



**UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA**

**Instituto de Física**

**Departamento de Física da Terra e do Meio Ambiente**

**DFTMA/IF/UFBA**



**Física Geral Teórica I - FISD36**

NOTAS DE AULAS: MÓDULO I

ALANNA DUTRA, EDVALDO SUZARTHE,

REYNAM PESTANA E THIERRY LEMAIRE

19 DE SETEMBRO DE 2020

SALVADOR, BAHIA, BRASIL

---

Universidade Federal da Bahia Federal  
& Instituto de Física (IF/UFBA)

Departamento de Física da Terra e do Meio ambiente

R. Barão de Geremoaboá, Salvador, Bahia, Brasil

40.170-290

E-mails: [alannacd@ufba.br](mailto:alannacd@ufba.br), [esaraujo@ufba.br](mailto:esaraujo@ufba.br), [reynam@ufba.br](mailto:reynam@ufba.br), [thierry.lemaire@ufba.br](mailto:thierry.lemaire@ufba.br)



# Índice

Índice . . . . .	3
Índice de Tabelas . . . . .	5
Índice de Figuras . . . . .	7
<b>1</b> <b>Conceitos básicos</b> . . . . .	<b>9</b>
1.1   Grandezas físicas . . . . .	9
1.1.1   Padrões de Medidas . . . . .	10
1.2   Análise Dimensional . . . . .	12
1.3   Vetor . . . . .	14
1.4   Operações básica com vetores . . . . .	15
1.5   Noções de cálculo diferencial . . . . .	17
1.5.1   Propriedades da derivada . . . . .	18
1.6   Noções de integral . . . . .	18
1.6.1   Integral definida . . . . .	18
1.6.2   Integral indefinida . . . . .	20
1.6.3   Teorema fundamental do cálculo . . . . .	20
1.6.4   Cálculo de integrais . . . . .	20
1.7   Resumo . . . . .	21
<b>Referências Bibliográficas</b> . . . . .	<b>23</b>



# Índice de Tabelas

1.1	Unidades de base do Sistema Internacional de Medidas (S.I.) . . . . .	10
1.2	Prefixos SI . . . . .	10
1.3	Ordens de grandezas de durações medidas ou determinadas . . . . .	11
1.4	Ordens de comprimentos / distâncias medidas ou determinadas . . . . .	11
1.5	Ordens de massas medidas ou determinadas . . . . .	12



# Índice de Figuras

1.1	Vetor. . . . .	14
1.2	Vetor $\vec{A}$ (Serway,2018). . . . .	14
1.3	Componentes do Vetor $\vec{A}$ (Serway,2018) . . . . .	15
1.4	Vetores unitários (Serway,2018). . . . .	15
1.5	Produto de um vetor por um escalar (Resnick,2003). . . . .	16
1.6	Produto escalar (Resnick,2003). . . . .	16
1.7	Produto vetorial (Resnick, 2003). . . . .	16
1.8	Razão incremental de $y$ relativamente ao ponto $x_1$ (Serway,2018). . . . .	17
1.9	Cálculo da área abaixo de uma curva - função $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ . . . . .	19
1.10	Integral da função $f(x)$ sobre o intervalo $[a, b]$ . . . . .	19



# 1

## Conceitos básicos

### 1.1 Grandezas físicas

As leis da Física envolvem relações entre grandezas físicas tais como velocidade, massa, tempo, força, campo magnético, corrente elétrica, temperatura, energia, etc. Há necessidade de uma linguagem comum para a comunicação de resultados experimentais, formulação de leis ou modelos. É portanto, em particular, necessário definir padrões de medidas para divulgar/comparar/utilizar resultados de medidas ou de investigações teóricas.

Uma grandeza física é uma propriedade de um corpo, ou particularidade de um fenômeno, susceptível de ser medida, ou seja, à qual se pode atribuir um valor numérico. As grandezas podem ser vetoriais ou escalares, conforme será mostrado na parte teórica do curso. Além disso, as grandezas têm dimensões. Distância, por exemplo, têm dimensão de comprimento, podendo ser apresentada em várias unidades, tais como metros, centímetros, milímetros e etc.

Para resolver esta questão da padronização, foi criada no final do século XIX (em 1872) o Bureau Internacional de Pesos e Medidas localizado em Paris na França, onde foram armazenados padrões de referência (estáveis e invariantes com o tempo), chamados de padrões primários, para diversas grandezas físicas como, por exemplo, massa e comprimento. Para poder acessar aos padrões, de forma mais conveniente, os países criaram seus Institutos como por exemplo o Instituto Nacional de Metrologia (INMETRO) no Brasil, onde padrões chamados secundários são armazenados.

