



UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

Instituto de Física

Departamento de Física da Terra e do Meio Ambiente

DFTMA/IF/UFBA



Física Geral Teórica I - FISD36

NOTAS DE AULAS: MÓDULO II

ALANNA DUTRA, EDVALDO SUZARTHE,

REYNAM PESTANA E THIERRY LEMAIRE

19 DE SETEMBRO DE 2020

SALVADOR, BAHIA, BRASIL

Universidade Federal da Bahia Federal
& Instituto de Física (IF/UFBA)
Departamento de Física da Terra e do Meio ambiente
R. Barão de Geremoaboá, Salvador, Bahia, Brasil
40.170-290

E-mails: alannacd@ufba.br, esaraujo@ufba.br, reynam@ufba.br, thierry.lemaire@ufba.br

Índice

Índice	3
Índice de Tabelas	5
Índice de Figuras	7
1 Cinemática	9
1.1 Vetor posição	9
1.2 Vetor deslocamento	10
1.3 Vetor velocidade	10
1.4 Vetor aceleração	12
1.5 Cinemática unidimensional	13
1.5.1 Movimento com velocidade constante	14
1.5.2 Movimento uniformemente acelerado	16
1.5.3 Lançamento vertical	19
1.5.4 Equações da cinemáticas derivadas do cálculo	22
1.6 Movimento bidimensional e tridimensional	24
1.6.1 Movimento de um projétil	24
1.6.2 Movimento circular uniforme	28
1.7 Exercícios resolvidos	31
1.8 Resumo	34
Referências Bibliográficas	37

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

1.1	Vetor posição (Ling, 2018).	9
1.2	Vetor deslocamento (Ling, 2018).	10
1.3	Vetor velocidade média (Ling, 2018).	11
1.4	Uma partícula se move da posição A para a posição B. Seu vetor velocidade muda de $\vec{v}_i$ para $\vec{v}_f$ (Serway,2018).	12
1.5	Exemplo de movimento unidimensional	13
1.6	Movimento unidimensional com velocidade constante (Nussenzveig, 2008).	14
1.7	Espaço percorrido para movimento 1D com velocidade constante (Nussenzveig, 2008).	14
1.8	Natação.	15
1.9	Uma partícula sob aceleração constante se movendo ao longo do eixo x: (a) o gráfico posição <i>versus</i> tempo, (b) o gráfico velocidade <i>versus</i> tempo, e (c) o gráfico de aceleração <i>versus</i> tempo.	17
1.10	Dados obtidos de uma decolagem de avião (Bauer et al., 2012).	17
1.11	Convenções adotadas para queda livre	19
1.12	Componente da velocidade associada ao lançamento vertical de uma partícula.	20
1.13	Componente da velocidade associada ao lançamento vertical de uma partícula nas duas situações ($V_0 > 0$ e $V_0 < 0$).	20
1.14	Corpo em queda livre.	21
1.15	Velocidade em função do tempo (Nussenzveig, 2008).	22
1.16	Trajetória parabólica das brasas emitidas por um vulcão em erupção (Serway, 2018).	25
1.17	Faíscas segue um caminho parabólico (Serway, 2018).	25
1.18	Trajetória parabólica (Serway, 2018).	26
1.19	Alcance (Serway, 2018).	27
1.20	MCU:(a) os ponteiros do relógio analógico e (b) um satélite de massa m movendo-se ao redor da Terra.	28
1.21	Partícula realizando movimento circular uniforme (Halliday,2003).	29

1

Cinemática

A cinemática é parte da Física que faz uma descrição do movimento de uma partícula empregando os vetores posição, velocidade e aceleração, sem preocupação com as causas do movimento. A seguir fazemos uma breve descrição dos vetores utilizados no estudo do movimento de objetos, bem como suas aplicações no deslocamento desses objetos. Iremos também introduzir as grandezas utilizadas em cinemática, salientando que essas grandezas são definidas em relação a um dado referencial, como também apresentamos a descrição matemática do movimento (unidimensional e num plano).

1.1 Vetor posição

A localização de uma partícula em relação à origem de um sistema de coordenadas é dado pelo vetor posição. Na Figura 1.1, apresentamos o vetor posição em três dimensões. É importante mencionar que o vetor posição varia no tempo, já que a partícula está se movimentando. Então, em cada instante de tempo temos um vetor posição associado à partícula.

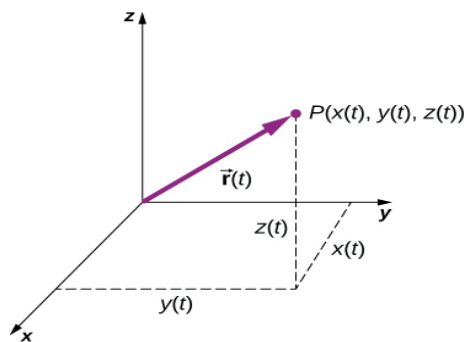


Figura 1.1: Vetor posição (Ling, 2018).

Usando o sistema de coordenadas cartesiano, o vetor posição pode ser escrito como:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (1.1)$$

onde $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ são as coordenadas do vetor posição. O seu módulo é dado por:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.2)$$

e sua dimensão é:

$$[r] = L. \quad (1.3)$$

1.2 Vetor deslocamento

O vetor **deslocamento** $\Delta\vec{r}$ é definido na literatura como a variação do vetor posição. Para exemplificar, considere os seguintes vetores posição: $\vec{r}(t_1)$ e $\vec{r}(t_2)$ (Figura 1.2). Então, o vetor deslocamento é dado pela seguinte expressão:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1). \quad (1.4)$$

Como pode ser visto na equação (1.4), o vetor deslocamento depende das posições inicial e final da partícula seguindo uma dada trajetória. É importante chamar atenção de que o módulo deste vetor não representa em geral a distância percorrida pela partícula.

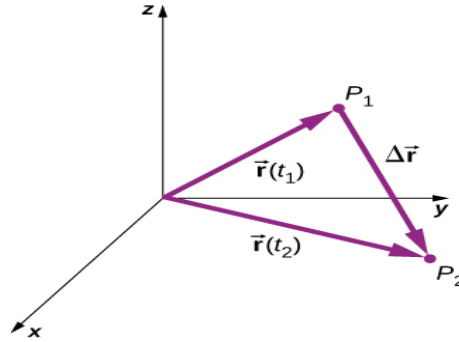


Figura 1.2: Vetor deslocamento (Ling, 2018).

1.3 Vetor velocidade

O vetor **velocidade média** é definido como a relação entre vetor deslocamento e o intervalo de tempo durante o qual o deslocamento ocorre, ou seja:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \quad \text{onde } \Delta t = t_2 - t_1. \quad (1.5)$$

Podemos escrever então o vetor deslocamento como:

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_m \Delta t, \quad (1.6)$$

ou seja, os vetores deslocamento e velocidade média são paralelos (proporcionais). Este último depende somente das posições inicial, final e do intervalo de tempo necessário para percorrer a trajetória entre estas duas posições.

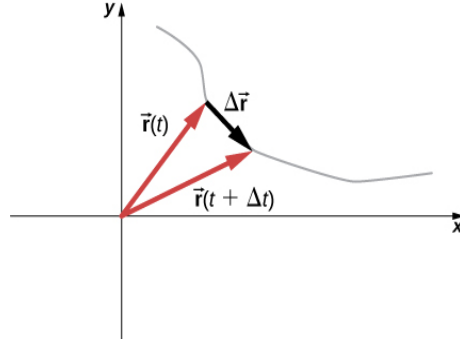


Figura 1.3: Vetor velocidade média (Ling, 2018).

Para ilustrar o cálculo do vetor velocidade média, consideremos a Figura 1.3. Então a $\vec{v}_m$ é dado por:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Atenção: duas partículas seguindo duas trajetórias muito diferentes podem apresentar, num mesmo intervalo de tempo, as mesmas velocidades médias (as 2 partículas ocupam as mesmas posições nos instantes t_1 e t_2).

Quando uma partícula segue uma curva fechada, seu vetor velocidade média calculado entre os extremos desta trajetória é nulo. Concluimos que esta grandeza física apresenta uma utilidade limitada e poderíamos definir uma grandeza em geral mais útil: a velocidade instantânea.

