegar direito estendido apontará no sentido de \vec{l} (paralelo ao eico z na Figura 1.14).

Atenção: Note o seguinte:

- (1) o momento angular tem significado apenas em relação a um ponto de referência;
- (2) o vetor momento angular é sempre perpendicular ao plano formado pelos vetores posição \vec{r} e momento linear \vec{p} .

Podemos ver que a relação entre o momento angular e o momento linear é a mesma que entre o torque e a força. A unidade de momento angular do SI é o quilograma-metro quadrado por segundo $(kg.m^2/s)$, que equivale ao joule-segundo (J.s).

Verificaremos, agora, uma importante relação entre o momento linear e o momento angular para uma única partícula. Derivando-se a equação (1.60), isto é

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}). \tag{1.62}$$

A derivada de um produto vetorial é realizada da mesma forma que a derivada de um produto ordinário, exceto pelo fato de não ser possível alterar a ordem dos termos. Assim, tem-se que

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$
 (1.63)

Nessa expressão, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ é a velocidade instantânea da partícula \vec{v} , e \vec{p} é igual a $m\vec{v}$. Efetuadas essas substituições no primeiro produto, obtém-se

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = (\vec{v} \times m\vec{v}) + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}.$$
 (1.64)

O produto $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$, uma vez que o produto de dois vetores paralelos é nulo. Assim, substituindo-se $\frac{d\vec{p}}{dt}$ no segundo produto pela força resultante $\sum \vec{F}$ que atua sobre a partícula, têm-se

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \times \sum \vec{F}.$$
 (1.65)

O lado direito dessa equação é exatamente o torque resultante, $\sum \vec{\tau}$. Finalmente pode-se escrever:

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{l}}{dt} \,, \tag{1.66}$$

que estabelece que o torque resultante agindo sobre uma partícula é igual à variação temporal do seu momento angular. Nesta equação tanto o $\vec{\tau}$ como o momento angular \vec{l} devem ser definidos em

relação à mesma origem. Como todas as equações vetoriais tridimensionais, é equivalente a três equações unidimensionais, quais sejam,

$$\sum \tau_x = \frac{dl_x}{dt} , \sum \tau_y = \frac{dl_y}{dt} , \sum \tau_z = \frac{dl_z}{dt}.$$
 (1.67)

Assim, a componente x do torque resultante é obtido pela variação temporal da componente l_x da quantidade de movimento angular. Resultados análogos são obtidos para $y \in z$.

1.8.1 Momento angular de um sistema de partículas

Voltamos agora nossa atenção para o momento angular de um sistema de partículas em relação a uma origem. O momento angular total \vec{L} do sistema é a soma (vetorial) dos momentos angulares \vec{l} das partículas do sistema:

$$\vec{L} = \vec{l_1} + \vec{l_2} + \dots + \vec{l_n} = \sum_{i}^{n} \vec{l_i} . \tag{1.68}$$

Os momentos angulares das partículas podem variar com o tempo por causa de forças externas ou por causa de interações entre as partículas. Podemos determinar a variação total \vec{L} derivando a equação (1.68) em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{l}_1}{dt} + \frac{d\vec{l}_2}{dt} + \dots + \frac{d\vec{l}_n}{dt} = \sum_{i}^{N} \frac{d\vec{l}_n}{dt} . \tag{1.69}$$

Para cada partícula $\frac{d\vec{l_n}}{dt}=\vec{\tau}_n,$ assim, através dessa substituição, obtém-se

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i}^{N} \vec{\tau}_{n} . \tag{1.70}$$

A taxa de variação do momento angular \vec{L} do sistema é igual à soma vetorial dos torques a que estão submetidas as partículas do sistema. Esses torques podem ser torques internos (produzidos por forças associadas a outras partículas do sistema) e torques externos (produzidos por forças associadas a corpos externos ao sistema). Entretanto, como as forças exercidas pelas partículas do sistema sempre aparecem na forma de pares de forças. Portanto, segundo a terceira lei de Newton, a soma dos torques produzidos por essas forças internas é nula. Assim, os únicos torques que podem fazer variar o momento angular total \vec{L} do sistema são os torques produzidos por forças externas ao sistema.

Torque Externo Resultante. Chamando de $\vec{\tau}_{res}$ o torque externo resultante, ou seja, a soma vetorial dos torques externos que agem sobre as partículas do sistema, a equação (1.70) pode ser reescrita na forma:

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt} \tag{1.71}$$

Atenção: Os torques e os momentos angulares do sistema devem ser medidos em relação à mesma origem. Se o centro de massa do sistema não está acelerado em relação a um referencial inercial, essa origem pode ser qualquer ponto. Caso, porém, o centro de massa do sistema esteja acelerado, a origem deve ser o centro de massa.

Considere, por exemplo, uma roda como um sistema de partículas. Se a roda está girando em torno de um eixo fixo em relação ao solo, a origem usada para aplicar a equação (1.71) pode ser qualquer ponto estacionário em relação ao solo. Entretanto, se a roda estiver girando em torno de um eixo acelerado (como acontece, por exemplo, quando a roda está descendo uma rampa), a origem deve ser o centro de massa da roda (Serway e Jewett, 2018).

1.8.2 Momento angular de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo

Vamos agora calcular o momento angular de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, como é mostrado na Figura 1.15. O eixo fixo de rotação é o eixo z, e o corpo gira em torno do eixo com uma velocidade angular constante $\vec{\omega}$. Estamos interessados em calcular o momento angular do corpo em relação a esse eixo.

