

**OSCILAÇÕES ELÉTRICAS,
ONDA ELETROMAGNÉTICA,
ÓPTICA FÍSICA E
FÍSICA MODERNA**

Newton B. de Oliveira

EDUFBA
Salvador, 2015

Documento preparado com o sistema L^AT_EX.

Esse livro é dedicado aos estudantes
que tiveram a paciência para copiar
essas notas de aulas.

Sumário

Apresentação	9
1 Oscilações eletromagnéticas	11
1.1 Os elementos de um circuito elétrico	11
1.1.1 Fonte de tensão	11
1.1.2 Fonte de corrente	11
1.1.3 Resistor	12
1.1.4 Capacitor	13
1.1.5 Indutor	14
1.2 O oscilador LC	14
1.2.1 Variações das energias	18
1.3 O oscilador <i>RLC</i>	19
1.3.1 Energia e coeficiente de qualidade	24
1.4 Oscilador <i>RLC</i> forçado	26
1.4.1 Tensões nos elementos do circuito	31
1.4.2 Potência média da fonte no regime permanente	33
1.4.3 A curva de ressonância e o coeficiente de qualidade	36
1.5 Exemplos	38
1.5.1 Oscilação amortecida	38
1.6 O transformador	41
2 A onda eletromagnética	47
2.1 Forma integral das equações de Maxwell	47
2.2 Operadores diferenciais	50
2.2.1 Operador gradiente	50
2.2.2 O operador divergente	52
2.2.3 O operador Rotacional	54
2.2.4 Operadores diferenciais compostos	55
2.2.5 O operador Nabla ou Del	56
2.3 Forma diferencial das equações de Maxwell	57
2.4 A equação diferencial de onda no vácuo	59
2.5 A solução onda plana no vácuo	61
2.5.1 Comprimento e onda e frequência	63
2.5.2 Relações entre os vetores E , B e K	65
2.6 A onda eletromagnética nos meios dielétricos	66

2.7	O espectro eletromagnético no vácuo	67
2.8	O vetor de Poynting	70
2.9	Momentum em uma onda eletromagnética	73
3	A natureza da luz	75
3.1	A luz visível	75
3.2	Noções sobre relatividade restrita	77
3.2.1	O efeito Doppler relativístico	83
4	Óptica física	85
4.1	Reflexão e refração de ondas planas harmônicas	85
4.1.1	O princípio de Huygens	86
4.1.2	Lei de Snell	87
4.1.3	O princípio de Fermat	90
4.2	Interferência	92
4.2.1	O experimento de Young	95
4.2.2	Interferência de múltiplas fendas	98
4.3	Difração por uma fenda	102
4.4	Difração por duas fendas idênticas	105
4.5	Difração de múltiplas fendas	106
4.6	Difração devida a orifícios	107
4.7	Interferência produzida por películas	108
5	Física Moderna	113
5.1	As fontes de luz	113
5.2	Radiação de um corpo aquecido	113
5.3	O efeito fotoelétrico	115
5.4	O efeito Compton	118
5.5	Espectro de raios	119
5.6	O princípio da correspondência	122
5.7	A dualidade onda-partícula	123
5.8	O princípio da incerteza de Heisenberg	125
5.9	A função de estado e a equação de Schrödinger	126
5.10	A equação de Schrödinger dependente do tempo	128

Apresentação

Esse texto versa sobre o conteúdo da disciplina Física Geral e Experimental IV-E e é baseado nas aulas que ministrei ao longo dos anos.

Trata-se de um texto introdutório onde são apresentados e sintetizados alguns conceitos básicos e necessários aos estudantes dos cursos de física, química e engenharias de modo geral. Os tópicos são apresentados de maneira direta e objetiva enfatizando situações e aplicabilidade ao mundo real.

Inicia com os conceitos básicos sobre as oscilações eletromagnéticas em circuitos simples formados por resistores capacitores e indutores tanto em regime transitório quanto em regime permanente. Esse é um passo importante para a compreensão do assunto seguinte, a onda eletromagnética que é apresentada de modo dedutivo e formal a partir das equações de Maxwell após uma breve introdução (ou revisão, dos operadores diferenciais). Demonstrem-se as propriedades do campo eletromagnético no vácuo e em dielétricos procurando-se esclarecer a questão da velocidade de propagação da onda no meio, na mudança de meios e suas consequências.