Definimos a **velocidade instantânea** de uma partícula como sendo o limite da velocidade média quanto o intervalo de tempo $\Delta t \rightarrow 0$, ou seja:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.8)$$

A derivada do vetor posição é avaliada por intermédio da derivada de cada um de seus componentes, isto é:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}. \quad (1.9)$$

Como pode ser visto na equação (1.9), podemos escrever o vetor $\vec{v}(t)$ como

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k} \quad (1.10)$$

com

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}; v_y(t) = \frac{dy}{dt}; v_z(t) = \frac{dz}{dt} \quad (1.11)$$

e módulo da velocidade é

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (1.12)$$

Pelas equações (1.8) e (1.9), conclui-se que o vetor velocidade instantânea é tangente à trajetória e indica o sentido de deslocamento da partícula. Fazendo a análise dimensional da grandeza física velocidade instantânea temos:

$$[v] = [LT^{-1}]. \quad (1.13)$$

1.4 Vetor aceleração

Conforme uma partícula se move, o seu vetor velocidade pode variar no tempo. Essa variação pode ser: o módulo, a direção ou o sentido (ver Figura 1.4). A variação do vetor velocidade em relação ao tempo chama-se aceleração. De maneira análoga à velocidade, pode-se definir a aceleração média a qual é submetida uma partícula no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ pela relação:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \text{onde } \Delta t = t_2 - t_1. \quad (1.14)$$

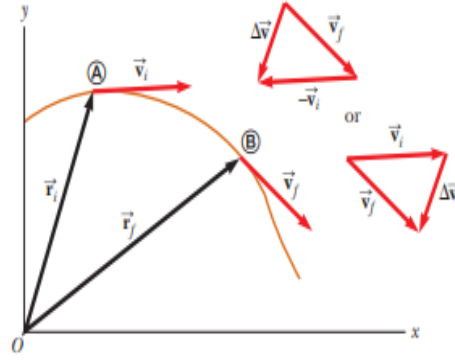


Figura 1.4: Uma partícula se move da posição A para a posição B. Seu vetor velocidade muda de $\vec{v}_i$ para $\vec{v}_f$ (Serway, 2018).

O vetor **aceleração instantânea** de uma partícula é obtida a partir do limite da aceleração média para intervalos de tempo que tendem a zero:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (1.15)$$

Temos então as componentes do vetor aceleração instantânea:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}) = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}, \quad (1.16)$$

ou seja:

$$\vec{a}(t) = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}, \quad (1.17)$$

com

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}; \quad a_z(t) = \frac{dv_z}{dt} \quad (1.18)$$

e o módulo da aceleração é

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.19)$$

Concluimos que em geral a direção do vetor aceleração instantânea não está relacionada diretamente com a direção do vetor velocidade instantânea, da mesma forma que o vetor velocidade instantânea não tem uma direção relacionada com aquela do vetor posição.

Atenção: existem certas situações em que o módulo da velocidade instantânea é constante, como no caso de uma partícula seguindo uma trajetória circular, mas mesmo assim esta partícula é submetida a uma aceleração. Isto é devido ao fato que a direção da velocidade muda continuamente e, portanto, a sua derivada, que indica a sua taxa de variação temporal, é não nula.

Fazendo a análise dimensional da grandeza física aceleração temos:

$$[a] = [LT^{-2}] \quad (1.20)$$

1.5 Cinemática unidimensional

Diversas situações envolvem movimentos lineares que são representados pelo modelo unidimensional de uma partícula. Estas situações ocorrem com frequência e nestes casos os vetores do movimento unidimensional têm apenas uma componente. Podemos utilizar um único eixo (O, x) para descrever este tipo de movimento. Na Figura 1.5 ilustramos um exemplo do movimento unidimensional.

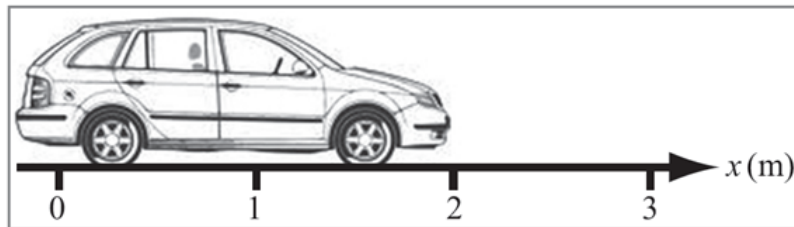


Figura 1.5: Exemplo de movimento unidimensional

Nesta seção, iremos omitir a notação vetorial ($\hat{x}$), já que o movimento é unidimensional (1D). Iremos trabalhar com a coordenada x que é medida em relação à origem do sistema de coordenadas, que pode ser escolhido arbitrariamente. A coordenada x pode ser positivo ou negativo (seu módulo, no entanto, é sempre positivo).

A grandeza posição é uma função do tempo e a notação que usaremos para indicar esta dependência é $x(t)$. Para a coordenada $x(t)$, por exemplo, em algum tempo específico t_1 sua notação é $x(t_1) = x_1$.

Quando um objeto está em **repouso** as equações associadas ao movimento são simples. Para este caso temos que:

$$x(t) = x_0; v_x(t) = 0; a_x(t) = 0 \quad (1.21)$$

Quando o objeto inicia um movimento unidimensional, podemos então descrever esta situação de duas possíveis formas:

- 1ª. Como um **movimento retilíneo uniforme** com velocidade constante, em que a aceleração é nula ($a_x = 0$);
- 2ª. Ou como um **movimento uniformemente acelerado**, em que sua aceleração é constante.

A seguir descrevemos as equações para esses dois tipos de movimento.

1.5.1 Movimento com velocidade constante

Para o estudo do movimento em modelos unidimensionais devemos relembrar que o deslocamento é a diferença entre a posição final e a posição inicial e, para este caso, temos $\Delta x = x_2 - x_1$, em que $x_1 = x(t_1)$ e $x_2 = x(t_2)$. Devemos também lembrar que a distância l é o valor absoluto de Δx , ou seja $|\Delta x|$. Além disso, o deslocamento é independente da localização da origem do sistema de coordenadas, ao contrário da posição.

Podemos obter a razão entre o deslocamento (Δx) e o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ (Δt) decorrido neste deslocamento, para o caso unidimensional. A equação a seguir é a representação matemática para esta situação, e a Figura 1.6 é sua representação gráfica.

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.22)$$

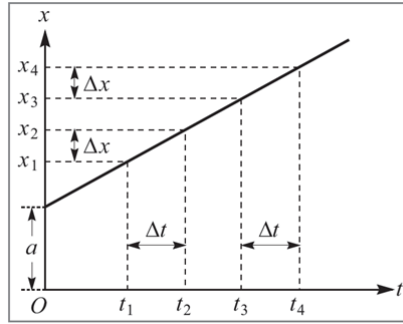


Figura 1.6: Movimento unidimensional com velocidade constante (Nussenzveig, 2008).

Se a velocidade de uma partícula é constante, sua velocidade instantânea em qualquer tempo, durante um intervalo, não sofre variação e, portanto, é a mesma que a sua velocidade média naquele intervalo, ou seja, $v_x = v_{xm}$.

Para o caso geral, em que $\Delta x = x_f - x_i$, e que $v_x = (x_f - x_i)/\Delta t$, podemos obter o valor do espaço percorrido pela área em cinza do gráfico apresentado na Figura 1.7 ($\Delta x = v_x \Delta t$). Assim, temos as seguintes equações para o movimento:

$$x_f = x_i + v_x t; \quad v_x(t) = v_0; \quad a_x(t) = 0. \quad (1.23)$$

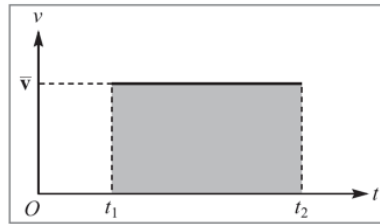


Figura 1.7: Espaço percorrido para movimento 1D com velocidade constante (Nussenzveig, 2008).

Exemplo

Suponha que uma nadadora termine os primeiros 50 m, dos 100 m em nado livre, em 38,2 s. Assim que ela chega ao lado oposto da piscina de 50 m de comprimento, ela volta e nada até o ponto de partida em 42,5 s.

Questão: Qual a velocidade média e a velocidade escalar média da nadadora para (a) a ida do início até o lado oposto da piscina? (b) no retorno? (c) e o percurso total?