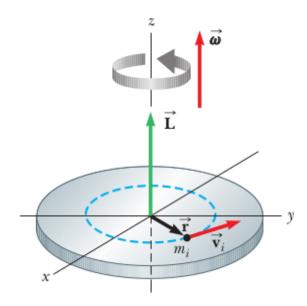


Figura 1.15: Um corpo rígido rotacionando ao redor de um eixo, o momento angula \vec{L} está na mesma direção da velocidade angular $\vec{\omega}$ de acordo com a expressão $\vec{L} = I\vec{\omega}$ (Serway, 2018).

Para calcular o momento angular somamos as componentes z do momento angular de todos os elementos de massa do corpo. Um elemento de massa típico m_i , está se movendo em torno do eixo z em uma trajetória circular. A posição do elemento de massa em relação à origem O é dada pelo vetor posição $\vec{r_i}$. O raio da trajetória circular do elemento de massa é perpendicular ao eixo z. O módulo do momento angular L_i em relação a O para cada elemento de massa é dado pela equação:

$$L_i == m_i v_i r_i = m_i (r_i \omega) r_i = m_i r_i^2 \omega , \qquad (1.72)$$

onde $v_i = r_i \omega$ é a velocidade linear do elemento de massa. O vetor \vec{L}_i é direcionado ao longo do eixo z, bem como o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$.

Podemos calcular o momento angular do objeto tomando a soma de L_i de todas partículas:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = (\sum_i m_i r_i^2) \omega , L_z = I\omega$$
 (1.73)

onde $\sum_i m_i r_i^2$ é o momento de inércia I do objeto sobre o eixo z em relação ao eixo z. Agora diferenciamos a equação com respeito ao tempo, notando que I é constante para um corpo rígido:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha , \qquad (1.74)$$

onde α é a aceleração angular relativa ao eixo de rotação. Por causa dL_z/dt . é igual ao torque externo, nós podemos expressar a equação (1.74) como

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha . (1.75)$$

Esta é a expressão para o torque externo atuando em um corpo rígido sobre um eixo fixo, que é igual ao momento de inércia de um objeto em rotação sobre um eixo multiplicado pela aceleração angular relacionada ao eixo.

1.9 Conservação do momento angular

Até o momento, discutimos apenas duas leis de conservação: a lei de conservação da energia e a lei de conservação do momento linear. Vamos agora falar de uma terceira lei do mesmo tipo, que envolve a conservação do momento angular. O ponto de partida é expressão ($\tau_{res} = dL/dt$), que é a segunda lei de Newton para rotações. Se nenhum torque externo resultante age sobre o sistema, a equação se torna $d\vec{L}/dt = \vec{0}$ ou seja,

$$\vec{L} = constante (sistema isolado)$$
 (1.76)

Esse resultado, conhecido como lei de conservação do momento angular, também pode ser escrito na seguinte forma:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \tag{1.77}$$

Momento angular total no tempo t_i = Momento angular total no tempo t_f .

Atenção: As equações. (1.76) e (1.77) significam que:

Se o torque externo resultante que age sobre um sistema é nulo, o momento angular do sistema permanece constante, sejam quais forem as mudanças que ocorrem dentro do sistema. Além disso, elas são equações vetoriais; como tais, são equivalentes a três equações para as componentes, que correspondem à conservação do momento angular em três direções mutuamente perpendiculares.

Em situações desse tipo, ou seja, a resultante dos torques for nulo, podemos considerar apenas os estados inicial e final do sistema, sem nos preocuparmos com o que acontece nos estados intermediários.

Se um sistema isolado está em rotação, em torno de um eixo fixo, por exemplo, o eixo z, e se sua massa sofrer algum tipo de redistribuição, o momento de inércia do sistema muda. Porque a intensidade do momento angular do sistema é $L_z = I_z \omega$, pela conservação do momento angular é requerido que o produto entre I_z e ω deva permanecer constante. Portanto, uma mudança em I_z para um sistema isolado requer uma mudança em ω . Neste caso, podemos expressar o princípio de conservação do momento angular, em torno do eixo z, como

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = constante$$
 (1.78)

Esta expressão é válida tanto para rotação em torno de um eixo fixo quanto para rotação em torno de um eixo que passa através do centro de massa de um sistema móvel, enquanto esse eixo permanecer fixo numa determinada direção. É exigido apenas que o torque externo total seja zero.

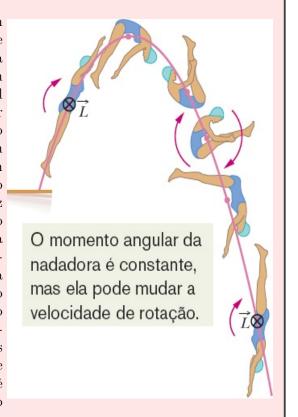
Na equação (1.77), temos uma outra versão do modelo de sistema isolado. Podemos agora declarar que a energia, o momento linear e o momento angular de um sistema isolado são todos conservados:

Para um Sistema Isolado:

 $E_i = E_f$ (Sem a perda de energia) $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ (Se a força resultante é nula) $\vec{L}_i = \vec{L}_f$ (Se o torque resultante é nulo)