Introduz-se a noção do transporte de energia e da quantidade de movimento pela onda enfatizando a dependência com o quadrado da amplitude do campo. Em seguida apresentamos os pressupostos da teoria da relatividade restrita e suas principais consequências.

São apresentados as noções e os exemplos mais importantes dos fenômenos de interferência e difração ressaltando a região visível do espectro eletromagnético.

Tendo coberto a teoria clássica, apresentamos e analisamos os fatos experimentais principais que deram origem à física moderna, os novos conceitos de quantização da energia e o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio.

Por fim, discutimos a questão da dualidade onda-partícula, a medida física e o princípio da incerteza, o novo conceito de estado de um sistema, a equação de Schrödinger e a interpretação probabilística.

Todas as críticas e sugestões serão bem vindas e analisadas com a finalidade de corrigir erros e omissões para que as futuras versões possam vir melhoradas.

Salvador, julho de 2015

Newton Barros de Oliveira.

(newton@ufba.br)

Capítulo 1

Oscilações eletromagnéticas

Descreveremos nesse capítulo alguns circuitos elétricos simples que são capazes de manter o campo elétrico e o campo de indução magnética em oscilação, acompanhando as oscilações das tensões e das correntes elétricas.

1.1 Os elementos de um circuito elétrico

Um circuito elétrico é, usualmente, composto por alguns elementos básicos:

- Fontes de tensão e fontes de correntes.
- Resistores.
- Capacitores.
- Indutores.

1.1.1 Fonte de tensão

É um dipolo (dispositivo de dois terminais) que garante um valor de tensão entre seus terminais qualquer que seja o valor da corrente elétrica que o esteja atravessando. A tensão é a causa e a corrente é a consequência (depende do elemento que esteja conectado à fonte). A fonte de tensão não pode ser colocada em curto-circuito. Ver (Fig. 1.1). Observe a convenção de sinais positivos para a tensão e para a corrente que será utilizada para *todos os elementos de circuito*. A corrente elétrica é considerada positiva quando *entra* no terminal considerado como positivo. Observe também os quadrantes no gráfico (ou curva característica) correspondentes ao dipolo *ativo* (que fornece energia) e ao dipolo *passivo* (que absorve energia ou transforma-a em calor).

1.1.2 Fonte de corrente

É um dipolo (dispositivo de dois terminais) que garante um valor de corrente atravessando seus terminais qualquer que seja o valor da tensão elétrica que exista entre estes terminais. A tensão vai depender do dispositivo que esteja ligado à fonte. A corrente é a causa e a

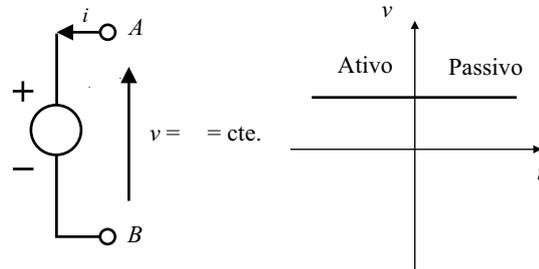


Figura 1.1: Fonte de tensão.

tensão é a consequência. A fonte de corrente não pode ser colocada em circuito aberto. Ver (Fig. 1.2).

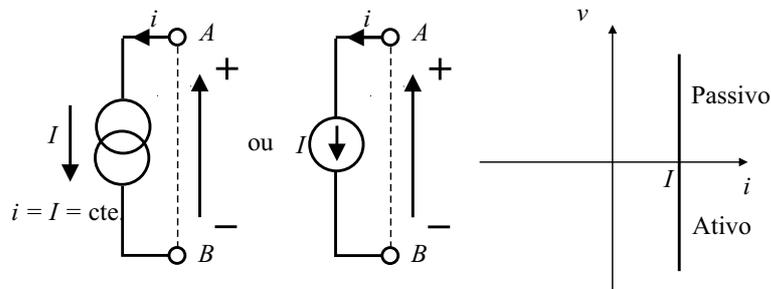


Figura 1.2: Fonte de corrente.

1.1.3 Resistor

É um dipolo sempre passivo que transforma energia elétrica em calor. É caracterizado pela relação linear entre a tensão e a corrente, $v_R = R i_R$ através da resistência R . Ver (Fig. 1.3).

