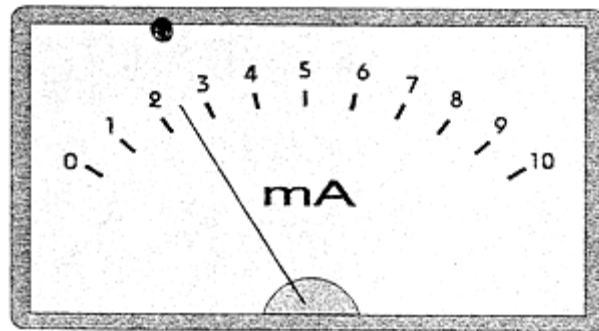


FÍSICA

TEXTOS DE LABORATÓRIO

TEORIA DOS ERROS



$$I \pm \Delta I ?$$

EDIÇÃO EXPERIMENTAL
1ª VERSÃO

INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA DO ESTADO SÓLIDO

TEORIA DOS ERROS

I - INTRODUÇÃO

Uma afirmação inicial que podemos fazer é que nada é exato em uma ciência experimental. O ato de se medir é um ato de se interferir de alguma maneira no fenômeno e esta interferência faz com que não possamos "ver" o fenômeno como ele realmente acontece. Um exemplo simples pode esclarecer melhor esta questão: Quando vamos medir a corrente que atravessa um circuito colocamos em serie com o mesmo um amperímetro, e como este medidor tem uma certa resistência interna R_a que, embora normalmente pequena comparada às outras resistências do circuito, modifica as características do mesmo. Vários outros exemplos poderiam ser citados, alguns não tão simples e fáceis de se ver como este, mas sempre há o aparecimento da interferência do medidor na medida.

No passado chegou-se a acreditar que toda a teoria da Física estava formulada e que era necessário apenas fazer aparelhos de medida cada vez mais precisos para se obter valores exatos que, obrigatoriamente, deveriam concordar com a formulação teórica.

Esta é uma afirmação errônea por duas razões:

- Todo o desenvolvimento posterior da Física mostra quanto os físicos da época estavam errados. Hoje sabemos que o entendimento completo de uma área do conhecimento é impossível.

- Com o surgimento da Física Moderna, principalmente da Física das partículas elementares, pode-se mostrar claramente que nunca se obteve nem nunca se obterá uma medida exata de um fenômeno qualquer.

Por estas razões a medida de uma grandeza tem obrigatoriamente uma incerteza que será chamada aqui de **faixa de desvio**, **erro** ou simplesmente desvio.

Uma medida de uma grandeza deve ser sempre expressa com este desvio. Usamos de dois modos para escrever o valor da medida.

1. Dizemos que o valor da medida é:

$$X \pm \Delta X$$

Neste caso, o desvio ΔX tem a mesma unidade da medida X e é chamado de **desvio absoluto**.

2. Dizemos que o valor da medida é:

$$X \text{ com } 5\% \text{ de desvio}$$

Neste caso temos um **desvio relativo** que dá a razão entre o desvio absoluto e o valor da medida e é consequentemente adimensional

II - DESVIO SOBRE UMA ÚNICA MEDIDA

II.1 - Desvio absoluto, relativo e absoluto avaliado.

Como já dissemos, todos os aparelhos de medida possuem limitações que acarretam desvios na medida efetuada. Estas limitações são inerentes aos aparelhos e resultaram da sua fabricação e de sua escala (faixa de medida). Algumas vezes o fabricante indica a faixa de desvio como sendo **metade da menor divisão do aparelho**. Deste modo podemos definir o desvio avaliado.

Desvio avaliado é uma medida da limitação do aparelho. Ele pode ser expresso de duas maneiras já indicadas anteriormente:

1. Quando o fabricante não indica a faixa de desvio do aparelho usamos para expressar o desvio a metade da menor divisão da escala do medidor. Um medidor (exclua os medidores multiescalas) dá sempre o mesmo desvio avaliado independente do valor da medida. O desvio absoluto avaliado deve ser sempre expresso na mesma unidade da grandeza da medida efetuada.

2. O fabricante indica a faixa de desvio do aparelho. Isto é feito sempre por porcentagem, ou seja, o fabricante dá a razão percentual entre o desvio absoluto e o valor da medida ($\Delta X/X$). Por isso, este tipo de desvio é chamado **Desvio Relativo**. Como o desvio relativo é a razão entre dois valores expressos na mesma unidade, então ele é **adimensional**. Exemplo: As indústrias de resistores costumam indicar o desvio no valor das resistências em porcentagem. O valor da resistência de um resistor é normalmente indicado por anéis coloridos. O último destes anéis indica a faixa de desvio: ouro 5%, prata 10%.