Podemos definir uma grande quantidade de grandezas físicas e associar uma unidade para a dimensão de cada uma destas, mas este procedimento não é o mais adequado, considerando em particular que muitas delas são interligadas (por exemplo, a velocidade depende de distância e tempo). Por isso foram definidas grandezas básicas com suas respectivas unidades. Entretanto, diversos países definiram diversos sistemas de medidas. Neste curso, adotaremos o chamado Sistema Internacional de Medidas (SI). Na tabela 1.1, apresentamos as principais grandezas Físicas.

Tabela 1.1: Unidades de base do Sistema Internacional de Medidas (S.I.)

Grandeza Física	Nome da unidade	Símbolo
Tempo	segundo	s
Comprimento	metro	m
Massa quilograma kg	quilograma	kg
Temperatura	Kelvin	K
Corrente elétrica	Ampère	A
Intensidade luminosa	candela	cd
Quantidade de matéria/substância	mol	mol

### 1.1.1 Padrões de Medidas

As unidades padrões não são sempre adequadas para descrever uma grandeza física. Por exemplo, o metro não é muito conveniente para descrever a espessura de um livro, mas sim o milímetro ou o centímetro. É muito comum utilizar prefixos. Descrevemos na Tabela 1.2 a seguir os mais usados.

Tabela 1.2: Prefixos SI

Prefixo	Símbolo	Fator
tera	T	$10^{12}$
giga	G	$10^9$
mega	M	$10^6$
quilo	k	$10^3$
hecto	h	$10^2$
deca	da	10
deci	d	$10^{-1}$
centi	c	$10^{-2}$
mili	m	$10^{-3}$
micro	$\mu$	$10^{-6}$
nano	n	$10^{-9}$
pico	p	$10^{-12}$
femto	f	$10^{-15}$

A seguir, descrevemos de forma muito resumida os padrões das 3 primeiras grandezas da Tabela 1.1.

#### Padrão de Tempo

O Tempo é a grandeza física diretamente associada ao correto sequenciamento, mediante ordem de ocorrência, dos eventos naturais; estabelecido segundo coincidências simultaneamente espaciais e temporais entre tais eventos e as indicações de um ou mais relógios adequadamente posicionados, sincronizados e atrelados de forma adequada à origem e aos eixos coordenados do referencial para o qual define-se o tempo. Sendo assim definido, precisamos empregar isso em um fenômeno que se repita no tempo, de forma periódica como um pêndulo em movimento, por exemplo.

Tabela 1.3: Ordens de grandezas de durações medidas ou determinadas

Tempos	Valores (s)
Tempo de vida do próton	$10^{40}$
Idade do universo	$5 \times 10^{17}$
Expectativa de vida humana no Brasil	$2 \times 10^9$
Intervalo de tempo entre 2 batidas normais do coração	$8 \times 10^{-1}$
Duração do pulso de luz mais curto produzido artificialmente	$10^{-15}$
Tempo de vida da partícula menos estável	$10^{40}$

Tabela 1.4: Ordens de comprimentos / distâncias medidas ou determinadas

Comprimentos / distância	Valores (m)
Raio do universo	$1.5 \times 10^{26}$
Distância Terra - Sol	$150 \times 10^9$
Objetos do cotidiano	$10^{-3}$ até $10^3$
Tamanho de um vírus	$10^{-7}$
Diâmetro do átomo	$10^{-10}$
Diâmetro do núcleo	$10^{-15}$

Até o início do século XX:  $1 \text{ s} = 1 / 24 \times 3600 = 1 / 86400$  de 1 dia solar médio com flutuações periódicas na definição da duração do dia da ordem de 3ms ao longo do ano. Atualmente uma fonte de um isótopo de césio permite definir com alta precisão o segundo:  $1 \text{ s} \equiv 9.192.631.770$  vibrações (para um dado comprimento de onda). A deriva sobre a determinação do tempo é de 1s a cada 10 milhões de anos!

### Padrão de Comprimento

Antes do século XIX, a definição do metro era de uma décima milionésima parte da distância pólo norte ao equador. O padrão se tornou uma barra fabricada com uma liga de platina-irídio com 2 traços próximos das extremidades.