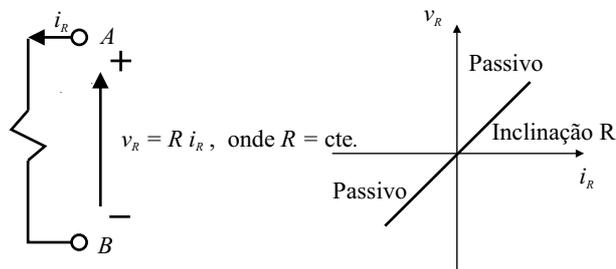


Figura 1.3: Resistor.

Em um resistor, a potência (taxa de variação da energia no tempo) dissipada na forma

de calor (efeito Joule) é dada por

$$P_R = \frac{dU_R}{dt} = \frac{v_R^2}{R} = R i_R^2. \quad (1.1)$$

A energia dissipada ao longo do tempo pode ser determinada integrando-se a potência

$$U_R = \int P_R dt = \int R i_R^2 dt$$

e para uma corrente constante fica

$$U_R = R i_R^2 \int dt = R i_R^2 t. \quad (1.2)$$

Ou seja, a energia dissipada cresce linearmente no tempo.

1.1.4 Capacitor

É um dipolo formado por dois condutores extensos (usualmente na forma de placas) que armazena cargas elétricas iguais e opostas quando submetido a uma diferença de potencial. A relação entre a quantidade de cargas armazenadas em um dos condutores e a diferença de potencial é uma constante, C , chamada de capacitância, tal que $q = C v_C$. Para relacionar a d.d.p. com a corrente i_C que entra no terminal positivo do capacitor basta notar que $dq = i_C dt$. Ver (Fig. 1.4).

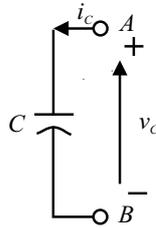


Figura 1.4: Capacitor.

$$v_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int dq = \frac{1}{C} \int i_C dt. \quad (1.3)$$

Suponha, por exemplo, que um capacitor, inicialmente descarregado, esteja sendo carregado por um agente externo, uma fonte de corrente constante no tempo ($i_c = cte$). Teremos

$$v_C = \frac{1}{C} \int cte dt = \frac{cte}{C} t,$$

ou seja, a tensão crescerá linearmente no tempo.

O capacitor também armazena energia associada à presença do campo elétrico entre os condutores ou placas produzido pelas cargas elétricas neles depositadas. É sabido que essa energia relaciona-se com as cargas ou com a d.d.p. pela relação

$$U_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{C v_C^2}{2}. \quad (1.4)$$

1.1.5 Indutor

É um dipolo formado por um condutor longo (usualmente na forma de uma bobina de fio com várias espiras) que conduz uma corrente elétrica, i_L , associada a uma tensão elétrica v_L . Ver (Fig. 1.5).

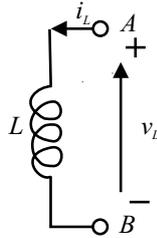


Figura 1.5: Indutor.

A relação entre essa tensão e a corrente, i_L , que entra no terminal positivo do indutor é dada por

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (1.5)$$

onde a constante L é denominada de indutância do indutor. Note que uma corrente constante no tempo está associada a uma tensão nula. Ou seja, é possível haver corrente com ausência de tensão. Por outro lado, uma tensão constante não nula e positiva está associada a uma corrente que cresce linearmente no tempo (uma vez que a derivada da função linear é uma constante).

O indutor também armazena energia associada à presença do campo de indução magnética, \mathbf{B} , no seu interior produzido pela corrente elétrica. É sabido que essa energia relaciona-se com a corrente por

$$U_B = \frac{L i_L^2}{2}. \quad (1.6)$$

1.2 O oscilador LC

Consideremos que um capacitor previamente carregado com uma tensão v_0 seja conectado a um indutor no instante $t = 0$. Antes da conexão não havia possibilidade de existência de uma corrente elétrica pois o circuito encontrava-se aberto. Contudo, após a conexão é possível o aparecimento de uma corrente. Suponhamos que essa corrente tenha o sentido mostrado na figura (Fig. 1.6) e associemos as tensões elétricas em cada elemento a esta corrente.