Vamos recapitular aqui o que vimos anteriormente:

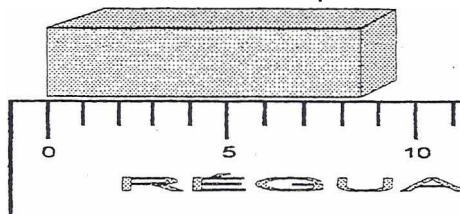
Desvio Absoluto - Tem sempre a mesma unidade que a grandeza.

Desvio Relativo - É a razão entre o desvio absoluto e o valor da medida e por isso é um número. Muitas vezes é usado em porcentagem.

Desvio Absoluto Avaliado - Tem a mesma unidade que a grandeza e vale metade da menor divisão da escala do medidor.

II.2 - Algarismos Significativos

Suponhamos que queremos medir o comprimento de uma barra e dispomos de uma régua graduada de 1 em 1 cm. Aproximamos a régua da barra (veja figura abaixo) e fazemos a medida. Como devemos expressar o resultado da medida?



A nossa régua nos dá precisamente o valor da medida em centímetros, mas a

casa dos milímetros pode ser apenas estimada, já que a régua não tem graduação em milímetros.

Da casa seguinte, a casa de décimos de milímetros, não temos a menor ideia e não faz nenhum sentido a avaliação dela.

O nosso resultado deve ser expresso com todos os algarismos precisos mais o algarismo avaliado. O comprimento da barra será expresso como 7,5 cm. Se a nossa régua fosse graduada em milímetros nossa medida deveria ser igual a 7,50 cm. Por quê? Seria certo expressar como 7,49 cm?

Os algarismos que compõem o resultado de uma medida são chamados algarismos significativos. Toda medida se expressa por n algarismos precisos mais um e somente um algarismo duvidoso.

Observação 1 - Os zeros a esquerda do primeiro algarismo não nulo não são significativos, pois o número de significativos não dependem da unidade em que expressamos o resultado da medida. Assim:

$$7,5 \text{ cm} = 0,075 \text{ m} = 0,000075 \text{ km} = 75 \times 10^3 \text{ um} :: 75 \times 10^6 \text{ nm} = 75 \times 10^9 \text{ pm}$$

Em todos os casos temos apenas 2 algarismos significativos sendo um preciso e outro duvidoso.

Observação2 - Os zeros a direita do último algarismo não nulo são significativos, pois indicam um valor medido. Assim,

0,0750 m tem três significativos

7,5000 cm tem cinco significativos

Você pode dizer qual a menor divisão dos medidores que fizeram estas medidas?

II.3 - Operação com algarismos significativos

II.3.1 Quando queremos fazer operações com algarismos significativos, como veremos adiante, muitas vezes é necessário tirar um ou vários algarismos significativos. Daremos abaixo essas regras chamadas de **Regras de Arredondamento**.

Quando o algarismo a ser retirado for:

- 1.- Menor que cinco, o anterior não muda
- 2.- Maior que cinco, adiciona-se uma unidade ao anterior
- 3.- O número cinco, temos dois casos:
 - a. quando o anterior for par, anterior não muda
 - b. quando o anterior for impar, adiciona-se uma unidade ao anterior.

II.3.2 Na adição e subtração o resultado deve ser expresso com número de casas decimais da parcela mais pobre. O arredondamento pode ser feito antes ou depois da operação, pois, como veremos abaixo, o erro na operação encontra-se sempre na casa duvidosa. Exemplo:

$$20,23 \text{ m} + 17,853 \text{ m} + 23,78 \text{ m} + 2,6 \text{ m} =$$

$$\begin{array}{r} 20,23 \\ 17,853 \\ 23,78 \\ \underline{2,6} \\ \mathbf{64,463} \end{array}$$

Arredondando

$$\mathbf{64,5 \text{ m}}$$

$$154,987 - 110,12 =$$

$$\begin{array}{r} 154,987 \\ \underline{110,12} \\ 44,867 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 154,99 \\ \underline{110,12} \\ 44,87 \end{array}$$

Arredondando

$$\mathbf{44,87}$$

II.3.3 Na multiplicação e na divisão o resultado deve ter o mesmo número de algarismos significativos que o fator mais pobre. Em alguns casos, a multiplicação pode ter $n+1$ significativos (onde n é o número de significativos do fator mais pobre) e, conseqüentemente, a divisão pode ter $(n-1)$ algarismos significativos.

Os casos de potenciação e radiciação podem ser extrapolados da multiplicação e da divisão.