Salto de Trampolim

A figura ao lado mostra uma atleta executando um salto duplo e meio mortal carpado. Como era de se esperar, o centro de massa descreve uma trajetória parabólica. A atleta deixa o trampolim com um momento angular em relação a um eixo horizontal que passa pelo centro de massa, representado por um vetor perpendicular ao papel na figura. Quando a mergulhadora está no ar, ela não sofre nenhum torque externo e, portanto, o momento angular em torno do mesmo eixo não pode variar. Levando braços e pernas para a posição carpada, ela reduz consideravelmente o momento de inércia em torno desse eixo e, assim, de acordo com a equação 1.78, a mergulhadora aumenta consideravelmente sua velocidade angular. Quando passa da posição carpada para a posição esticada no final do salto, o momento de inércia aumenta e a velocidade angular diminui o suficiente para a atleta mergulhar espirrando o mínimo possível de água. Mesmo em um salto mais complicado, que envolva também um movimento de parafuso, o momento angular da mergulhadora é conservado, em módulo e orientação, durante todo o salto



(Halliday, Resnick e Walker, 2010)

A Tabela 1.1 mostra as equações que descrevem o movimento de translação e movimento de rotação de um corpo rígido.

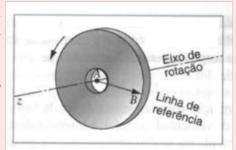
Tabela 1.1: Analogia entre as equações de translação 1D e rotação em torno de único eixo fixo.

Translação		Rotação	
Velocidade	$v = \frac{dx}{dt}$	Velocidade	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$
Aceleração	$v = \frac{dx}{dt}$ $a = \frac{dv}{dt}$	Aceleração	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$
Se $a = cte$	$\sum F = ma$	Se $\alpha = cte$	$\sum \tau = I\alpha$
	$v_f = v_i + at$		$\omega_f = \omega_i + \alpha t$
	$x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2$		$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
	$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$		$\left \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \right $
Trabalho W	$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$	Trabalho W	$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$
Energia Cinética	$K_T = \frac{1}{2}mv^2$	Energia Cinética	$K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potência	$P_{inst} = Fv$	Potência	$P = \tau \omega$
Momento Linear	p = mv	Momento Angular	$L = I\omega$
Força Resultante	$\sum F = \frac{dP}{dt}$	Torque Resultante	$\sum \tau = \frac{dL}{dt}$

1.10 Exercícios Resolvidos

Exemplo 1

Iniciando do repouso no tempo t=0, um esmeril possui uma aceleração angular constante de 3,2 rad/s^2 . Em t=0, a linha de referência AB na figura está na horizontal. Encontre (a) o deslocamento angular da linha AB (e portanto do esmeril) e (b) a velocidade angular do esmeril após 2,7 s.



Solução:

Escolhe-se um sistema de coordenadas de modo que $\vec{\omega}$ está ao longo do sentido positivo de z (de modo que o esmeril e a linha AB giram no plano xy).

Em t=0, tem-se $\theta_0=0,\;\omega_{0z}=0$ e $\alpha_z=3,2rad/s^2.$ Portanto, após 2,7 s , a equação 1.15 fornece

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$$

$$\theta = 0 + 0(2,7 s) + \frac{1}{2}(3,2rad/s^2)(2,7 s)^2 = 11,2 rad = 1,9 rev$$
(1.79)

(Resnick, Halliday e Krane, 2003)

Exemplo 2

Suponha que o motor do esmeril do exemplo 1 seja desligado quando está girando com uma velocidade angular de 8,6 rad/s. Uma pequena força de atrito que age sobre o eixo causa uma desaceleração angular constante e o esmeril atinge o repouso em um tempo de 192 s. Encontre (a) a aceleração angular e (b) o ângulo total desenvolvido durante a desaceleração.

Solução:

(a) Dados $\omega_{0z}=8,6\ rad/s,\,\omega_{0z}=0\ rad/s$ e $t=192\ s,$ obtém-se α_z

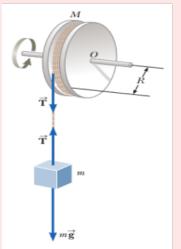
$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t} = \frac{0 - 8,6rad/s}{192 s} = -0,045 \ rad/s^2 \ .$$
 (1.80)

Aqui, o sinal negativo de α_z mostra que ω_z (que é positiva) está diminuindo em intensidade. (b) Da equação (1.15)

$$\theta = \theta_0 + (8,6rad/s)(192s) + \frac{1}{2}(-0,045rad/s^2)(192s)^2 = 822 \ rad = 131 \ rev \ . \tag{1.81}$$

(Resnick, Halliday e Krane, 2003)

Uma roda de raio R, massa M e momento de inércia I é montada sobre um eixo horizontal e sem atrito, como na figura ao lado. Uma corda leve enrolada ao redor da roda sustenta um corpo de massa m. Quando a roda é liberada, o corpo acelera para baixo, a corda se desenrola da roda e esta gira com aceleração angular. Encontre expressões para a aceleração angular da roda, a aceleração translacionado corpo e a tensão na corda.



Solução: A partir do modelo do corpo rígido temos que o torque resultante é dado por

$$\tau = I\alpha \tag{1.82}$$

Isolando a aceleração angular temos:

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{TR}{I} \tag{1.83}$$

A partir do modelo da partícula sob força resultante resulta em:

$$F_y = mg - T = ma ag{1.84}$$

Isolando o termo a:

$$a = \frac{mg - T}{m} \ . \tag{1.85}$$

As equações (1.83) e (1.85) têm três incógnitas: α , a e T. Como o corpo e a roda são conectados por uma corda que não escorrega, a aceleração translacional do corpo suspenso é igual à aceleração tangencial de um ponto na borda da roda. Portanto, as acelerações angular α da roda e translacional do corpo são relacionadas por $a = R\alpha$.