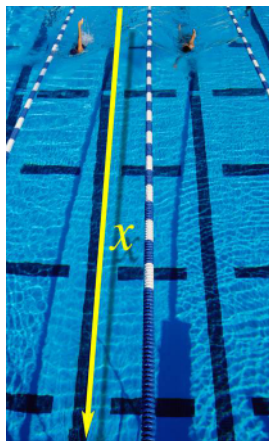


Figura 1.8: Natação.

Respostas:

(a) A nadadora começa em $x = 0$ e nada até $x = 50$ m. Ela leva 38,2 s.

Velocidade média:

$$v_1 = (x_2 - x_1)/\Delta t = (50\text{m} - 0\text{m})/38,2\text{s} = 50/38,2\text{m/s} = 1,31\text{m/s}$$

Velocidade escalar média: $|v_1| = 1,31$ m/s

(b) A nadadora começa em $x = 50$ m e nada até $x = 0$ m. Ela leva 42,5 s.

Velocidade média

$$v_2 = (x_2 - x_1)/\Delta t = (0\text{ m} - 50\text{ m}) / 42,5\text{ s} = -50/42,5\text{ m/s} = -1,18\text{ m/s}$$

Velocidade escalar média

$$|v_2| = 1,18\text{ m/s}$$

(c) Todo o percurso:

A nadadora começa em $x = 0$ m, nada até $x = 50$ m, e nada de volta até $x = 0$. Ela leva 38,2 s + 42,5 s = 80,7 s .

Velocidade escalar média: use a **distância** =100m e o tempo total:

$$|v| = \frac{|\Delta x_1| + |\Delta x_2|}{\Delta t} = \frac{100}{80,7} = 1,24\text{ m/s}$$

1.5.2 Movimento uniformemente acelerado

Nesta parte do texto iremos analisar um modelo simples de movimento unidimensional em que a aceleração é constante. Nesse caso, a aceleração média (a_m), em qualquer intervalo de tempo é numericamente igual à aceleração instantânea (a_x) em qualquer instante dentro do intervalo, e a velocidade muda na mesma taxa ao longo do movimento. Essa situação ocorre com frequência suficiente para que a identifiquemos como um modelo de análise: **uma partícula em aceleração constante**. Na discussão a seguir, as equações são a representação matemática para o movimento de uma partícula deste modelo:

$$a_x(t) = a_0 \quad (1.24)$$

Podemos neste caso então escrever que a aceleração é igual a seu valor médio no intervalo $[0, t]$:

$$a_x(t) = a_{xm} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t) - v_{0x}}{t - 0} = \frac{v_x(t) - v_{0x}}{t} \quad (1.25)$$

Deduzimos a expressão da velocidade instantânea em função da aceleração média e da velocidade inicial da partícula:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_{xm}t. \quad (1.26)$$

Como a velocidade instantânea é uma função linearmente crescente em relação ao tempo, podemos escrever seu valor médio no intervalo de tempo $[0, t]$ de forma simples, em que definimos o valor médio da velocidade pela equação:

$$v_{xm} = \frac{v_x(t) + v_{0x}}{2} \quad (1.27)$$

e também, escrevendo a definição da velocidade média no intervalo $[0, t]$ em função do deslocamento:

$$v_{xm} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t) - x_0}{t - 0} = \frac{x(t) - x_0}{t} \quad (1.28)$$

onde x_0 é a posição inicial da partícula. Obtemos a expressão da posição da partícula em função do tempo:

$$x(t) = x_0 + v_{xm}t \quad (1.29)$$

Empregando expressões estabelecidas acima, obtemos:

$$x(t) = \frac{v_x(t) + v_{0x}}{2}t + x_0 \quad (1.30)$$

e finalmente, após algumas manipulações algébricas:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_{0x}t^2 \quad (1.31)$$

Esta expressão representa o movimento uniformemente acelerado de uma partícula submetida a uma aceleração a_{0x} , e cujas velocidade e posição em $t = 0$ são v_{0x} e x_0 , respectivamente. Estes 2 últimos parâmetros são chamados de condições iniciais quando o movimento começa em $t = 0$.

Na Figura 1.9, apresentamos os gráficos de posição, velocidade e aceleração em função do tempo para uma partícula submetida a uma aceleração constante. Observamos, conforme equação obtida

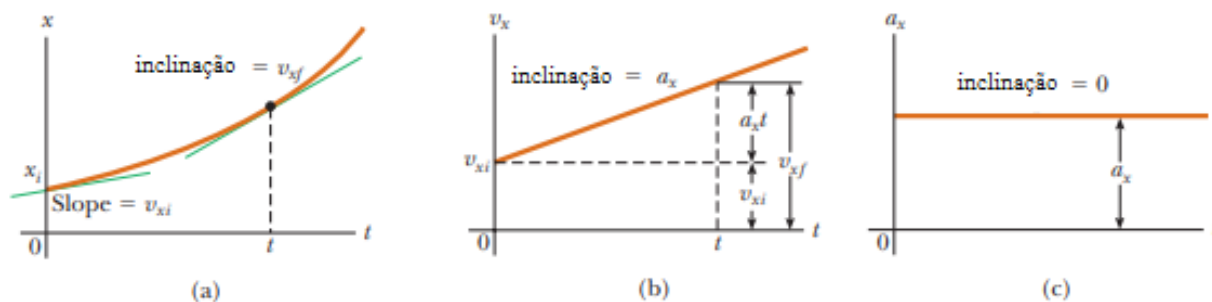


Figura 1.9: Uma partícula sob aceleração constante se movendo ao longo do eixo x : (a) o gráfico posição *versus* tempo, (b) o gráfico velocidade *versus* tempo, e (c) o gráfico de aceleração *versus* tempo.

anteriormente, que a posição em função do tempo descreve uma parábola, a velocidade em função do tempo é representada por uma linha reta.

Exemplo

Considere que o gráfico abaixo são medidas da aceleração realizadas num experimento durante a decolagem de um avião. O resultado obtido foi que a aceleração constante é uma boa aproximação (Bauer et al., 2012).

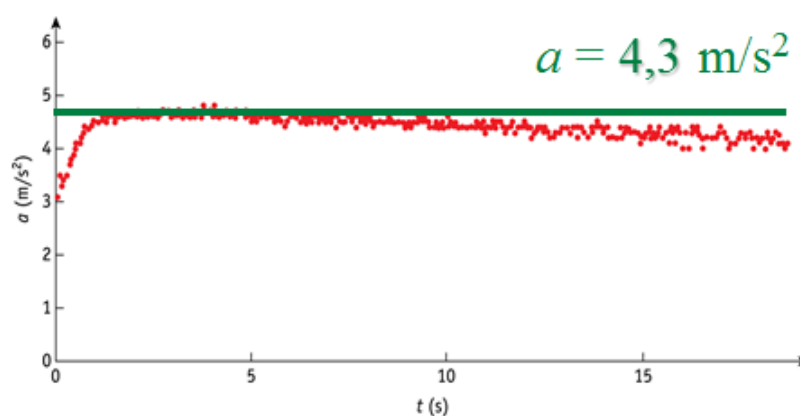


Figura 1.10: Dados obtidos de uma decolagem de avião (Bauer et al., 2012).

Questão:

- Presumindo uma aceleração constante de $a = 4,3 \text{ m/s}^2$, começando do repouso, qual é a velocidade de decolagem da aeronave alcançada depois dos 18 s?
- Que distância o avião percorreu até a decolagem?

Respostas:

Resposta (a): A aeronave acelera de um ponto de partida parado: velocidade inicial é igual a 0

$$a_x = 4,3 \text{ m/s}^2$$

$$v_{0x} = 0$$

$$t_1 = 18 \text{ s}$$

$$v(t_1) = v_{0x} + a_x t_1 = 0 + (4,3 \text{ m/s}^2)(18 \text{ s}) = 77,4 \text{ m/s}$$

Resposta (b): $a_x = 4,3 \text{ m/s}^2$

$$v_{0x} = 0; x_0 = 0$$

$$t_1 = 18 \text{ s}$$

$$\begin{aligned} x(t_1) &= x_0 + v_{0x} t_1 + \frac{1}{2} a_x t_1^2 \\ \frac{1}{2} (4,3 \text{ m/s}^2) (18 \text{ s})^2 &= 697 \text{ m} \end{aligned} \tag{1.32}$$

1.5.3 Lançamento vertical

Quando um objeto relativamente denso é abandonado (velocidade inicial nula) ou lançado (velocidade inicial diferente de zero) próximo à superfície terrestre, de uma altura, e se desprezando a resistência do ar, então, este corpo/objeto experimenta a chamada aceleração da gravidade - denominada g , cujo valor está em torno de $9,8 \text{ m/s}^2$ na vizinhança da superfície terrestre, a depender da região do globo.