A maneira que julgamos mais simples para encontrar o número de significativos de um produto ou quociente de grandezas medidas é a seguinte:

Sabendo-se o desvio relativo de um produto (ou quociente) podemos multiplicar 10 pelo valor encontrado para o produto (ou quociente) e teremos o desvio absoluto. O último algarismo significativo do produto ou quociente deve estar na mesma casa do desvio absoluto encontrado. Deve-se, então, usar as regras de arredondamento citadas anteriormente para expressar o valor do produto (ou quociente) corretamente.

II.4 - Majoração de desvios

Na seção anterior vimos que as medidas têm um certo número de algarismos precisos e um algarismo duvidoso. É sobre este algarismo duvidoso que incide o desvio. Por esta razão o desvio avaliado absoluto é definido como sendo metade da menor divisão da escala, ou seja, incide na casa duvidosa.

Isto faz com que o desvio absoluto só deva ter um único algarismo

significativo. Quando queremos operar com medidas, algumas questões devem ser vistas. Veja o exemplo:

- Ache o semiperímetro de uma mesa estreita e comprida cujas dimensões são: $(50,05 \pm 0,01)$ cm e $(200,0 \pm 0,4)$ cm

Devemos calcular o valor máximo e o valor mínimo da soma, o que significa que devemos considerar os desvios ou ambos positivos ou ambos negativos.

Operando temos: $(250,05 \pm 0,41)$ cm

Pelo que já vimos ao estudar Algarismos Significativos o resultado da soma deve ser:

250,0 cm

Mas, qual deve ser a faixa de desvio? Vimos anteriormente que um desvio absoluto só pode ter um algarismo significativo. Mas, se usamos as mesmas regras de arredondamento, iremos limitar a faixa de desvio e perder a certeza de que o nosso valor corresponde realmente a soma das duas medidas. Então, devemos **majorar o desvio**, ou seja, tomar um valor maior para conservar a nossa certeza.

Nosso resultado deve ser expresso como:

$250,0 \pm 0,5$ cm

Observe que o resultado é coerente; o desvio absoluto apresenta um único algarismo significativo que incide sobre o algarismo duvidoso da medida. Poderíamos ao invés de arredondar o valor da medida usando as regras de Algarismos Significativos, como fizemos, achar o desvio absoluto por majoração e então deduzir a posição do algarismo duvidoso do resultado da soma.

Sintetizando o processo descrito acima, temos:

Desvio calculado: 0,41 cm

Desvio majorado: 0,5 cm

Soma calculada: 250,05 cm

Arredondamento da soma: 250,0 cm

Resultado final: $(250,0 \pm 0,5)$ cm

II.5 - Precisão e Certeza

A precisão de medida é definida a partir do desvio relativo. Temos uma precisão maior quanto menor for o desvio relativo. É sempre desejável obtermos uma precisão maior possível. Isto nos leva a uma outra questão:

Suponha que fizemos uma medida com um determinado medidor e, achando que o desvio relativo da medida deu um valor muito grande, diminuimos arbitrariamente este desvio. O que deve acontecer? Se diminuimos arbitrariamente a faixa de desvio já não temos certeza que o valor da medida que fizemos se encontra dentro na faixa de valores pois esta faixa se tornou estreita.

Vemos então que precisão e certeza são duas coisas relacionadas e não podemos a nossa vontade modificar uma sem que a outra se modifique.

II.6 - Propagação de desvios

Todas as equações que descrevem fenômenos físicos são relações entre grandezas medidas. Estas grandezas têm desvios e, quando definimos uma função cujos parâmetros são valores medidos, devemos esperar que exista um desvio na determinação da função. Interessa-nos saber como os desvios sobre as variáveis se propagam na função:

Considere uma função $F(X,Y,Z)$. Os parâmetros X, Y, Z são valores medidos em laboratório com desvios absolutos $\Delta X, \Delta Y$ e ΔZ . Devemos esperar que a função F sofra um desvio ΔF . Este valor ΔF deve estar relacionado com os desvios dos parâmetros e com a própria função.

Vamos supor agora que estes desvios são pequenos em relação a medida. Podemos então fazer uma aproximação e substituir a diferencial da função e de seus parâmetros pelos desvios $\Delta F, \Delta X, \Delta Y$ e ΔZ . Ainda devemos fazer uma observação. Uma derivada dá a variação da função em relação a variável; no nosso caso a derivada dá a variação da função quando temos uma pequena incerteza na variável. Então ela está relacionada com o desvio e como não podemos subtrair desvios, devemos considerar estas derivadas em módulos.