Usando este fato com as equações (1.83) e (1.85):

$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m} \tag{1.86}$$

Resolvendo para a tensão T:

$$T = \frac{mg}{1 + (mR^2/I)} \tag{1.87}$$

Substituindo a equação (1.87) na (1.86) e resolvendo para a:

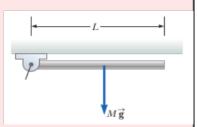
$$a = \frac{g}{1 + (I/mR^2)}$$
 e $\alpha = \frac{a}{R} = \frac{g}{R + (I/mR)}$. (1.88)

Usando o momento de inércia da polia $I_{cm} = MR^2/2$, resulta em:

$$a = g\left(\frac{2m}{M+2m}\right) \; , \quad \alpha = \frac{g}{R}\left(\frac{2m}{M+2m}\right) \quad {\rm e} \quad T = mg\left(\frac{M}{M+2m}\right) \; .$$

(Serway e Jewett, 2018)

Uma barra uniforme de comprimento L e massa M é presa em uma extremidade de um pivô sem atrito e está livre para girar num eixo que passa pelo centro no plano vertical, como mostra a figura. A barra é liberada do repouso na posição horizontal. Quais são as acelerações angular inicial da barra e translacional inicial de sua extremidade direita?



Solução: A única força que contribui para o torque sobre um eixo que passa pelo pivô é a gravitacional $M\vec{g}$ exercida sobre a barra. (A força exercida pelo pino sobre a barra tem torque zero no pino porque a distância do ponto de aplicação dessa força em relação ao eixo considerado é zero.) Para computar o torque na barra, supomos que a força gravitacional atua no centro de massa da barra. Assim temos:

$$\tau = Mg\frac{L}{2} = I\alpha \tag{1.89}$$

Isolando a aceleração angular temos:

$$\alpha = \frac{MG(L/2)}{(1/3)ML^2} = \frac{3g}{2L} \tag{1.90}$$

Usando a equação $a=L\alpha$ obtemos a aceleração translacional inicial da extremidade direita da barra:

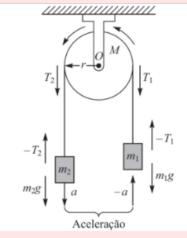
$$a = L\alpha = \frac{3}{2}g. ag{1.91}$$

Atenção: Estes resultados são o iniciais das acelerações angular e translacional. Assim que a barra começa a girar, a força gravitacional não é mais perpendicular a ela, e os valores das duas acelerações diminuem, indo para zero no momento em que a barra passa pela orientação vertical. E se colocássemos um moeda na extremidade da barra e então soltássemos? A moeda permaneceria em contato com a barra?

Resposta: O resultado para aceleração inicial de um ponto na extremidade da barra que a > g. Uma moeda sem sustentação cai com aceleração g. Então, se colocarmos uma moeda na extremidade da barra e então a soltarmos, a extremidade cai mais rápida que a moeda! A moeda não fica em contato com a barra. (Tente isto com uma moeda e uma régua de metro!)

(Serway e Jewett, 2018)

Considere dois corpos com $m_2 > m_1$ conectados por um barbante que passa sobre uma polia que tem massa M e raio R (ver figura ao lado). O barbante não escorrega na polia nem fica esticado. A polia gira sem atrito. Os dois corpos são liberados a partir do repouso. Determine a aceleração translacional de cada bloco.



Solução: Na figura da máquina de Atwood, apresentamos todas as forças que atuam no sistema. Pela lei Newton temos as seguintes equações para os blocos:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a (1.92)$$

$$m_1 g - T_1 = -m_1 a (1.93)$$

Aplicando a segunda lei de Newton na forma rotacional à polia temos

$$\tau_z = I\alpha \tag{1.94}$$

$$T_2r - T_1r = I\alpha \tag{1.95}$$

Usando o fato de que a aceleração angular da polia está relacionada com a aceleração linear a do fio e da massa m_2 pela

$$a = \alpha r \to \alpha = \frac{a}{r} \,, \tag{1.96}$$

onde α é positivo com a convenção adotada para a na figura. O momento de inércia da polia é $I=(1/2)Mr^2$, assim temos

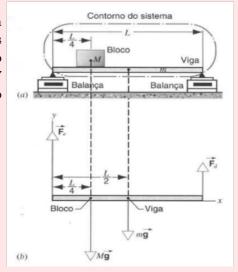
$$\tau_z = (T_2 - T_1)r = I\alpha = \frac{1}{2}Mr^2\frac{a}{r} \to T_2 - T_1 = \frac{1}{2}Ma.$$
(1.97)

Resolvendo o sistema de equações formado por (1.95) e (1.97) temos:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} \ . \tag{1.98}$$

Observação: as massas m_1 e m_2 realizam um movimento retilíneo uniformemente acelerado, uma vez que a aceleração dos blocos é constante e a polia realiza um movimento circular uniformemente acelerado.

Uma viga uniforme de comprimento L, cuja massa m é 1,8 kg, está em repouso com as suas extremidades apoiadas em duas balanças digitais, conforme mostrado na figura ao lado. Um bloco, cuja massa M é igual a 2,7 kg, repousa sobre a viga, com o seu centro a um quarto da extremidade esquerda da viga. O que a balança lê?