Queremos com o conhecimento adquirido até agora na disciplina, estudar o movimento de uma partícula lançada verticalmente na vizinhança da superfície terrestre. Para isso, iremos num primeiro tempo definir as convenções que permitirão escrever as equações associada ao fenômeno. A forma mais simples de definir as convenções (notações) é desenhando um diagrama, como o da Figura 1.11 a seguir. É importante salientar que as convenções escolhidas são arbitrárias e depende eventualmente da conveniência da pessoa que vai resolver o problema posto. Nesta figura, estabelecemos um

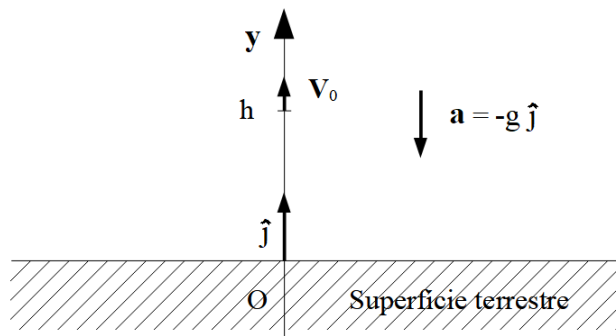


Figura 1.11: Convenções adotadas para queda livre

eixo orientado para cima, chamado **eixo y** , cuja origem esta no nível da superfície terrestre. A única aceleração ao qual é submetida a partícula, depois do seu lançamento, é a aceleração da gravidade que aponta para a superfície terrestre. Precisamos ainda identificar o problema posto que envolva uma aceleração constante. Estamos lidando com um movimento uniformemente acelerado e, portanto, podemos adotar $a = -g$.

Devemos definir as chamadas condições iniciais associadas ao movimento, aproveitando para definir a origem do tempo ($t = 0$) como sendo o momento do lançamento. As condições iniciais são então: a altura h da qual a partícula é lançada; a velocidade de lançamento.

Atenção: O sinal da componente da velocidade inicial v_{0y} é segundo orientação do eixo y , positivo se a partícula é lançada para cima e negativo no caso contrário.

O problema de lançamento vertical em que só tem presente a aceleração da gravidade é descrito pela equação do **movimento uniformemente acelerado**:

$$y(t) = h + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (1.33)$$

As equações da velocidade e da aceleração são deduzidas por derivação em relação ao tempo:

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = V_0 - g t \quad (1.34)$$

$$a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = -g \quad (1.35)$$

É interessante visualizar as grandezas em funções do tempo, associadas ao movimento, ou seja, a componente da posição e a velocidade. A função mais simples é a velocidade (equação de uma linha reta). Vamos então plotar esta função nas duas situações ($V_0 > 0$ e $V_0 < 0$). As duas figuras a seguir representam as grandezas em função do tempo (Figura 1.12). A componente do vetor

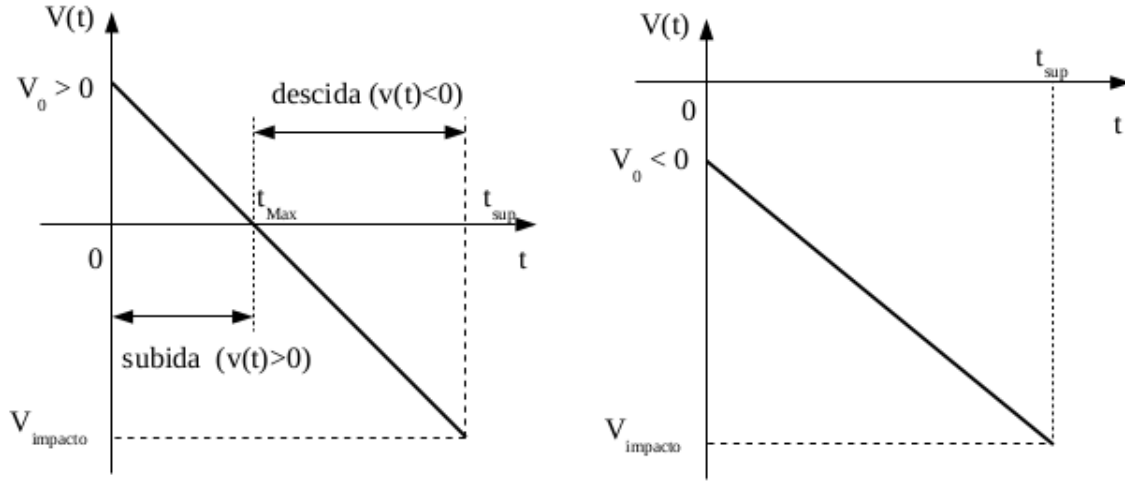


Figura 1.12: Componente da velocidade associada ao lançamento vertical de uma partícula.

posição da partícula é expressa por um polinômio do segundo grau, ou seja, a curva representada por esta equação é uma parábola cuja concavidade é voltada para baixo devido, pois o coeficiente do termo em t^2 é negativo. Lembramos que a derivada do vetor posição é a velocidade e, portanto, na situação considerada de cinemática 1D, a componente da velocidade determina a inclinação da curva representativa da componente da posição. Também, devido às convenções adotadas, sabemos que a função $y(t)$ é positiva (partícula acima da superfície terrestre) e se inicia em $t = 0$. Na figura 1.13 mostramos o comportamento de $y(t)$ para as seguintes situações ($V_0 > 0$ e $V_0 < 0$).

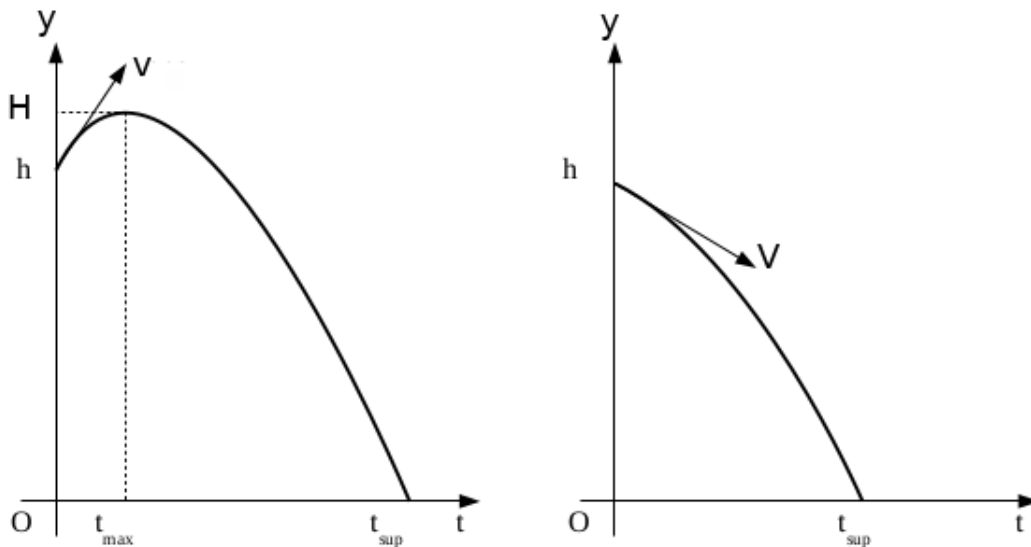


Figura 1.13: Componente da velocidade associada ao lançamento vertical de uma partícula nas duas situações ($V_0 > 0$ e $V_0 < 0$).

Exemplo

Uma bola é jogada verticalmente para cima com velocidade inicial de 27,0 m/s. (a) Desprezando a resistência do ar, por quanto tempo a bola fica no ar?

(b) Qual a altura máxima atingida pela bola?

(c) Na verdade, a bola bateu em um pássaro em sua trajetória ascendente quando tinha metade de sua velocidade inicial. Em que altura isto ocorreu?