Assim, obtemos finalmente

$$\Delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial X} \right| \Delta X + \left| \frac{\partial F}{\partial Y} \right| \Delta Y + \left| \frac{\partial F}{\partial Z} \right| \Delta Z$$

Esta relação dá desvio absoluto na determinação da função F em relação aos desvios absolutos dos parâmetros. Se quisermos obter o desvio relativo da função F basta dividir o desvio absoluto pela função

$$\frac{\Delta F}{F} = \left| \frac{\partial F}{\partial X} \right| \frac{\Delta X}{F} + \left| \frac{\partial F}{\partial Y} \right| \frac{\Delta Y}{F} + \left| \frac{\partial F}{\partial Z} \right| \frac{\Delta Z}{F}$$

Vejamos um exemplo simples: Qual o desvio relativo que se comete na determinação do $\cos(\theta)$ quando $\theta = 60^\circ$ com um desvio absoluto de $0,1^\circ$?

Devemos, antes de tudo, expressar θ em radianos, pois é a unidade de ângulo que tem sentido matemático.

$$\begin{array}{l} \pi \rightarrow 180^\circ \\ \Delta \theta \rightarrow 0,1^\circ \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Delta \theta = \frac{0,1\pi}{180}$$

Vamos resolver então no nosso exemplo:

$$\Delta(\cos \theta) = \left| \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \right| \Delta \theta$$

$$\Delta(\cos \theta) = |\sin \theta| \Delta \theta$$

Como queremos o desvio relativo

$$\frac{\Delta(\cos \theta)}{\cos \theta} = \left| \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \right| \Delta \theta = |\tan \theta| \Delta \theta = \frac{\sqrt{3} \times 0,1 \times \pi}{180}$$

Operando achamos:

$$\frac{\Delta(\cos \theta)}{\cos \theta} = 0,00302$$

Em percentagem

$$\frac{\Delta(\cos \theta)}{\cos \theta} \% = 0,302 \%$$

Vejamos agora o caso de funções simples, representado por quatro operações fundamentais.

$$F_1(x, y) = x + y$$

$$F_2(x, y) = x - y$$

$$F_3(x, y) = x y$$

$$F_4(x, y) = x / y$$

Usando a relação de propagação de desvios para a função $F_1(x, y)$:

$$\Delta F_1 = \left| \frac{\partial F_1}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial F_1}{\partial y} \right| \Delta y$$

Obtemos:

$$\Delta F_1 = \Delta x + \Delta y$$

Repetindo o mesmo procedimento para a função $F_2(x, y)$ encontramos o mesmo valor para o desvio, isto é:

$$\Delta F_2 = \Delta x + \Delta y .$$

Podemos estabelecer a seguinte regra prática:

O desvio absoluto da soma ou diferença de grandezas é igual a soma dos desvios absolutos destas grandezas

Consideremos agora as funções que envolvem multiplicação e divisão.

$$\Delta F_3 = \left| \frac{\partial F_3}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial F_3}{\partial y} \right| \Delta y$$

$$\Delta F_3 = y \Delta x + x \Delta y$$

Dividindo pelo valor da função:

$$\frac{\Delta F_3}{F_3} = \frac{y \Delta x}{x y} + \frac{x \Delta y}{x y} \rightarrow \frac{\Delta F_3}{F_3} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Repetindo o mesmo procedimento para a função $F_4(x, y)$, obtemos:

$$\frac{\Delta F_4}{F_4} = \frac{\left(\frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)} \Delta x + \frac{\left(\frac{x}{y^2}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)} \Delta y \rightarrow \frac{\Delta F_4}{F_4} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

Podemos estabelecer a seguinte regra prática:

O desvio relativo do produto ou quociente de grandezas é igual a soma dos desvios relativos destas grandezas

II.7 Observação para o uso das regras práticas

As regras práticas estabelecidas na secção precedente podem ser usadas em muitos casos. Entretanto, devemos considerar alguns aspectos antes de aplicá-las. Vejamos um exemplo. Considere a função:

$$F(x) = \frac{x}{x+1}$$

Utilizando as regras práticas podemos obter diretamente o desvio relativo da função, ou seja:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta x}{x+1} = \frac{\Delta x + 2x\Delta x}{x(x+1)}$$

Vamos resolver agora a mesma questão aplicando a relação:

$$\Delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right| \Delta z$$

Note que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1(x+1) - x}{(x+1)^2}$$

$$\Delta F = \frac{\Delta x}{(x+1)^2}$$

O desvio relativo será então:

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta x}{(x+1)^2 \left(\frac{x}{x+1} \right)} = \frac{\Delta x}{x(x+1)}$$

Comparando agora os dois resultados

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta x}{x(x+1)} + \frac{2\Delta x}{(x+1)} \quad (1)$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \frac{\Delta x}{x(x+1)} \quad (2)$$

Vemos que o resultado obtido usando as regras práticas é maior.