Solução:

Escolhe-se a viga e o bloco como o sistema a ser estudado, tomados juntos. Na figura acima temos o diagrama de corpo livre do sistema, mostrando todas as forças externas que atuam sobre o sistema. O peso da viga, $m\vec{g}$, atua para baixo no seu centro de massa, o qual está sobre o seu centro geométrico, uma vez que a viga é uniforme. Do mesmo modo, o peso do bloco, $M\vec{g}$, atua para baixo no seu centro de massa. As balanças empurram para cima as extremidades da viga com forças $\vec{F_e}$, e F_d . As intensidades destas duas últimas forças são as leituras das balanças a serem determinadas.

O sistema está em equilíbrio está estático. Logo

$$\sum F_y = F_e + F_d - Mg - Mg = 0 \tag{1.99}$$

Temos uma equação e duas incógnitas, F_e e F_d . Precisamos da equação que vem do torque. Escolhe-se calcular os torques em relação a um eixo que passa pela extremidade esquerda da viga. O torque da força F_e é zero, por que a distância do ponto de aplicação da força F_e em relação ao eixo escolhido é zero. Usando os conhecimentos sobre produto vetorial (lembrando $\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r}$), conclui-se que F_d promove um torque positivo, e Mg e mg promovem torques negativos. O torque resultante é obtido pela multiplicação de cada força pelo seu braço de alavanca (neste caso, a sua distância ao eixo escolhido):

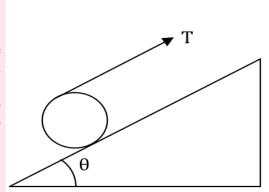
$$\sum \tau_z = F_e(0) + F_d(L) - Mg\frac{L}{2} - Mg\frac{L}{4} = 0$$
 (1.100)

Resolvendo as equações (1.99) e (1.100) temos:

$$F_d = 15N F_e = 29N . (1.101)$$

(Resnick, Halliday e Krane, 2003)

Considere que um cilindro seja puxado diretamente para cima, ao longo de um plano inclinado com um ângulo θ , por uma força T paralela ao plano. Obtenha uma expressão para o módulo da aceleração do centro de massa do cilindro em função do peso p e da massa m do cilindro, sem que ocorra deslizamento.



Solução:

Ao longo do plano, teremos:

$$F_r = p \operatorname{sen} \theta - T \Rightarrow m a_{cm} = p \operatorname{sen} \theta - T.$$

Para o torque, teremos:

$$\tau = I_{cm}\alpha \Rightarrow TR = \frac{mR^2}{2}.\frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow T = \frac{ma_{cm}}{2}.$$

Somando os dois resultados teremos:

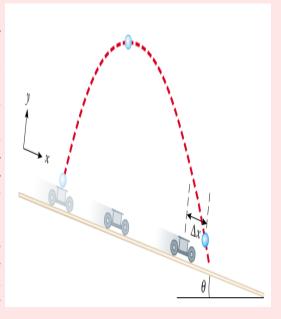
$$ma_{cm} + \frac{ma_{cm}}{2} = 2T - p \sin \theta$$

 $\rightarrow a_{cm} = \frac{4T - 2p.sen\theta}{3m}$

Em uma demonstração conhecida como cart balístico, uma bola é projetada verticalmente para cima a partir de um carrinho que se move com velocidade constante ao longo da direção horizontal. A bola cai no copo do carrinho porque tanto o carrinho uma bola tem a mesma componente horizontal de velocidade.

Agora considere um cart balístico em um plano inclinado em um âgulo θ , como na Figura ao lado. O carrinho (incluindo rodas) tem massa M e o momento de inércia de cada uma das duas rodas é $mR^2/2$.

Usando a conservação de energia (assumindo que não há atrito entre o carrinho e os eixos) e assumindo um movimento de rolamento puro (sem escorregar), mostre que a aceleração do carrinho ao longo do inclinação é



$$a_x = \left(\frac{M}{M + 2m}\right)g \operatorname{sen}\theta$$

Solução:

Considere o movimento começando do repouso ao longo da distância x na direção do plano inclinado:

$$(K_{trans} + K_{rot} + U)_i + \Delta E = (K_{trans} + K_{rot} + U)_f$$
$$0 + 0 + Mgx \operatorname{sen} \theta + 0 = \frac{1}{2}Mv^2 + 2\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 + 0$$
$$2Mgx \operatorname{sen} \theta = (M + 2m)v^2$$

Uma vez que a aceleração é constante,

$$v^{2} = v_{i}^{2} + 2ax = 0 + 2ax \text{ deste modo},$$
$$2Mgx \sin \theta = (M + 2m)2ax$$
$$a = \frac{Mgx \sin \theta}{(M + 2m)}$$

(Serway e Jewett, 2018)

Se r, p e θ são dados, podemos calcular o momento angular de uma partícula usando $l=rp \sec \theta$. Entretanto, ocorre que, em alguns casos, são dados os componentes (x, y e z) de r e (p_x,p_yep_z) de p.

(a) Mostre, então, que os componentes de l segundo os eixos Ox, Oy e Oz serão dados por:

$$l_x = yp_z - zp_y$$
$$l_y = zp_x - xp_z$$
$$l_z = xp_y - yp_x$$

(b) Mostre que, se a partícula estiver se movendo apenas resultante terá somente o componente segundo Oz.