As respostas do exemplo podem ser entendidas a partir deste diagrama:

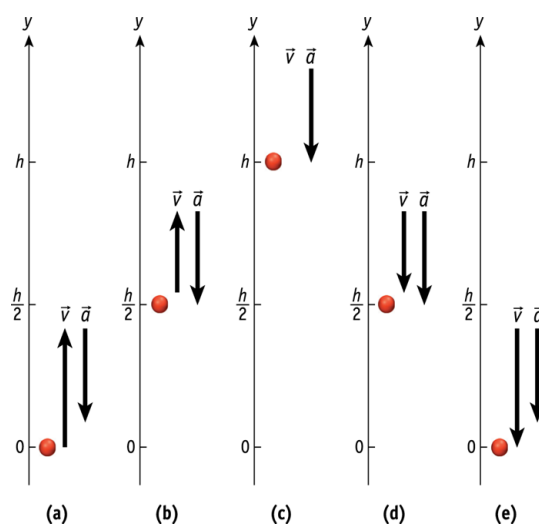


Figura 1.14: Corpo em queda livre.

Respostas:

(a) Ainda que inicialmente a bola esteja subindo, este é um caso de queda livre!

$$a = -g; y_0 = 0; v_0 = 27,0 \text{ m/s}$$

$$y(t_1) = y_0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$0 = 0 + v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \Rightarrow v_0 t_1 = \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$t_1 = \frac{2v_0}{g} \Rightarrow t_1 = \frac{227 \text{ m/s}}{9,81 \text{ m/s}^2} = 5,51 \text{ s}$$

(b) O que caracteriza o ponto de altura máxima?

$$v(t) = 0$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{v_0}{g}$$

$$\Rightarrow y(t_2) = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\Rightarrow y(t_2) = \frac{(27,0 \text{ m/s})^2}{2 \cdot (9,81 \text{ m/s}^2)} = 37,2 \text{ m}$$

(c) Já que queremos relacionar informações sobre velocidade e altura, usemos a última equação cinemática:

$$v(t_3) = \frac{v_0}{2g} \Rightarrow \frac{v_0^2}{4} - v_0^2 = -2gy(t_3)$$

$$\Rightarrow y(t_3) = \frac{3v_0^2}{8g} = \frac{3(27,0m/s^2)^2}{8(9,81m/s^2)} = 27,9m$$

1.5.4 Equações da cinemáticas derivadas do cálculo

Utilizando o que foi visto no módulo I aliado aos conceitos de cálculo diferencial e integral, podemos iniciar com a definição $v = dx/dt$. Na Figura 1.15 dividimos o intervalo de tempo de $[t_1, t_2]$ em intervalos: $\Delta t_1, \Delta t_2$ e $\Delta t_3, \dots$, e cada um destes intervalos contém um ponto amostral t'_1, t'_2, t'_3 , respectivamente. Construímos então retângulos amostrados:

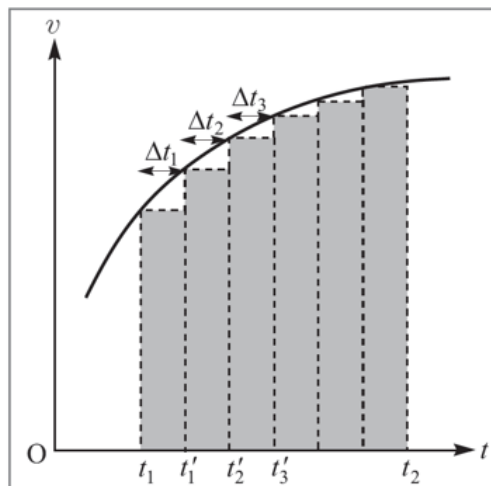


Figura 1.15: Velocidade em função do tempo (Nussenzveig, 2008).

Vemos que se a velocidade no intervalo Δt_1 fosse constante e igual ao valor $v(t_1)$, então a área deste primeiro retângulo que é $v(t'_1) \cdot \Delta t_1$ representaria o espaço percorrido no intervalo de tempo Δt_1 , e o mesmo aconteceria para os outros retângulos. Então a soma $v(t'_1) \cdot \Delta t_1, v(t'_2) \cdot \Delta t_2, v(t'_3) \cdot \Delta t_3$ a $v(t'_n) \cdot \Delta t_n$ seria o deslocamento da partícula de $[t_1, t_2]$. Ao mesmo tempo, vemos que esta soma de áreas dos n retângulos se aproxima um pouco da área sob a curva mostrada na Figura 1.15. Indicamos esta soma, para o caso de n divisões do intervalo $[t_{i-1}, t_n]$ como:

$$\sum_{i=1}^n v(t'_i) \Delta t_i \quad (1.36)$$

Essa soma é chamada Soma de Reimann, em homenagem ao grande matemático alemão Bernhard Reimann (1826-1866). Vimos que quanto maior for o número de divisões, e, portanto, quanto menor foi a largura de cada intervalo Δt_i da divisão, mais a soma da área dos retângulos se aproxima da área do gráfico da função. E no nosso caso, que tomamos a função $v = v(t)$, mais a soma destas

áreas se aproxima do deslocamento total t entre os instantes zero e t . Definimos então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(t'_i) \Delta t_i = A \quad (1.37)$$

onde A é a área sob a curva, ou seja, a área compreendida entre a curva e o eixo t , e pelo eixo v , e o segmento que une o ponto t ao valor $v(t)$. Ao mesmo tempo este limite é a definição da integral definida da função $v(t)$, entre os extremos de integração 0 e t , que indicamos por:

$$\int_0^t v \, dt \quad (1.38)$$

temos que:

$$\int v \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(t'_i) \Delta t_i = A, \quad (1.39)$$

onde A é a área sob a curva $v(t)$ e é, neste caso, o espaço percorrido pela partícula entre o instante 0 e o instante t .

Utilizando as definições do cálculo e integrando as equações:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int v \, dt = \int \frac{dx}{dt} \, dt = \int dx = x - x_0 \quad (1.40)$$

temos:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') \, dt' \quad (1.41)$$

As condições iniciais podem entrar em um problema tanto em forma de uma constante de integração, quanto como um extremo de integração, segundo se usa a integral indefinida ou a integral definida. Tanto no caso da velocidade, quanto no da aceleração, podemos trabalhar com a definição de integral. Para o movimento com a aceleração constante, usamos a fórmula da integral e deixamos $a = \text{constante}$:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t') \, dt' = v_0 + a \int_0^t dt' = v_0 + at \Rightarrow v(t) = v_0 + at \quad (1.42)$$

A velocidade é linear no tempo!

Integrando a velocidade para encontrar a posição, obtemos:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t') \, dt' = x_0 + \int_0^t (v_0 + at') \, dt' \quad (1.43)$$

$$= x_0 + v_0 \int_0^t dt' + a \int_0^t t' \, dt' \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (1.44)$$

Este resultado confirma a expressão já conhecida em que a posição é quadrática no tempo.

1.6 Movimento bidimensional e tridimensional

Em geral, os objetos se movimentam no espaço tridimensional (3D) ou, eventualmente, no plano. As equações da cinemática podem ser escritas em cada eixo de um sistema de coordenadas cartesianas. No caso de um movimento uniformemente acelerado 3D, por exemplo, podemos escrever:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_xt^2, \quad (1.45)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_yt^2, \quad (1.46)$$

e

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_zt^2. \quad (1.47)$$

Podemos escrever as equações (1.45), (1.46) e (1.47) numa única equação vetorial, como é apresentado a seguir:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2. \quad (1.48)$$

Já o vetor velocidade na forma compacta tem a seguinte forma matemática:

$$\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}_0. \quad (1.49)$$

Desenvolvendo a equação (1.49), temos:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_xt, \quad (1.50)$$

$$v_y(t) = v_{0y} + a_yt, \quad (1.51)$$

$$v_z(t) = v_{0z} + a_zt. \quad (1.52)$$

Como estamos estudando o movimento uniformemente acelerado, onde é caracterizado pela aceleração ser constante. Então temos um vetor aceleração constante. Isto significa que o módulo, direção e sentido do vetor aceleração são constantes em relação ao tempo.

As equações escritas de forma geral no caso 3D podem ser reduzidas à casos 2D retirando simplesmente uma das 3 componentes dos vetores posição, velocidade e aceleração. Na próxima seção, analisaremos um tipo de movimento em duas dimensões muito frequente no nosso cotidiano.

1.6.1 Movimento de um projétil

Antes de iniciarmos uma discussão detalhada sobre o movimento de um projétil provocado por algum mecanismo (canhão de guerra, pessoa chutando uma bola, etc.), apresentamos nas Figuras 1.16 e 1.17 exemplos desse tipo de movimento ocorrendo na natureza e em ambiente de trabalho.