Por que isto acontece?

A questão pode ser respondida se consideramos que o desvio Δx da variável x foi levado em conta mais de uma vez. Quando aplicamos as regras práticas calculamos o desvio do numerador da função (que é o desvio Δx da variável x). Desta maneira consideramos o desvio da variável x duas vezes, fazendo com que o erro ΔF , da função $F(x)$, ficasse muito grande.

Isto acontece sempre quando trabalhamos com uma função que é o quociente de duas funções de mesmas variáveis, ou seja, uma função que tem a forma:

$$F(x, y) = \frac{G(x, y)}{H(x, y)}$$

Nestes casos nós não podemos aplicar as regras práticas para determinar o erro da função pois, deste modo, estaremos considerando os erros das variáveis mais de uma vez. Quando trabalhamos com esse tipo de função devemos sempre usar a relação

$$\Delta F(x, y, z, \dots) = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right| \Delta z + \dots$$

II.8 Exercícios

01. Para determinar o perímetro e a área de uma mesa duas pessoas mediram as suas dimensões lineares. O comprimento da mesa foi medido com uma régua graduada em centímetros. A largura foi medida por uma régua com graduações em milímetros. Os resultados são dados abaixo:

Comprimento = 1,595 m

Largura = 0,5900 m

- a) Os resultados foram expressos corretamente? Justifique!
- b) Qual é o desvio absoluto?
 - i) na medida da largura?
 - ii) na medida do comprimento?
 - iii) na determinação do perímetro?
- c) Qual é o desvio relativo?
 - i) na medida da largura?
 - ii) na medida do comprimento?
 - iii) na determinação do perímetro
 - iv) na determinação da área?

02. O diâmetro de uma esfera pequena foi medido utilizando-se de um paquímetro graduado em décimos de milímetros. O resultado da medida foi $d = 2,00$ mm

- a) Qual é o desvio absoluto?

- i) na medida do diâmetro?
- ii) na determinação do diâmetro?
- iii) na determinação do raio?
- iv) na determinação do volume?

b) Qual é o desvio relativo?

- i) na medida do diâmetro?
- ii) na determinação do raio?
- iii) na determinação do área?
- iv) na determinação do volume?

03. Em um experimento para determinar o valor de g (aceleração da gravidade) com um pêndulo simples mediu-se T com um desvio relativo de 2% e o comprimento de pêndulo (ℓ) com 3%. O valor de g é dado pela relação:

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2}$$

Com que desvio relativo g pode ser determinado?

04. Em um circuito elementar composto de uma bateria, um resistor ôhmico R e um amperímetro, queremos determinar a diferença de potencial V fornecida pela fonte. A medida da corrente que atravessa o resistor foi feita por amperímetro graduado de 2 em 2 mA e vale 100 mA. O valor da resistência do resistor é fornecido pelo fabricante como sendo igual a 2,50 k Ω com um desvio relativo de 5%. A resistência interna do amperímetro é desprezível em relação a do resistor. Determine:

- a) a diferença do potencial V :
- b) o desvio absoluto cometido na determinação de V
- c) o desvio absoluto.

05. A força entre cargas fixas é dada pela relação:

$$F = K \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Sabendo-se que as duas cargas q_1 e q_2 são do mesmo valor, igual a $3 \times 10^{-10} C$, e foram determinadas com um desvio de 10%. A distância r entre elas foi medida achando-se um valor de $(1,00 \pm 0,05)$ m. A constante K é suposta precisa e igual a $9 \times 10^9 Nm^2/C^2$. Determine:

- a) o desvio relativo na determinação da força F .
- b) o desvio absoluto.