Solução:

a) O momento angular é dado por:

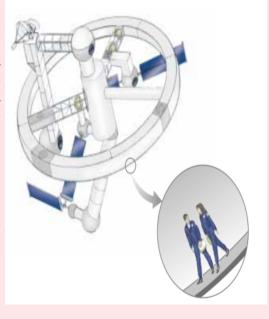
$$\begin{split} \vec{l} &= \vec{r} \wedge \vec{p} \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \\ &= (yp_z - zp_y)\hat{i} + (zp_x - xp_z)\hat{j} + (xp_y - yp_x)\hat{k} \\ l_x &= yp_z - zp_y, \ l_y = zp_x - xp_z, \ e \ l_z = xp_y - yp_x \end{split}$$

b) $\vec{r} = xi + yj$ e $\vec{p} = p_x i + p_y j$. Assim termos:

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{p} \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = (xp_y - yp_x)\hat{k}$$

Uma estação espacial é construída na forma de um anel de massa de $5,00\times10^4$ kg. Os tripulantes percorrem um convés formado pela superfície interna da parede cilíndrica externa do ringue, com raio de 100 m. Em repouso quando construído, o anel é colocado girando em torno de seu eixo para que o as pessoas lá dentro experimentam uma aceleração de queda livre efetiva igual a g. (A Figura ao lado mostra o anel junto com algumas outras partes que fazem uma contribuição desprezível para o momento total de inércia.) A rotação é alcançada por disparando dois pequenos foguetes presos tangencialmente a pontos opostos do lado de fora do anel.

- (a) Qual momento angular a estação espacial adquire?
- (b) Prove que o torque total no anel, multiplicado pelo intervalo de tempo que os foguetes devem ser disparados para exercer um impulso, é igual à mudança no momento angular encontrada no item (a). Esta igualdade representa o teorema do impulso angular momento angular.
- (c) Por quanto tempo os foguetes devem ser disparados se cada um exercer um impulso de 125 N?



Solução:

É requerido que $a_c = g = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9,8 \; m/s}{100 \; m}} = 0,313 \; rad/s$$

(a)
$$L = I\omega = (5 \times 10^8 \ kg.m^2/s)(0, 313 \ rad/s) = 1,57 \times 10^8 \ kg.m^2$$

(b)
$$\sum \tau = I\alpha = \frac{I(\omega_f - \omega_i)}{\Delta t}$$

$$\sum \tau \Delta t = I\omega_f - I\omega_i = L_f - L_i$$

Este é o teorema do impulso angular - momento angular.

(c)
$$\Delta t = \frac{L_f - 0}{\sum \tau} = \frac{1,57 \times 10^8 \ kg.m^2}{(2)(125 \ N)(100 \ m)} = 6,26 \times 10^3 \ s = 1,74 \ h.$$

(Serway e Jewett, 2018)

Uma mulher de 60,0 kg está de pé na borda de uma mesa giratória horizontal, com momento de inércia de 500 $kg.m^2$ e raio de 2,00 m. A plataforma giratória está inicialmente em repouso e está livre para girar em torno de um eixo vertical sem atrito através de seu Centro. A mulher então começa a andar ao redor da borda no sentido horário (visto de cima do sistema) a uma velocidade constante de 1,50m/s em relação à Terra.

- (a) Em que direção e com que velocidade angular a base giratória gira?
- (b) Quanto trabalho a mulher faz para colocar a si mesma e a plataforma giratória em movimento?

Solução:

(a) A mesa vira na direção oposta à forma como a mulher anda, então seu momento angular é cancelado o da mulher. A partir da conservação do momento angular para o sistema da mulher e da mesa giratória, temos $L_f = L_i = 0$, portanto

$$L_f = I_{mulher} \ \omega_{mulher} + I_{mesa} \ \omega_{mesa} = 0$$

e

$$\omega_{mesa} = \left(-\frac{I_{mulher}}{I_{mesa}}\right) \omega_{mulher}$$

$$\omega_{mesa} = \left(-\frac{m_{mulher}r^2}{I_{mesa}}\right) \left(\frac{v_{mulher}}{r}\right)$$

$$\omega_{mesa} = \left(-\frac{60,0 \ kg(2,0 \ m)(1,5 \ m/s)}{500 \ kg.m^2}\right) = -0,360 \ rad/s$$

(b) O trabalho realizado $W = \Delta K = K_f - 0 = \frac{1}{2} m_{mulher} v_{mulher}^2 + \frac{1}{2} I \omega_{mesa}^2$

$$W = \frac{1}{2}60,0 \ kg(1,5 \ m/s)^2 + \frac{1}{2}(500 \ kg.m^2)(0,360 \ rad/s)^2 \ = \ 99,9 \ J$$

(Serway e Jewett, 2018)

A Lua gira em torno da Terra, de modo que vemos sempre a mesma face dela.

Qual a relação entre o momento angular orbital da Lua em relação à Terra e o momento angular de spin da Lua (momento angular em relação ao seu centro de massa)?

Solução:

(a) O momento angular orbital da Lua é dado por:

$$L_{Orb} = M_L.R_{Orb}^2.\frac{2\pi}{T_{Orb}}.$$

Onde R_{Orb} é o raio da órbita da Lua em torno da Terra. O momento angular de spin da Lua é dado por:

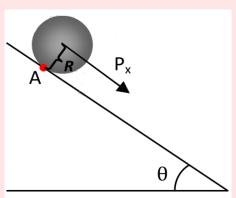
$$L_S = \frac{2M_L R_L^2}{5} \cdot \frac{2\pi}{T_S} \ .$$

Onde R_L é o raio da Lua. Porém, como vemos sempre a mesma face da Lua, aqui na Terra, o período de spin da Lua é igual ao período de sua órbita. Portanto: $T_s=T_{Orb}$. Assim, teremos:

$$\frac{L_S}{L_{Orb}} = \frac{\frac{2M_L R_L^2}{5} \cdot \frac{2\pi}{T}}{M_L \cdot R_{Orb}^2 \cdot \frac{2\pi}{T}}$$
$$\frac{L_S}{L_{Orb}} = \frac{2}{5} \left(\frac{R_L}{R_{Orb}}\right)^2$$