Para analisarmos o problema de lançamento de um projétil em 2D, vamos estudar a projeção desse movimento nos eixos x e y do sistema de coordenadas cartesiano. Ao longo do eixo x temos um movimento uniforme ($v_x(t)$ constante em qualquer instante de tempo) e a equação para o cálculo de $x(t)$ é:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t. \quad (1.53)$$

Já no eixo y , temos um movimento retilíneo uniformemente acelerado (a_y é constante), onde o projétil está apenas sob influência da aceleração da gravidade (g). Logo a equação para o cálculo da coordenada y , em qualquer instante de tempo, é dado pela equação:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (1.54)$$



Figura 1.16: Trajetória parabólica das brasas emitidas por um vulcão em erupção (Serway, 2018).



Figura 1.17: Faíscas segue um caminho parabólico (Serway, 2018).

Derivando a equação (1.54) em relação ao tempo, obtém-se:

$$v_y(t) = v_{0y} - gt \quad (1.55)$$

e derivando a equação (1.55) em relação ao tempo, resulta em

$$a_y(t) = -g . \quad (1.56)$$

Atenção: a resistência do ar é desprezada nas equações apresentadas nesta seção para análise do problema de lançamento de projéteis. Ao fazer esta consideração, os cálculos são simplificados.

A Figura 1.18 mostra a trajetória parabólica do movimento de um projétil, que é lançado sobre uma superfície plana a partir origem em $t_i = 0$, com velocidade inicial $|\vec{v}_i| = v_i$ e ângulo de lançamento θ_i .

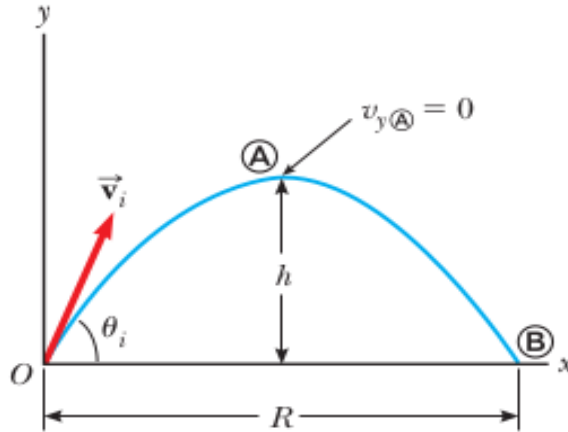


Figura 1.18: Trajetória parabólica (Serway, 2018).

Vamos determinar R , o **alcance horizontal do projétil** e a altura máxima h , em termos de v_i, θ_i e g . O primeiro passo é identificar logo as condições iniciais do problema, que são dadas a seguir:

$$x_i = 0, y_i = 0, v_{xi} = v_i \cos \theta_i \quad \text{e} \quad v_{yi} = v_i \sin \theta_i. \quad (1.57)$$

Atenção: para simplificar os cálculos, geralmente escolhemos colocar a origem do sistema de coordenadas no ponto de lançamento. Assim, as equações utilizadas para análise do movimento de um projétil são reduzidas.

Para determinar h usamos o fato que ponto máximo da trajetória $v_{yA} = 0$ e a partir da equação (1.55) determinamos o tempo t_A :

$$v_y = v_{yi} - gt \rightarrow 0 = v_i \sin \theta_i - gt_A \quad (1.58)$$

$$t_A = \frac{v_i \sin \theta_i}{g} \quad (1.59)$$

Substituindo a equação (1.59) em (1.54) e usando as condições iniciais, temos então:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow h = v_i(\sin \theta_i)t_A - \frac{1}{2}gt_A^2 \quad (1.60)$$

$$h = \frac{(v_i \sin \theta_i)^2}{2g} \quad (1.61)$$

Em seguida, para determinar R (alcance horizontal), precisamos saber o instante de tempo t_B . Podemos determinar t_B usando a equação (1.54). No ponto B, a coordenada y é zero. Assim temos:

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow 0 = v_i(\sin \theta_i)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.62)$$

Resolvendo a equação do segundo grau (1.62), temos duas raízes:

$$t = 0 \quad \text{e} \quad t = 2 \left(\frac{v_i \sin \theta_i}{g} \right) = t_B = 2t_A. \quad (1.63)$$

Uma vez que determinamos t_B , agora podemos encontrar R . Substituindo t_B em (1.53), resulta em:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \rightarrow R = v_i \cos \theta_i t_B \quad (1.64)$$

$$R = (v_i \cos \theta_i) \frac{2v_i \sin \theta_i}{g} = 2v_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i . \quad (1.65)$$

Usando a identidade trigonométrica $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, podemos rescrever R como:

$$R = \frac{v_i^2 \sin 2\theta_i}{g} . \quad (1.66)$$

Na Figura 1.19, ilustra-se várias trajetórias para um projétil com certa velocidade inicial, mas lançado com ângulos diferentes. Como pode ser visto, o alcance máximo ocorre para $\theta_i = 45^\circ$. Este resultado é previsto pela equação (1.66). Sabemos que o máximo valor que a função $\sin 2\theta_i$ pode assumir é 1. Isto ocorre para $2\theta_i = 90^\circ$, logo $\theta_i = 45^\circ$ fornece o máximo alcance R .

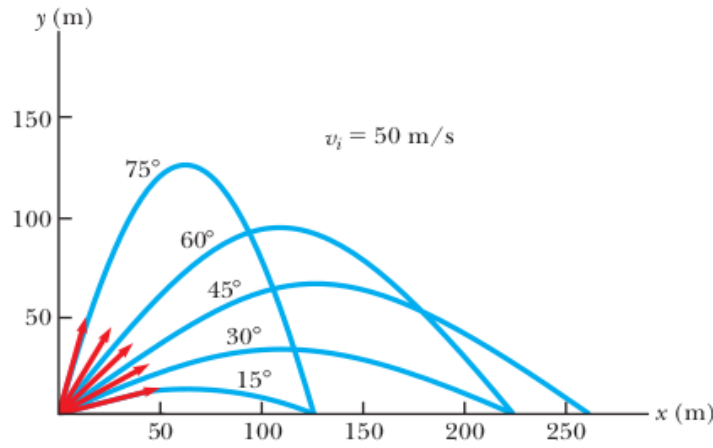


Figura 1.19: Alcance (Serway, 2018).

Ainda examinando a Figura 1.18, podemos determinar a equação da trajetória. Pra determinar esta equação, usamos as equações 1.53 e 1.54. A ideia é encontrar uma equação que só apareça as coordenadas x e y . O tempo é eliminado de alguma forma. Para este exemplo, o procedimento é explicitar o tempo na equação 1.53, ou seja:

$$x(t) = x_0 + v_{ix}t \rightarrow x = v_{ix}t \quad (1.67)$$

$$t = \frac{x}{v_{ix}} = \frac{x}{v_i \cos \theta_i} . \quad (1.68)$$

Usando a equação (1.68) em (1.54) e as condições iniciais $y_i = 0$ e v_{iy} , temos:

$$y = -\frac{g}{2(v_i \cos \theta_i)^2} x^2 + (tg \theta_i) x . \quad (1.69)$$

Uma vez que v_i, θ_i e g são constantes, a equação (1.69) possui a forma

$$y = -cx^2 + bx . \quad (1.70)$$

A expressão (1.70) é a equação de uma parábola. Assim, mostramos que a trajetória do projétil é parabólica, como pode ser visto na Figura (1.19).

Pergunta: com que velocidade o projétil atinge o solo? Basta fazer $t = t_B$ em (1.55):

$$v_y(t) = v_{iy} - gt \rightarrow v_y(t) = v_i \sin \theta_i - gt_B = -v_i \sin \theta_i \quad (1.71)$$

$$v_x = v_i \cos \theta_i. \quad (1.72)$$

Logo, ao atingir o solo, a velocidade do projétil só difere da velocidade inicial $\vec{v}_i$ pela inversão da componente vertical ($v_y \rightarrow -v_y$), e tem o mesmo módulo. Esta conclusão só vale se o ponto de lançamento e o ponto de chegada do projétil estiverem no mesmo nível, como exemplificado nas Figuras 1.18 e 1.19.

Na próxima seção, apresentamos mais um movimento presente em nosso dia a dia.