Atualmente (desde de 1983), é utilizado o padrão de tempo e a velocidade da luz (independente do referencial inercial e da direção de propagação do feixe de luz, resultado experimental e também teórico da teoria da Relatividade Restrita) para definir o metro:  $1 \text{ m} =$  distância percorrida pela luz no vácuo durante o intervalo de tempo igual a  $1 / 299.792.458 \text{ s}$ .

### Padrão de Massa

Desde o final do século XIX até o ano de 2018, o padrão de massa foi o cilindro de platina-irídio de 1 kg.

Observação: os padrões secundários do quilograma são definidos com precisão de  $10^{-8} \text{ kg} = 10 \mu\text{g}$  ! O quilograma sendo uma unidade pouca conveniente para expressar a massa de átomos ou moléculas, é utilizado um padrão para a escala atômica a partir do átomo de carbono  $^{12}\text{C}$  (6 elétrons, 6 prótons e 6 nêutrons):  $M_{12\text{C}} = 12$  unidades de medida de massa atômica. Assim a unidade de massa atômica corresponde a  $1,6605 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

Tabela 1.5: Ordens de massas medidas ou determinadas

Massas	Valores (kg)
Massa estimada do universo	$10^{53}$
Massa da nossa galáxia	$2 \times 10^{43}$
Massa do Sol	$2 \times 10^{30}$
Massa da Terra	$6 \times 10^{24}$
Massa da Lua	$7 \times 10^{22}$
Carro	$10^3$
Vírus	$10^{-15}$
Massa do próton	$1,67 \times 10^{-27}$
Massa do elétron	$2 \times 10^{-30}$

Em 2018 o *bureau International de Pesos e Medidas* redefine de forma abstrata o quilograma, adotando um valor exato da constante de Planck. A ideia é utilizar a equivalência massa energia da teoria da Relatividade Restrita tomando como referência a energia de um fóton. Considerando que esta nova definição envolve tanto a Relatividade Restrita quanto a Mecânica Quântica, não daremos mais explicações sobre o novo padrão quilograma.

## 1.2 Análise Dimensional

Para comparar 2 grandezas físicas, elas precisam ter as mesmas dimensões. Por exemplo, podemos comparar a massa de um ônibus com a massa de um carro. Entretanto, não faz sentido (é até uma questão de bom senso!) comparar o comprimento de uma mesa com a massa de uma cadeira. Entretanto é comum ler afirmações em relatórios de experimentos didáticos de Física como a incerteza sobre a determinação do volume do objeto é maior que a incerteza associada à determinação do seu peso. Nesta afirmação, são 2 grandezas físicas de naturezas diferentes que são comparadas. As grandezas estudadas neste curso (geométricas, cinemáticas e dinâmicas), são expressas em função de três grandezas fundamentais: comprimento [L], massa [M] e tempo [T].

Ao combinar grandezas físicas num modelo, devemos ter alguns cuidados: em particular quando se escreva uma equação / relação / expressão analítica, que envolve diversas grandezas físicas, devemos ter o cuidado de verificar que se, por exemplo, aparecer uma soma de termos, estes possuem as mesmas dimensões, ou seja, são expressas com as mesmas unidades de medida. Para ilustrar este comentário, consideremos a expressão da posição  $x$  de uma partícula pontual, em função do tempo  $t$  (Eq. 1.1) e onde  $x_0$  é a posição  $V_0$  é a velocidade inicial (em  $t = 0$ ) da partícula e  $a$  é a aceleração ao qual ela é submetida:

$$x(t) = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1.1)$$

As dimensões associadas a cada uma dos termos aparecendo na expressão de  $x(t)$  são (com L: sendo a dimensão de comprimento, T de tempo):

$$[x(t)] = L ; [x_0] = L ; [V_0] = LT^{-1} ; [t] = T ; [a] = LT^{-2} ; [t^2] = T^2.$$

e portanto, as dimensões associadas a cada termo composto da soma são:

$$[V_0 t] = L \text{ e } [a t^2] = L$$

É altamente recomendável utilizar símbolos bem definidos quando se estabelece um modelo

teórico, e somente substituir as variáveis pelos seus valores numéricos após verificar a consistência dos termos envolvidos, e desta forma obter o resultado coerente com o esperado.