Um cilindro desce, rolando, um plano inclinado de ângulo θ . Mostrar, por aplicação direta da equação $\left(\vec{\tau}=d\vec{L}/dt\right)$, que a aceleração de seu centro de massa é

$$a_{cm} = \frac{2}{3}g \sin \theta$$



Solução:

Considerando a figura, podemos escrever:

$$\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow P_x R = \frac{d}{dt} I \omega$$

$$PR \operatorname{sen} \theta = I \frac{d\omega}{dt}$$

$$MgR \operatorname{sen} \theta = (I_{cm} + MR^2) \cdot \alpha$$

Onde M é a massa e I é o momento de inércia (inércia rotacional) do cilindro, com relação ao ponto A. Sendo I_{cm} a inércia rotacional do cilindro com relação ao centro de massa, dada por:

$$I_{cm} = \frac{MR^2}{2}$$

teremos então:

$$MgR \operatorname{sen} \theta = (\frac{MR^2}{2} + MR^2).\alpha$$

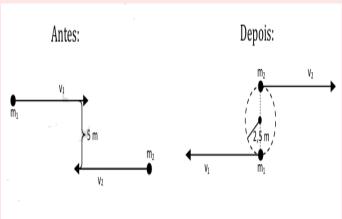
 $R.\alpha = \frac{2}{3}g \operatorname{sen} \theta , \ a_{cm} = R.\alpha$
 $a_{cm} \frac{2}{3}g \operatorname{sen} \theta$

Dois patinadores, cada um com massa de 60 kg, aproximam-se um do outro ao longo de trajetórias paralelas, separadas de 5,0 m. Eles têm velocidades iguais e opostas de 12 m/s. O primeiro patinador possui um bastão longo e leve de 3,0 m de comprimento, e o segundo se agarra à extremidade do bastão quando o alcança (suponha que o gelo não tenha atrito).

- (a) Descrever quantitativamente o movimento dos patinadores depois de ligados pelo bastão.
- (b) Puxando o bastão, os dois patinadores aproximam-se até $1,0\,$ m. Qual será então o movimento deles?
- (c) Comparar a energia cinética do sistema nas partes (a) e (b). De onde provém a diferença? Solução:

Considere a figura abaixo, representando as direções dos patinadores e suas respectivas velocidades:

Levando em consideração que os dois patinadores com os braços esticados e mais a vara de 3m atingem a distância de 5 m, após o contato, o sistema (dois patinadores), executará um movimento circular uniforme de raio igual a 2,5 m. Esse movimento é provido de uma velocidade angular igual a:



$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{12}{2,5} = 4,8rad/s$$

O momento de inércia (inércia rotacional) dado por:

$$I_i = 2mr_i^2 \Rightarrow I_i = 120(2,5)^2 \Rightarrow I_i = 750 \ kgm^2$$

b) Ao puxar o bastão, os patinadores atingem a distância de 1 m. A inércia rotacional é então alterada para o seguinte valor:

$$I_f = 2mr_f^2 \Rightarrow I_f = 120(0,5)^2 \Rightarrow I_f = 30 \ kgm^2$$

Logo, aplicando a conservação do momento angular, poderemos encontrar a nova velocidade angular do sistema. Assim, teremos:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \Rightarrow 750.4, 8 = 30.\omega_f$$

$$\Rightarrow \omega_f = 120 \ rad/s$$

c) A energia cinética inicial do sistema:

$$K_i = \frac{I_i \omega_i^2}{2} \Rightarrow K_i = \frac{750(4,8)^2}{2} = 8640 J$$

Agora a energia cinética final do sistema vale:

$$K_f = \frac{I_f \omega_f^2}{2} \Rightarrow K_f = \frac{30(120)^2}{2} = 216000 J$$

Essa diferença de energia é proveniente do trabalho realizado pelos patinadores ao puxar o bastão e assim encurtarem a distância.

Em 1913, Niels Bohr postulou que qualquer sistema mecânico em rotação, cuja inércia rotacional (momento de inércia) seja I, só pode ter momento angular com valores múltiplos inteiros de um número determinado = $h/2\pi = 1,05410^{34}J.s.$ Em outras palavras:

$$L = I\omega = n\frac{h}{2\pi}$$

sendo n um inteiro positivo qualquer ou zero. Dizemos que L está quantizado, desde que não pode mais assumir qualquer valor.

- (a) Mostre que este postulado restringe a energia cinética que o sistema em rotação pode ter, a um conjunto de valores discretos, isto é, a energia é quantizada.
- (b) Considere o assim chamado rotor rígido, que consiste em uma massa m obrigada a girar em um círculo de raio R. Quais seriam as velocidades angulares que poderia ter a massa se o postulado fosse correto? Que valores de energia cinética a massa pode alcançar?
- (c) Desenho um diagrama de níveis de energia, de qualquer tipo, que indique como varia o espaçamento entre níveis de energia quando n aumenta, podendo ser semelhante ao da figura ao lado. Certas moléculas diatômicas de baixa energia comportam-se como um rotor rígido. Solução: (a) Tomando a expressão do momento angular, teremos:

$$L = I\omega = \frac{nh}{2\pi}$$

A energia cinética do sistema em rotação assume a forma:

$$K = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}$$
$$\Rightarrow K = \frac{n^2h^2}{8\pi^2I}$$