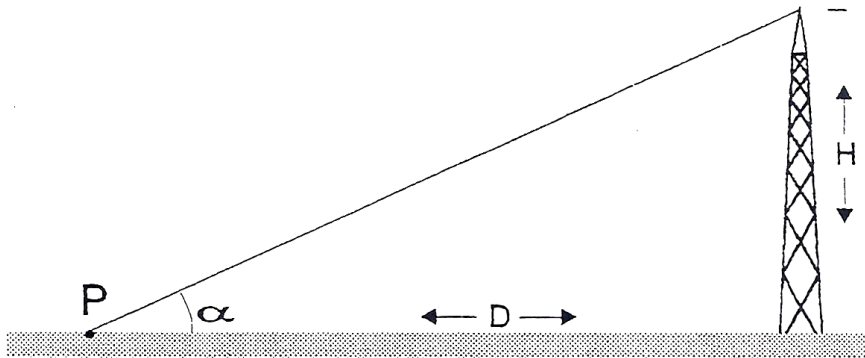
06. Considere uma barra metálica retilínea de forma de paralelepípedo. O seu comprimento C foi medido com uma fita métrica, graduada de um em um milímetro e vale ($C = 1,3325$ m). A sua largura L foi medida com um paquímetro e vale $L = (20,00 \pm 0,01)$ cm. A sua espessura foi medida com um micrômetro e vale $(20,00 \pm 0.02)$ mm

- a) Qual é o perímetro da seção reta da barra?
- b) O desvio absoluto na determinação do perímetro?
- c) O desvio relativo na determinação do perímetro?
- d) O volume da barra?
- e) O desvio absoluto na determinação do volume?
- f) O desvio relativo na determinação do volume?

Sabendo que a massa M da barra vale $M = (37,1 \pm 0,8)$ kg, determine:

- g) A massa específica do metal da barra (sistema MKS);
- h) O desvio absoluto na determinação da massa específica;
- i) O desvio relativo na determinação da massa específica.

07. Para determinar a altura H de uma torre vertical de televisão um observador se coloca no ponto P , a uma distância O da base da torre com um teodolito ele mede o ângulo α (mostrado na figura a seguir)



O teodolito é graduado de 0,02 em 0,02 radianos e o resultado da medida vale

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

A medida da distância D foi feita com uma fita hectométrica graduada de metro em metro e vale ($D = 94,3$ m).

- a) Determine a altura H da torre
- b) Mostre que o desvio absoluto cometido na determinação da altura H é dado por:

$$\Delta H = \tan \alpha \Delta D + \frac{D}{\cos^2 \alpha} \Delta \alpha$$

- c) Calcule o desvio H . Como deve ser expresso H levando em conta os algarismos significativos?
- d) Calcule o desvio relativo sobre H .
- e) Para uma distância D fixa, mostre que o desvio relativo sobre H é mínimo quando $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Este resultado é o esperado? Justifique

8. Queremos determinar a distância entre Salvador e Feira de Santana e estamos de posse dos dados seguintes

Salvador - Simões Filho	$(28,3 \pm 0,1)$ km
Simões Filho - Amélia Rodrigues	$(60,26 \pm 0,03)$ km
Amélia Rodrigues - Feira	(12 ± 1) km

Dos três dados acima:

- Qual é o dado que apresenta o menor desvio absoluto?
- Qual é o dado que apresenta o maior desvio relativo?
- Calcule a distância Salvador - Feira.
- Determine os desvios absoluto e relativo cometidos neste cálculo.
- Escreva a distância com os algarismos significativos certos.
- Assumindo que a largura média da estrada vale $(15,2 \pm 0,1)$ m, calcule a área da superfície da estrada.
- Determine os desvios relativo e absoluto cometidos na determinação desta área.
- Expresse a área, em metros quadrados, com os algarismos significativos certos.
- Como foi determinada a largura média da estrada?

09. Um dos vários métodos de medida da constante de permissividade elétrica ϵ de um meio consiste em usar um par de placas paralelas de área A submetidas a uma diferença de potencial e separadas pelo meio considerado. Um experimentador mediu a carga líquida em umas destas placas e encontrou $Q = 8,0 \times 10^{-12}$ C, com um erro relativo de 2%. As placas são iguais e quadradas com dimensões lineares $\ell_1 = \ell_2 = (1,00 \pm 0,05)$ cm e estão separadas por uma lâmina de acrílico de espessura $d = (2,02 \pm 0,02)$ cm. A diferença de potencial entre elas foi medida em um voltímetro graduado de 0,5 V em 0,5 V e marcou em sua escala $V = 8,0$ V. Calcule o valor de ϵ para o acrílico e avalie seu desvio relativo e absoluto sabendo que $\epsilon = \frac{Qd}{VA}$

10. A resistência R de uma associação em paralelo de dois resistores R_1 e R_2 é dada por

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

onde $R_1 = (5,4 \pm 0,1)\Omega$ e $R_2 = (1,40 \pm 0,05)\Omega$

Calcule o desvio cometido em R , segundo as regras práticas de propagação de erros no produto, soma e quociente.

Resolva o mesmo problema usando a equação

$$\Delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right| \Delta z$$

Compare os resultados.