A análise dimensional pode ser utilizada para tentar, em situações relativamente simples, deduzir a expressão de uma grandeza física em função de outras. Para ilustrar esta ideia, iremos considerar um objeto (por exemplo, um satélite) seguindo uma trajetória circular em torno de um outro objeto (como a Terra). Neste caso, queremos estabelecer a expressão do módulo da força centrípeta que age sobre o objeto em rotação. Esta força, a priori, deve depender do raio  $r$  da trajetória, da massa  $m$  deste objeto e do módulo  $v$  de sua velocidade. Resumindo, podemos tentar escrever uma expressão simples e empírica desta força centrípeta (onde  $\alpha$  é um coeficiente sem dimensão):

$$F = \alpha m^a r^b v^c \quad (1.2)$$

em que os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  são determinados, empregando na análise dimensional. Escrevemos então as dimensões

$$[F] = [m]^a [r]^b [v]^c \quad (1.3)$$

ou seja (com M: dimensão de massa, L: dimensão de comprimento, T: dimensão de tempo):

$$MLT^{-2} = [M]^a [L]^b [LT^{-1}]^c = [M]^a [L]^{b+c} [T]^{-c} \quad (1.4)$$

Comparando os 2 lados da igualdade das dimensões, podemos deduzir que:  $a = 2$ ;  $b = -1$  e  $c = 2$

Deduzimos a expressão do módulo da força centrípeta:

$$F = \alpha \frac{mv^2}{r} \quad (1.5)$$

Esta expressão é de fato correta e o coeficiente  $\alpha$  é igual a 1. Este coeficiente pode ser deduzido experimentalmente ou, obviamente, de forma teórica, aplicando as leis da Mecânica Clássica.

## 1.3 Vetor

Um **vetor** é definido na matemática como um segmento de reta orientado que corresponde ao deslocamento do ponto A até o outro ponto B, conforme mostra a Figura 1.1, a seguir.

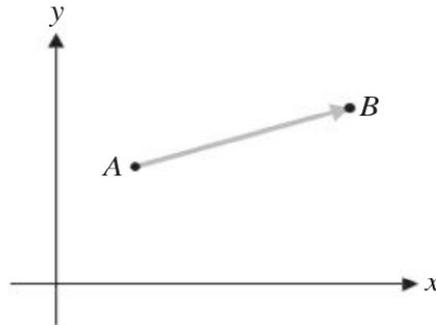


Figura 1.1: Vetor.

Neste material os vetores são representados por símbolos com uma seta,  $\vec{a}$ . Já a intensidade ou o comprimento de um vetor é indicado por  $|\vec{a}|$ . É importante mencionar que o módulo de um vetor (intensidade) não fornece nenhuma informação sobre direção e sentido do mesmo.

No sistema de coordenadas cartesianas em duas dimensões, um vetor  $\vec{A}$  pode ser escrito como:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}, \quad (1.6)$$

onde  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  são vetores unitários, associados aos eixos x e y, conforme mostra a Figura 1.2. Conhecendo-se as coordenadas  $A_x$  e  $A_y$ , podemos calcular o módulo de  $\vec{A}$  pela expressão:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (1.7)$$

e a direção é dado pelo ângulo  $\theta$  (ver Figura 1.3), que é calculado pela expressão:

$$\theta = \text{tg}^{-1} \left( \frac{A_y}{A_x} \right). \quad (1.8)$$

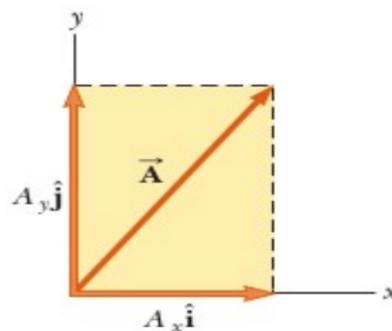


Figura 1.2: Vetor  $\vec{A}$  (Serway,2018).

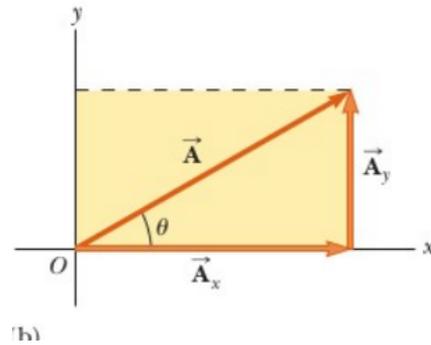


Figura 1.3: Componentes do Vetor  $\vec{A}$  (Serway,2018)

Na Figura 1.4, temos os vetores unitários  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  (também chamado de versores), associados aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

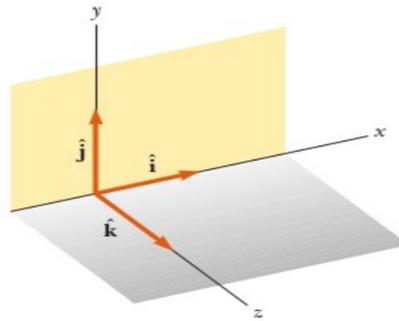


Figura 1.4: Vetores unitários (Serway,2018).