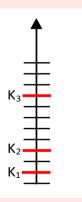
(b) Da primeira expressão do item (a), temos:

$$\omega = \frac{nh}{2\pi I}; I = mR^2 e v = \omega R$$
$$\Rightarrow v = \frac{nh}{2\pi mR}$$

E para a energia cinética temos:

$$K = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow K = \frac{m}{2} \left(\frac{nh}{2\pi mR}\right)^2$$
$$K = \frac{n^2h^2}{8\pi^2 mR^2}$$

(c) Seja o nível 1 de energia dado por: $K_1=\frac{h^2}{8\pi^2mR^2}$ Assim teremos: $n=2\Rightarrow K_2=4K_1; n=3\Rightarrow K_3=9K_1$ e etc .



1.11 Resumo 45

1.11 Resumo

A **Posição Angular** de um corpo rígido é definida como o ângulo θ entre uma linha de referência fixa no objeto e uma linha de referência fixa no espaço.

O deslocamento angular de uma partícula se movendo em um caminho circular ou um objeto rígido girando em torno um eixo fixo é $\Delta\theta=\theta_f-\theta_i$

A velocidade angular instantânea de uma partícula se movendo em um caminho circular ou de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo é

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

A aceleração angular instantânea de uma partícula se movendo em um caminho circular ou um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo é

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo, todas as partes do objeto têm a mesma velocidade angular e a mesma aceleração angular.

O momento de inércia de um sistema de partículas é definido como

$$I = \sum_{i} m_i r_i^2$$

em que m_i é a massa da i-ésima partícula e r_i é sua distância do eixo de rotação.

Uma força força F agindo sobre um objeto a uma distância r do eixo de rotação gera um Torque τ cuja intensidade é expressa por:

$$\tau = Fr \operatorname{sen} \phi = Fd$$

onde ϕ é o ângulo entre o vetor posição e o ponto de aplicação da força, e d é a distância perpendicular ao eixo de rotação à linha de ação da força.

Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo, a posição angular, a velocidade angular e a aceleração angular estão relacionadas à translação da posição, à velocidade translacional e à aceleração translacional por meio das expressões:

$$s = r\theta$$

$$v = r\omega$$

$$a_t = r\alpha$$

Se um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo com velocidade angular ω , sua **energia** cinética rotacional pode ser escrita como:

$$K = \frac{I\omega^2}{2}$$

onde I é o momento de inércia em torno do eixo de rotação.

Usando a integração podemos definir **o momento de inércia** de um corpo rígido da seguinte forma:

$$I = \int r^2 dm$$

onde r é a distância do elemento de massa dm ao eixo de rotação.

A taxa na qual o trabalho é realizado por uma força externa ao girar um objeto rígido em torno de um eixo fixo, ou a **potência** fornecida, é

$$P = \tau \omega$$

Se o trabalho é realizado em um corpo rígido e o único resultado do trabalho é a rotação em torno de um eixo fixo, o trabalho resultante realizado por forças externas na rotação do corpo é igual à mudança na energia cinética rotacional do objeto:

$$W = \Delta K = \frac{I\omega_f^2}{2} - \frac{I\omega_i^2}{2}$$

A energia cinética total de um corpo rígido em Rolamento sobre uma superfície sem escorregar é igual à energia cinética rotacional em torno de seu centro de massa mais a energia cinética translacional do centro de massa:

$$K = \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{cm}^2$$

Se um torque externo (τ_{res}) age sobre um corpo rígido, este gira em torno de um eixo fixo, e o corpo sofre uma aceleração angular alpa, onde

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha$$

Esta equação é o análogo rotacional à segunda lei de Newton para partícula sob uma força resultante.

O momento angular L em torno de um eixo fixo que passa pela origem, para uma partícula tendo momento linear (p = mv), é:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

onde r é a posição do vetor da partícula em relação à origem.

1.11 Resumo 47

 ${\bf A}$ componente ${\bf z}$ do momento angular de um corpo rígido girando em torno de um eixo z fixo é

$$L_z = I\omega$$

onde I é o momento de inércia do objeto em torno do eixo de rotação e ω é sua velocidade angular.

Sistema não isolado (Momento Angular): Se um sistema interage com seu ambiente no sentido de que há um torque externo no sistema, o torque externo resultante atuando em um sistema é igual à taxa de variação do seu momento angular em relação ao tempo:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

Sistema isolado (Momento Angular): Se um sistema não experimenta nenhum torque externo do ambiente, o momento angular total do sistema é conservado:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

Aplicando esta lei de conservação do momento angular a um sistema cujo momento de inércia muda temos:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = constante$$

Referências Bibliográficas

Bauer, W.; Westfall, G. D. e Dias, W. (2012) Física Para Universitários, Mecânica, Bookman, São Paulo.

Halliday, D.; Resnick, S. e Walker, J. (2010) Física 1, Editora LTC, Rio de Janeiro.

Ling, S. J.; Sanny, J. e Moebs, W. (2018) University Physics Volume 1, openstax, Hosuton, Texas.

Nussenzveig, H. M. (2008) Curso de Física Básica 1, Mecânica, Editora Blucher, São Paulo.

Resnick, S.; Halliday, D. e Krane, K. (2003) Física 1, Editora LTC, São Paulo.

Serway, R. A. e Jewett, J. W. (2018) Física Para Cientistas E Engenheiros, Volume 1, Mecânica, Editora Cengage, São Paulo.