III - TABELAS

As tabelas são de dois tipos: **Horizontal e Vertical**. Geralmente quando a experiência envolve muitas variáveis costuma-se construir uma tabela Vertical, isto é, costuma-se dispor os valores obtidos na vertical, exemplo

V (Volts)	I (Ampère)	T (°C)	C(μ)	R (Ω)	etc

Quando poucas variáveis são utilizadas e o número de medida é pequeno podem-se usar as tabelas Horizontais, por exemplo:

V (Volts)	
I (Ampères)	

É de fundamental importância que se especifique nas tabelas as unidades das grandezas envolvidas. Às vezes uma grandeza está expressa em uma unidade no sistema SI (Volt, por exemplo) e a outra grandeza está expressa em unidades de outro sistema, (comprimento em polegadas, por exemplo). É necessário, portanto fazer a conversão para um mesmo sistema para evitar erros. As tabelas devem aparecer geralmente com as grandezas expressas no mesmo sistema de unidades.

IV - GRÁFICOS

Na construção de gráficos devem ser levados em conta os seguintes itens:

1. Escala Vertical e Horizontal
2. Unidade das grandezas representadas em cada eixo
3. Quando possível, lançar em gráfico o ponto após cada medida. Isto possibilitará, depois de uma serie de medida, descobrir qual ponto contém um erro muito grande. Tal medida deve ser tomada novamente
4. Além disso, é fácil notar as regiões onde a curva apresenta picos e depressões. Então é necessário tomar muitos pontos nessas regiões para que se incorra num erro mínimo. Por exemplo, suponhamos que no eixo das abscissas

foram tomamos pontos de 2 em 2 (duas) unidades. Na região de pico ou depressão devemos tomar pontos de meia em meia unidade ou em intervalos menores.

5. Costuma-se, as vezes, colocar segmentos verticais e horizontais ou pequenos círculos em cada ponto com as dimensões do desvio cometido.

V - LINEARIZAÇÃO DE CURVAS

Os gráficos são usados em física para representar dados experimentais de um fenômeno físico. A partir deles nós podemos obter uma visão mais global do fenômeno estudado, e nos casos mais simples, encontrar uma solução matemática. Para que seja bem entendido um gráfico deve ser bem claro:

1) Os nomes ou iniciais convencionais das grandezas representadas nos respectivos eixos.

2) Especificar as unidades usadas (também nos eixos) e usar uma escala coerente com dados (notar que as escalas horizontal e vertical são independentes).

3) Com os dados representados devemos uni-los por uma curva suave, sem "cotovelos", pois a existência destas daria duas inclinações em um mesmo ponto do gráfico.

4) O gráfico de mais fácil identificação e maior precisão é o da reta. É de interesse então, sempre que possível, transformar os gráficos de curvas em gráficos lineares para mais facilmente analisá-los e traçá-los.

Três funções aparecem frequentemente em Física

- Função Linear: $y = Ax + B$ (1)

- Função Exponencial: $y = C e^{mx}$ (2)

- Função não linear do tipo: $y = D x^n$ (3)

onde A, B, C, D, m e n são constantes

V.1 - Função linear

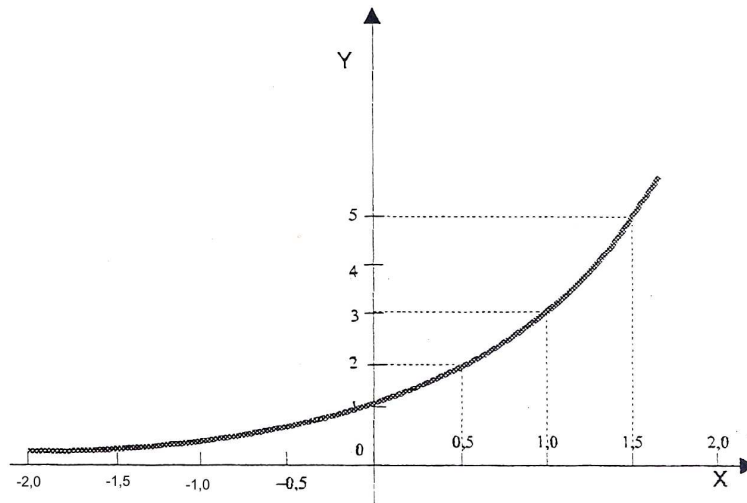
O gráfico desta função é uma linha reta. Logo, se os dados obtidos de um experimento quando colocados em papel milimetrado dão uma reta, o fenômeno estudado pode ser descrito por uma relação do tipo (1) onde

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad B = y(0),$$

ou seja, a ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo y .