## 1.4 Operações básicas com vetores

A seguir apresentamos de forma objetiva, as principais operações vetoriais que são utilizadas neste curso, para tratar os fenômenos físicos e compreendê-los. A primeira operação que apresentamos com vetores é o produto de vetor por um escalar. Essa operação é definida como:

$$\vec{b} = c \vec{a} \quad (1.9)$$

$$b_x = c a_x, b_y = c a_y \quad (1.10)$$

$$b = |c| |\vec{a}| \quad (1.11)$$

Na Figura 1.5, temos a representação gráfica da operação apresentada na equação (1.9).

Outra operação muito utilizada em Física é produto escalar de dois vetores, que é definido como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi. \quad (1.12)$$

A equação (1.12) também pode ser escrita como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (1.13)$$

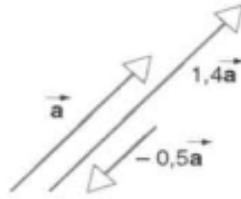


Figura 1.5: Produto de um vetor por um escalar (Resnick,2003).

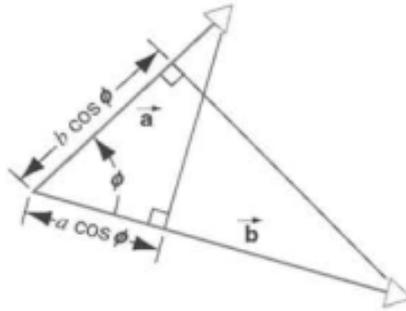


Figura 1.6: Produto escalar (Resnick,2003).

O módulo do vetor, também pode ser calculado usando o produto escalar, como pode ser visto na equação (1.13):

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = |\vec{a}|^2 \quad (1.14)$$

Outra operação muito utilizada, é o produto vetorial de dois vetores. Esta operação é definida como:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (1.15)$$

e o módulo de  $|\vec{c}|$  é dado por:

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \phi. \quad (1.16)$$

A direção do vetor  $\vec{c}$  é perpendicular ao plano formado pelos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  e seu sentido é determinado pela da mão direita (Ver Figura 1.7).

O produto vetorial também pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}. \quad (1.17)$$

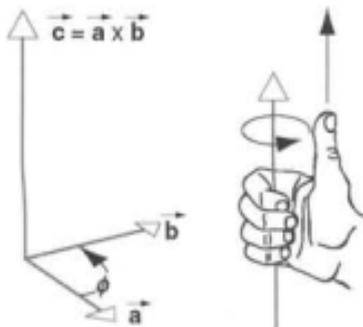


Figura 1.7: Produto vetorial (Resnick, 2003).

## 1.5 Noções de cálculo diferencial

Em várias ramificações da ciência é necessário, às vezes, utilizar as ferramentas básica do cálculo. O uso do cálculo é fundamental no tratamento de vários problemas da Física. Nesta parte do texto, apresentamos algumas propriedades básicas e regras fundamentais. Maiores informações sobre o assunto podem ser encontrados em Piskounov (1990), Iezzi et al. (1999) e Fleming e Gonçalves (2007).

Primeiro, consideremos que a função  $y(x)$  é contínua. A operação matemática chamada derivada de  $y$  com a relação a  $x$  é definida como:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \quad (1.18)$$

onde  $\Delta x = x_2 - x_1$  e  $\Delta y = y_2 - y_1$  (Figura 1.8). O termo  $\Delta y/\Delta x$  é denominado na matemática de razão incremental de  $y$  relativamente ao ponto  $x_1$ .