1.6.2 Movimento circular uniforme

Um movimento de grande importância na Física é o movimento circular uniforme (MCU). Neste movimento, a trajetória descrita pela partícula é um círculo e o módulo da velocidade, em qualquer instante de tempo, é constante. Contudo a direção do vetor velocidade ($\vec{v}$) varia em todos instantes de tempo. Antes de entrarmos na discussão do MCU, vamos citar alguns exemplos, pra você perceber a presença desse movimento em nosso cotidiano, os quais são: os ponteiros que marca as horas, minutos e segundos num relógio analógico (Figura 1.20(a)); toca-disco depois que atinge a velocidade de rotação final; um satélite de massa m movendo-se ao redor da Terra em uma órbita circular de raio r , com velocidade constante (Figuras 1.20(b)), etc.



Figura 1.20: MCU:(a) os ponteiros do relógio analógico e (b) um satélite de massa m movendo-se ao redor da Terra.

Para iniciarmos o nosso estudo sobre o movimento circular uniforme, consideremos a Figura 1.21. Apesar do módulo do vetor velocidade ser constante, ou seja, $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$, a sua direção muda a cada instante. Isto significa que existe um tipo de aceleração no movimento responsável pela mudança na direção do vetor velocidade. Esta aceleração é denominada de centrípeta (ou radial). Como o próprio nome sugere, a aceleração radial aponta para o centro da trajetória circular. Vamos, então determinar uma expressão para o cálculo dessa aceleração.

Atenção: o vetor velocidade é caracterizado por: módulo, direção e sentido. Se um dessas características variar, significa que existe alguma aceleração no movimento da partícula.

Na Figura 1.21, uma partícula movimenta-se num círculo de raio r . O movimento da partícula é analisado em dois pontos da trajetória: em P_1 , onde sua velocidade é $\vec{v}_1$, e em P_2 , onde sua

velocidade é $\vec{v}_2$. Os pontos estão localizados de forma simétrica em relação ao eixo y , com o raio de cada ponto fazendo um ângulo θ com relação a este eixo.

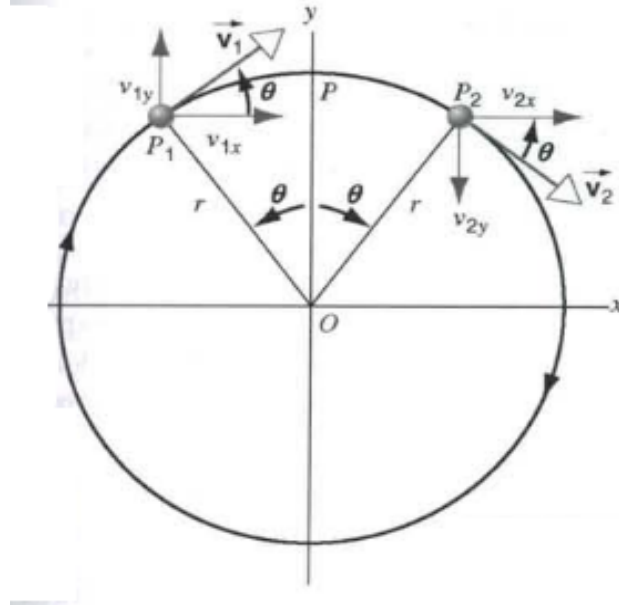


Figura 1.21: Partícula realizando movimento circular uniforme (Halliday,2003).

De acordo com a Figura 1.21 as componentes das velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são:

$$v_{1x} = v_1 \cos \theta \quad v_{1y} = v_1 \cos \theta \quad (1.73)$$

$$v_{2x} = v_2 \cos \theta \quad v_{2y} = v_2 \cos \theta , \quad (1.74)$$

Distância percorrida pela partícula do ponto P_1 até P_2 é o comprimento de arco ($2r\theta$) e daí temos que:

$$\Delta t = \frac{2r\theta}{v} . \quad (1.75)$$

Conhecendo o intervalo de tempo Δt , então é possível determinar as componentes da aceleração média. No eixo x temos:

$$a_{med,x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{\Delta t} = \frac{v \cos \theta - v \cos \theta}{\Delta t} = 0 , \quad (1.76)$$

e no eixo y:

$$\begin{aligned} a_{med,y} &= \frac{v_{2y} - v_{1y}}{\Delta t} = \frac{-v \sin \theta - v \sin \theta}{\Delta t} \\ &= \frac{-2v \sin \theta}{2r\theta/v} = - \left(\frac{v^2}{r} \right) \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right) \end{aligned} \quad (1.77)$$

A aceleração instantânea pode ser determinada a partir do resultado apresentado na equação (1.77), ou seja:

$$a_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{med,y} . \quad (1.78)$$

Fazer o limite de $\Delta t \rightarrow 0$ em $a_{med,y}$ (1.78), é equivalente a fazer o ângulo tender a zero, de tal forma que P_1 e P_2 tendam para P , o que fornece

$$a_y = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[- \left(\frac{v^2}{r} \right) \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right) \right] = - \left(\frac{v^2}{r} \right) \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right) . \quad (1.79)$$

Pelo limite trigonomérico fundamental (Iezzi et al., 1999):

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad (1.80)$$

Portanto, a componente y da aceleração instantânea em P é $a_y = -v^2/r$, onde o sinal negativo indica que a aceleração no ponto P aponta para o centro do círculo e suas unidades no SI são m/s^2 , como era para ser. Fazendo a análise dimensional temos:

$$[a_{radial}] = \frac{[v^2]}{[r]} = \frac{(L/T)^2}{L} = \frac{L}{T^2} . \quad (1.81)$$

No movimento circular uniforme o tempo que a partícula gasta para dar uma volta completa é chamado de período T e, como a velocidade em módulo é constante, podemos calcular o período pela expressão:

$$T = \frac{2\pi r}{v} , \quad (1.82)$$

e o inverso do período é chamado de frequência, ou seja,

$$f = \frac{1}{T} . \quad (1.83)$$

A unidade de frequência no SI é s^{-1} e é denominado de Hertz. No MCU, a frequência dá o número de rotações por unidade de tempo. Uma outra grandeza importante na movimento circular é a velocidade angular, que é definida como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f , \quad (1.84)$$

e é medida em radianos por segundo.

1.7 Exercícios resolvidos

Exemplo 1

Um ponto move-se de acordo com as seguintes equações de movimento:

$$x(t) = 5t^2 + t^3; \quad y(t) = 5t^2 - t^4; \quad z(t) = 25t - t^3$$

onde x, y e z são medidos em metros e t em segundos. Ache:

- O vetor velocidade em qualquer instante t
- O vetor aceleração em qualquer instante t
- Os vetores velocidade e aceleração quando t=1 s.

Solução:

- a) O vetor velocidade é dado por $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ e o vetor aceleração é $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Como o vetor posição é $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, então, derivando-se $\vec{r}(t)$ em relação ao tempo, temos que:

$$\vec{v}(t) = (10t + 3t^2)\vec{i} + (10t - 4t^3)\vec{j} + (25 - 3t^2)\vec{k}$$

- b) Derivando-se mais uma vez, encontramos a aceleração que é dada por:

$$\vec{a}(t) = (10 + 6t)\vec{i} + (10 - 12t^2)\vec{j} + (-6t)\vec{k}$$

c) $\vec{v}(1) = 13\vec{i} + 6\vec{j} + 22\vec{k}$ e $\vec{a}(1) = 16\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$

Exemplo 2

A aceleração de um corpo com movimento retilíneo é dado por $a(t) = 4 - t^2$, onde a é em $m.s^{-2}$ e t em s. Obter as expressões para o deslocamento como funções do tempo, sabendo-se que quando t= 3 s, v=2 m/s e x=9m.

Solução:

A partir da aceleração, usando-se integração, podemos achar a velocidade, ou seja:

$$v(t) - v(3) = \int_3^t (4 - (t')^2) dt' = 4t'|_3^t - \frac{1}{3}(t')^3|_3^t = (4t - 12) - \frac{1}{3}(t^3 - 27)$$

Então,

$$v(t) = v(3) - \frac{1}{3}t^3 + 4t - 12 + 9.$$

Para $v(3) = 2$, resulta em $v(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t - 1$

Para obter x(t) precisamos integrar a velocidade e, assim, temos que:

$$x(t) - x(3) = \int_3^t (-\frac{1}{3}t'^3 + 4t' - 1) dt' = -\frac{1}{12}(t')^4|_3^t + \frac{4}{2}(t')^2|_3^t - (t')|_3^t$$

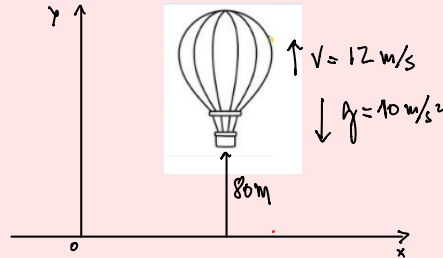
$$x(t) - x(3) = -\frac{1}{12}(t^3 - 81) + 2(t^2 - 9) - (t - 3)$$

Para $x(3) = 9$, temos que: $x(t) = -\frac{t^3}{12} + 2t^2 - t + \frac{117}{12}$

Exemplo 3

Um balão sobe com velocidade de 12 m/s e está a 80 m de altura em relação ao solo quando dele se larga um pacote. Quanto tempo decorrerá até que o pacote atinja o solo?