V.2 - Função Exponencial

Traçando em um papel milímetro, o gráfico da função exponencial é do tipo



Agora, tomando o logaritmo decimal da expressão (2) teremos:

$$\log y = \log(C e^{mx}) = \log C + mx \log e$$

$$\log y = \log C + (m \log e)x$$

Fazendo

$$\log y = Y$$

$$\log C = c$$

$$m \log e = f$$

obtemos a expressão

$$Y = f x + c$$

que é uma relação linear.

Então, se nós temos uma tabela de dados experimentais onde o gráfico do logaritmo de uma das variáveis contra a outra variável dá uma reta, então o fenômeno físico atende a uma relação do tipo (2), onde

$$f = \frac{\log y_2 - \log y_1}{x_2 - x_1}$$

$$c = y(x = 0)$$

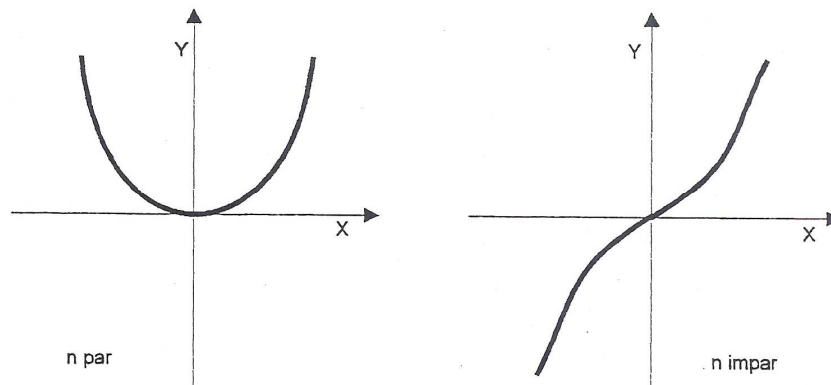
$$m = \frac{f}{\log e}$$

Uma maneira equivalente de tratar o problema é usar um papel semi-log. Escolhendo nas ordenadas uma escala logarítmica evitaremos o cálculo dos logaritmos decimais de todos os valores de y , o que se torna tarefa mais simples

Obs. Notar que em um papel log-log (base 10) cada unidade de variação na escala logarítmica corresponde a dez unidades de variações na escala linear.

V.3 - Função não Linear do Tipo $y = D x^n$

O gráfico desta função é da forma



Aplicando ao mesmo raciocínio anterior temos:

$$\log y = \log D + n \log x$$

Fazendo

$$\log y = Y \quad \log D = d \quad \text{e} \quad \log x = X$$

Obtemos

$$Y = n X + d$$

Por outro lado, se nós temos um conjunto de dados tal que o gráfico de seus logaritmos dá uma reta, então o fenômeno físico pode ser descrito por uma reta do tipo (3) onde:

$$D = y(x=1)$$

$$n = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

Para não ser necessário o cálculo dos logaritmos podemos fazer o gráfico em papel log-log.

V.4 - Interpolação e Extrapolação Gráfica

Frequentemente é necessário obter a partir de um gráfico de dados experimentais um ponto intermediário as medidas obtidas. A isto se chama Interpolação. Por outro lado, quando queremos obter pontos fora do nosso intervalo de medida devemos fazer uma extrapolação

Interpolar e Extrapolar subentendem obter uma estimativa da variável em um ponto não tabelado e isto então implica em se cometer erros. Quando estamos trabalhando com grandezas que variam suavemente a interpolação gráfica pode ser bastante aplicada e a faixa de erro não seria então muito superior à faixa de erros das próprias medidas experimentais. Mas quando nada sabemos do modo como variam as variáveis a interpolação se torna algo muito duvidoso e a faixa de erro se eleva bastante.

O caso da extrapolação já é mais difícil e a possibilidade de se incorrer em

grandes erros se torna muito maior. Podemos ver o exemplo da água: O volume das substâncias aumenta sempre com a temperatura. No caso da água, no entanto, entre 0°C e 4° C ela aumenta de volume. Se tivéssemos uma tabela de dados experimentais que não inclusive o intervalo 0° - 4° C , estimar um valor, neste intervalo, incorreríamos em erros muito grandes.

Os casos de interpolação e extrapolação gráfica devem ser usados principalmente quando temos conhecimento do comportamento físico das variáveis.

A interpolação pode ser linear ou não linear. Os chamados Métodos Numéricos procuram basicamente achar um polinômio que mais se aproxima da curva em questão e, assim, determinar os pontos a serem interpolados. Os erros introduzidos por estes métodos tornam-se pequenos quando encontramos um polinômio que "case" perfeitamente com a curva estudada