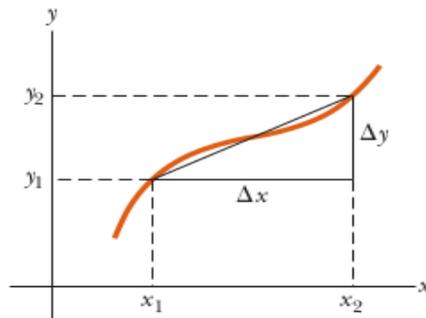


Figura 1.8: Razão incremental de  $y$  relativamente ao ponto  $x_1$  (Serway,2018).

**Atenção:**  $dy/dx$  não significa  $dy$  dividido por  $dx$ , mas denota a operação de derivada.

Nas aplicações envolvendo derivada da função  $y(x)$ , não haverá necessidade de usarmos sua definição apresentada na equação 1.18. Podemos usar regras práticas, que são proveniente dos resultados da aplicação da equação 1.18 nas funções de interesse. A seguir, apresentamos os resultados das derivadas das principais funções que aparecem nos problemas de Física.

Seja  $y(x)$  uma função do tipo  $y(x) = ax^n$ , onde  $a$  é uma constante e  $n$  é qualquer número inteiro positivo ou negativo (inteiro ou fração). A derivada de  $y(x)$  é:

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1} \quad (1.19)$$

Agora, consideremos  $y(x) = \cos x$ , o resultado da derivada é:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x, \quad (1.20)$$

se a função for  $y(x) = \sin x$ , tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x. \quad (1.21)$$

A seguir mostramos de forma, resumida as derivadas da funções mais usadas no nosso curso de Física.

Derivadas de funções mais usadas:

1.  $\frac{d(ax^n)}{dx} = nax^{n-1}$
2.  $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$
3.  $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$
4.  $\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$
5.  $\frac{d(\ln ax)}{dx} = \frac{1}{x}$

### 1.5.1 Propriedades da derivada

A seguir apresentamos alguns propriedades usadas na derivação de uma função.

1.  $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [g(x)h(x)] = g \frac{dh}{dx} + h \frac{dg}{dx}$  (Derivada do produto de duas funções)
2.  $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [g(x) + h(x)] = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}$  (Derivada da soma de duas funções)
3.  $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} [g(h(x))] = \frac{dg}{dh} \frac{dh}{dx}$  (Regra da cadeia do cálculo diferencial)
4.  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)$  (Segunda derivada)

## 1.6 Noções de integral

A integral de uma função foi introduzida no cálculo para determinar a área sob uma curva no plano cartesiano. Em vários problemas da física, usamos o cálculo integral, por exemplo, na determinação da posição em todos os instantes de um objeto, se for conhecida a sua velocidade instantânea em todos os instantes.

O processo de se calcular a integral de uma função é chamando de integração. A integral indefinida também é conhecida como antiderivativa ou primitiva.

### 1.6.1 Integral definida

Seja  $f(x)$  uma função contínua definida no intervalo  $[a, b]$ . A integral definida desta função é denotada como:

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1.22)$$

onde  $S$  é o valor da integral da função, no intervalo  $a$  e  $b$ .  $\int$  é o sinal da integral,  $f(x)$  é o integrando e os pontos  $a$  e  $b$  são os limites inferior e superior, respectivamente, de integração.

Na Figura (1.9), mostrada a seguir, a integral de  $f(x)$  é exatamente indicada por  $S$  que é limitada por  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$ .

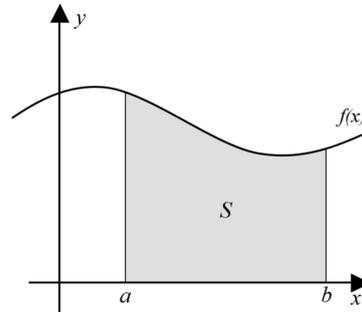


Figura 1.9: Cálculo da área abaixo de uma curva - função  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$

Portanto, a integral de uma função contínua de única variável, pode ser interpretada geometricamente como a área abaixo da curva limitada por  $f(x)$  e pelo eixo  $x$ , entre dois valores específicos de  $x$ , como pode ser visto na Figura 1.9.

A integral definida em linguagem matemática é dada por:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (1.23)$$

A integral de  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  (Figura 1.10) é igual ao limite do somatório de cada um dos valores que a função  $f(x)$  assume, de 0 a  $n$ , multiplicados por  $\Delta x$ . O que se espera é que quando  $n$  for muito grande o valor da soma acima se aproxime do valor da área abaixo da curva e, portanto, da integral de  $f(x)$  no intervalo. Ou seja, que o limite esteja definido. A definição de integral aqui apresentada é chamada de soma de Riemann, mas há outras formas (equivalentes).