Solução:



Equação do pacote:

$$y_p(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Agora, substitutindo os valores de $y_0 = 80 \text{ m}$; $v_0 = 12 \text{ m/s}$ e $a = -g$ e considerando $|g| = 10 \text{ m/s}^2$, encontramos a equação horária do pacote que é dada por:

$$y_p(t) = 80 + 12t - 5t^2$$

Para achar o tempo que o pacote leva para atingir o solo, $y(t) = 0$, temos que:

$$0 = 80 + 12t - 5t^2$$

E resolvemos a equação $t^2 - 2,4t - 16 = 0$, cujas soluções são: $t_1 = 5,4 \text{ s}$ e $t_2 = 3,0 \text{ s}$. Logo, o tempo para o pacote atingir o solo é $5,4 \text{ s}$.

Exemplo 4

a) Com que velocidade deve ser uma bola lançada verticalmente, para cima, para alcançar uma altura de $1,5 \text{ m}$? b) Quanto tempo ela permanecerá no ar?

Solução:

A bola é lançada do solo, $y = 0$, e está sujeita a desaceleração da gravidade (sistema de coordenadas positivo para cima). Assim, temos que a equação horária da bola é dada por:

$$y_b(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Para achar v_0 , precisamos determinar o tempo de altura máxima. No topo, $v_f = 0$. Para isso, podemos derivar y_b em relação ao tempo e igualar a zero. Ou seja,

$$v_b(t) = v_0 - g t = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g}$$

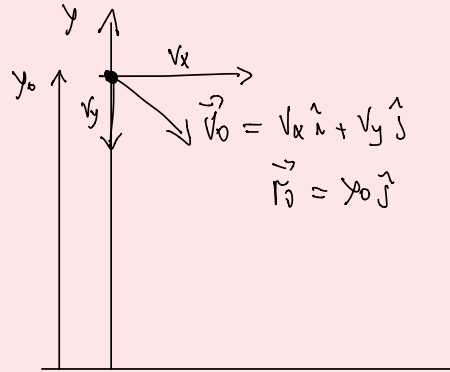
Agora, substituindo o tempo na equação de posição da bola, encontramos que:

$$v_0 = \sqrt{2y_b g} = \sqrt{2 \times 1,5 \times 10} = \sqrt{30} = 5,5 \text{ m/s}$$

Assim, portanto, o tempo para a bola atingir a altura de $1,5 \text{ m}$ é $t = v_0/g = 5,5/10 = 0,55 \text{ s}$

Exemplo 5

Um avião em mergulho solta uma bomba, sendo a posição inicial do avião dada por $\vec{r} = 1000\vec{j} \text{ (m)}$ e sua velocidade neste instante, $\vec{v}_0 = 100\vec{i} - 50\vec{j} \text{ (m/s)}$. Escreva os vetores posição e velocidade da bomba 2 segundos após o lançamento. Qual o alcance da mesma? Solução:



Equação horária do vetor posição:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Temos que $\vec{r}_0 = 1000\vec{j}$; $\vec{v}_0 = 100\vec{i} - 50\vec{j}$ e $\vec{a} = -g\vec{j}$.

Então, para $g = 10 \text{ m/s}^2$, temos que:

$$\vec{r}(t) = 100t\vec{i} + (1000 - 50t - 5t^2)\vec{j}$$

A equação horária do vetor velocidade é:

$$\vec{v}(t) = 100\vec{i} + (-50 - 10t)\vec{j}$$

Para $t = 2\text{s}$:

$$\vec{r}(2) = 200\vec{i} + (880)\vec{j}$$

$$\vec{v}(2) = 100\vec{i} + (-70)\vec{j}$$

O Alcance (componente horizontal) é dada por $R = 100t_q$, onde t_q é o tempo para atingir $y = 0$. Então, temos que $t^2 + 10t - 200 = 0$ e tempo de queda é $t_q = 10\text{s}$. Logo, o alcance é $R = 100 \times 10 = 1000\text{m}$.

1.8 Resumo

Quando uma partícula se move em uma ou mais dimensões, seu vetor **deslocamento** é dado por:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i .$$

A **velocidade média** da partícula é igual a razão entre o vetor deslocamento da partícula e o intervalo de tempo Δt no qual aquele deslocamento ocorreu.

$$\vec{v}_m \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

A **velocidade instantânea** da partícula é definida como o valor do limite da razão $\Delta \vec{r}/\Delta t$ com Δt tendendo a zero. Por definição, este limite é igual a derivada de $\vec{r}$ em relação a t , ou a mesma razão de mudança de direção da posição:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

A **aceleração média** de uma partícula é definida como a razão da mudança em sua velocidade $\Delta \vec{v}$ dividida pelo intervalo de tempo Δt em que aquela mudança de velocidade ocorreu:

$$\vec{a}_m \equiv \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

A **aceleração instantânea** de uma partícula é definida como o valor do limite da aceleração média com Δt aproximadamente zero:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

O **deslocamento** ao longo do **eixo x** no **movimento unidimensional** para uma partícula que se move partir da posição inicial x_i até a posição final x_f é $\Delta x = x_f - x_i$.

A **velocidade média** de uma partícula que se desloca de uma posição x_1 para uma posição x_2 durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ é dado por:

$$v_{x,m} \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

A **velocidade escalar média** da partícula é igual a razão da distância total dividido pelo intervalo de tempo durante aquela distância percorrida:

$$v_m \equiv \frac{\text{distância total}}{\Delta t}$$

A **velocidade instantânea** no caso unidimensional, é definida como o limite da razão $\Delta x / \Delta t$ com Δt aproximadamente zero:

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

A **aceleração média** $a_{x,m}$ de uma partícula fica definida como a razão da mudança em sua velocidade Δv_x dividida pelo intervalo de tempo Δt em que aquela mudança de velocidade ocorreu:

$$a_{x,m} \equiv \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{xf} - v_{xi}}{t_f - t_i}$$

A **aceleração instantânea** a_x , fica definida como o valor do limite da aceleração média com Δt aproximadamente zero:

$$a_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

Para uma partícula que se move **unidimensionalmente** com **aceleração constante** a_x , seu movimento é descrito pelas seguintes equações:

$$v_{xf}(t) = v_{xi} + a_x t$$

$$v_{x,m} = \frac{v_{xi} + v_{xf}}{2}$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2}(v_{xi} + v_{xf})t$$

$$x_f = x_i + v_{xi}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x(x_f - x_i)$$

O **movimento de um projétil** é um tipo de movimento **bidimensional** que ocorre sob aceleração constante, onde $a_x = 0$ e $a_y = -g$.

O **movimento circular uniforme** é um movimento bidimensional, onde a trajetória descrita pela partícula é uma circunferência de raio r e o módulo da velocidade instantânea é constante. Para tal partícula, o período do movimento é

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Referências Bibliográficas

- Bauer, W.; Westfall, G. D. e Dias, W. (2012) Física Para Universitários, Mecânica, Bookman, São Paulo.
- Iezzi, G.; Murakami, C. e Machado, N. J. (1999) Fundamentos de Matemática Elementar, Atual Editora, São Paulo.
- Ling, S. J.; Sanny, J. e Moebs, W. (2018) University Physics Volume 1, openstax, Hosuton, Texas.
- Nussenzweig, H. M. (2008) Curso de Física Básica 1, Mecânica, Editora Blucher, São Paulo.
- Resnick, S.; Halliday, D. e Krane, K. (2003) Física 1, Editora LTC, São Paulo.
- Serway, R. A. e Jewett, J. W. (2018) Física Para Cientistas E Engenheiros, Volume 1, Mecânica, Editora Cengage, São Paulo.