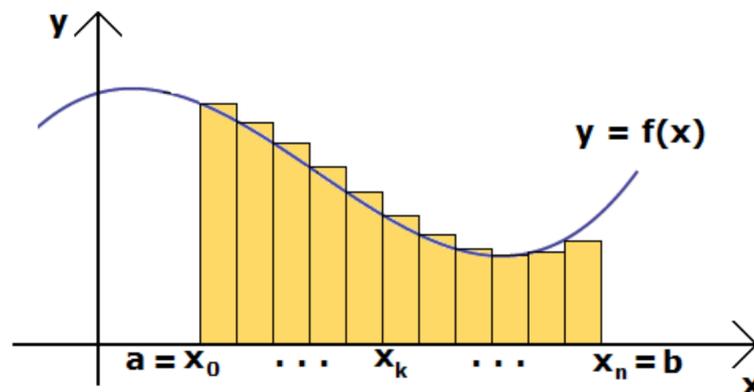


Figura 1.10: Integral da função  $f(x)$  sobre o intervalo  $[a, b]$

## 1.6.2 Integral indefinida

A integral indefinida de  $f(x)$  é a função (ou uma família de funções) definida por

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (1.24)$$

em que  $C$  é uma constante indeterminada e  $F(x)$  é uma antiderivada ou primitiva de  $f(x)$ , i.e.  $F'(x) = f(x)$ .

A notação  $\int f(x) dx$  é lida como: a integral de  $f(x)$  em relação a  $x$ .

## 1.6.3 Teorema fundamental do cálculo

O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece que se  $f(x)$  for contínua em  $[a, b]$ , temos que:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1.25)$$

onde,  $F(x)$  é a antiderivada de  $f(x)$

De forma geral, este teorema afirma que se  $f(x)$  é uma função contínua em um intervalo  $I$ , então, para qualquer  $a \in I$ , temos que:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1.26)$$

é uma antiderivada de  $f(x)$  definida para todo  $x \in I$ . Ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_a^x f(x) dx \right] = f(x) \quad (1.27)$$

É importante saber-se distinguir a integral definida da integral indefinida. Uma integral definida é um número, enquanto uma integral indefinida é uma função (ou uma família de funções).

## 1.6.4 Cálculo de integrais

Por exemplo, a derivada da função  $F(x) = x^2$  é  $f(x) = 2x$ . Assim, como  $F$  é antiderivada de  $f$ , temos (omitindo a constante  $C$ , por conviniência) que:

$$\int 2x dx = x^2 \quad (1.28)$$

Daí que também que:

$$2 \left( \int x dx \right) = x^2 \rightarrow \int x dx = \frac{x^2}{2} \quad (1.29)$$

Essa regra também vale para outras potências de  $x$ , como  $x^3, x^4$ , etc. Em geral, a função  $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$  tem como derivada  $f(x) = x^n$  ( $n$  um número real diferente de  $-1$ ). Logo, temos que a integral de qualquer potência de  $x$  (à exceção de  $1/x$ ):

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (1.30)$$

Para a função  $f(x) = x^2 + 2x + 4$ , cada membro da função pode ser integrada separadamente, ou seja:

$$\int x^2 dx + \int 2x dx + \int 4 dx \quad (1.31)$$

Assim,

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 4x \quad (1.32)$$

Para  $x = 0$ ,  $F(x) = 0$  e para  $x(3)$ ,  $F(x) = 30$ .

Do teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx = f(a) - f(b) \quad (1.33)$$

então,

$$\int_0^3 (x^2 + 2x + 4) dx = \left( \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 4x \right) \Big|_0^3 = 30 \quad (1.34)$$

Exemplos de integração:

$$\int_a^b 1 dx = x \Big|_a^b = (a - b) \quad (1.35)$$

$$\int_a^b x dx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_a^b = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \quad (1.36)$$

Por definição, a barra  $f(x) \Big|_a^b$  é utilizada com o significado da diferença  $f(b) - f(a)$ .

Integrais de funções mais usadas:

1.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
2.  $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$
3.  $\int e^x dx = e^x$
4.  $\int \sin x dx = -\cos x$
5.  $\int \cos x dx = \sin x$

## 1.7 Resumo

**A Medição na Física** é uma operação, ou conjunto de operações, destinadas a determinar o valor de uma grandeza física. O seu resultado, acompanhado da unidade conveniente, constitui a medida da grandeza. Qualquer medida pode ser definida pelos seguintes três critérios: tamanho (magnitude da medida), dimensão (unidade), e incerteza. Esses critérios permitem que uma comparação seja feita entre duas medidas reduzindo a incerteza. Mesmo em casos em que há uma clara similaridade (ou diferença) entre dois objetos, uma medida quantitativa precisa ajuda a tornar os dados mais confiáveis e replicáveis.

**Unidades do SI** é uma grandeza particular de uma dada espécie, escolhida segundo um determinado critério, e que serve de padrão de comparação com outras grandezas da mesma espécie. O Sistema Internacional de Unidades, abreviado pela sigla SI, é um conjunto de unidades de medidas correspondentes às grandezas físicas fundamentais e suas derivações. O Sistema Internacional de Unidades é completamente escrito sobre sete unidades de medida básicas, baseadas nas grandezas físicas fundamentais: comprimento, tempo, massa, corrente elétrica, temperatura termodinâmica, quantidade de matéria, e intensidade luminosa. As unidades do SI referidas a tais grandezas e seus símbolos são, respectivamente: metro (m), segundo (s), quilograma (kg), ampère (A), kelvin (K), mol (mol) e candela (cd).

**Mudança de Unidades** Tendo como base o que é a unidade de medida, sua conversão é transferir uma escala de uma unidade para outra, sem que haja nenhuma perda. A conversão de unidades se dá porque as medidas não são padronizadas. Há lugares no mundo, portanto, que usam uma outra forma para medir algo que, em qualquer outro local, seria de um jeito diferente. Por exemplo, aqui no Brasil medimos a distância em quilômetro, no EUA, no entanto, a medida é dada por milhas. É por isso que temos que estabelecer um método de conversão de unidades, para compreender do que se trata a informação. É, portanto, como se fosse uma tradução feita pela Sistema Internacional de Unidades.

**Comprimento** é definido como o comprimento da distância percorrida pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de  $1/299.792.458$  de um segundo. Os múltiplos e submúltiplos do metro são: quilômetro (km), hectômetro (hm), decâmetro (dam), decímetro (dm), centímetro (cm) e milímetro (mm).

**Tempo** é a grandeza física diretamente associada ao correto sequenciamento, mediante ordem de ocorrência, dos eventos naturais; estabelecido segundo coincidências simultaneamente espaciais e temporais entre tais eventos e as indicações de um ou mais relógios adequadamente posicionados, sincronizados e atrelados de forma adequada à origem e aos eixos coordenados do referencial para o qual define-se o tempo.

**Massa** é uma propriedade física dos corpos e partículas, por isso, seu conceito está sujeito à forma como é medida. Uma de suas definições é a inércia, que mede sua resistência à aceleração, que surge a partir da aplicação de uma força.

**Grandeza Escalar** é definida por ser composta por um único valor numérico, associado a uma unidade de medida, para caracterizar uma grandeza física. O termo é usado frequentemente em contraste às entidades que são “compostas” de muitos valores, como o vetor, a matriz, o tensor, a sequência, etc. Grandezas como comprimento, massa e tempo são três exemplos de grandezas escalares.

**Grandeza Vetorial** possui uma intensidade, uma direção e um sentido, podendo envolver uma ou mais componentes. Temos como exemplos o vetor posição em 3 dimensões, a velocidade, a aceleração, o campo magnético, a força, o campo elétrico. Em todos esses exemplos citados as componentes de um vetor dependem do sistema de coordenadas utilizado.

# Referências Bibliográficas

- Fleming, D. M. e Gonçalves, M. B. (2007) Cálculo A, Editora Pearson, São Paulo.
- Iezzi, G.; Murakami, C. e Machado, N. J. (1999) Fundamentos de Matemática Elementar, Atual Editora, São Paulo.
- Nussenzveig, H. M. (2008) Curso de Física Básica 1, Mecânica, Editora Blucher, São Paulo.
- Piskounov, N. (1990) Cálculo Diferencial e Integral, Editora Lopes da Silva, Porto.
- Resnick, S.; Halliday, D. e Krane, K. (2003) Física 1, Editora LTC, São Paulo.
- Serway, R. A. e Jewett, J. W. (2018) Física Para Cientistas E Engenheiros, Volume 1, Mecânica, Editora Cengage, São Paulo.