Temos

$$v_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int dq = \frac{1}{C} \int i_C dt = -\frac{1}{C} \int i dt$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

pois $i = -i_C$ e $i = i_L$.

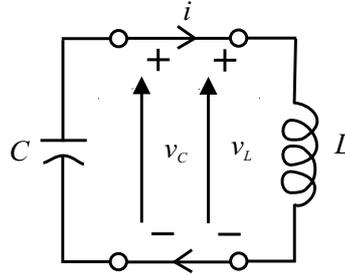


Figura 1.6: Circuito LC.

Como, após a conexão, $v_C = v_L$,

$$-\frac{1}{C} \int i dt = L \frac{di}{dt}. \quad (1.7)$$

Essa é uma equação integro diferencial. Usualmente, prefere-se apresentá-la na forma equivalente de equação diferencial. Para isso basta derivá-la com relação ao tempo.

$$-\frac{1}{C} i = L \frac{d^2 i}{dt^2}, \quad \therefore \frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{1}{LC} i. \quad (1.8)$$

Essa equação diz que a segunda derivada da corrente é proporcional ao negativo da própria corrente. A única função que tem essa propriedade é a função senoidal (ou cosenoidal) ver figura (Fig. 1.7). Portanto, a solução dessa equação deve ser da forma

$$i = i_0 \text{sen}(\omega_0 t + \phi). \quad (1.9)$$

Onde i_0 , ω_0 e ϕ são constantes cujos valores ainda precisam ser determinados.

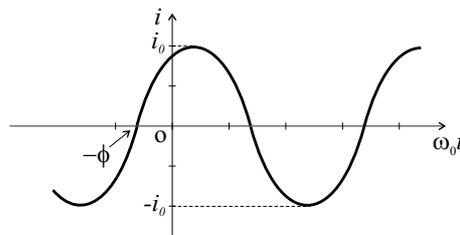


Figura 1.7: Corrente senoidal em função do tempo.

Compare com a equação do oscilador massa-mola que é do mesmo tipo

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x. \quad (1.10)$$

e tem a mesma forma de solução

$$x = x_0 \text{sen}(\omega_0 t + \phi). \quad (1.11)$$

As constantes na equação (1.9) recebem nomes especiais:

- i_0 é a amplitude da corrente, em A;
- $\omega_0 t + \phi$ é a fase, em rad;
- ϕ é a fase inicial (em $t = 0$), em rad;
- ω_0 é a frequência angular, em rad/s.

Verifiquemos qual é a condição necessária para que a equação (1.9) seja realmente solução da equação (1.8). Para isso, derivemos (1.9) duas vezes com relação ao tempo.

$$\frac{di}{dt} = \omega_0 i_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\omega_0^2 i_0 \sin(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 i.$$

Substituindo em (1.8) fica

$$\begin{aligned} -\omega_0^2 i &= -\frac{1}{LC} i \\ \therefore \omega_0 &= \pm \sqrt{\frac{1}{LC}}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Em outras palavras, a função senoidal é solução desde que a frequência angular tenha esse valor. Normalmente, sempre trabalhamos com a raiz positiva para que a fase cresça com o passar do tempo (o tempo é uma variável física sempre crescente). As outras duas constantes podem ser determinadas a partir das condições iniciais do circuito, como veremos posteriormente. O comportamento oscilatório da corrente está associado ao regime oscilatório de carga (com ambas polaridades) e descarga do capacitor (e do indutor), significando o armazenamento oscilante da energia.

Como a tensão no indutor é a mesma no capacitor,

$$v_C = v_L = L \frac{di}{dt} = \omega_0 L i_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1.13)$$

e

$$\cos(\omega_0 t + \phi) = \sin(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2}),$$

vemos que a tensão está defasada (adiantada) de $\pi/2$ rad com relação à corrente (Fig. 1.8).

Vejam agora como a aplicação das condições iniciais determinará os valores da amplitude e da fase inicial.

Antes da ligação, a corrente era nula assim como a energia armazenada no indutor, U_B . Imediatamente após a ligação ainda devemos ter essa mesma condição uma vez que a energia tem inércia. Portanto, não é possível haver uma descontinuidade na corrente. Então, em $t = 0$, $i = 0$. Aplicando essa condição na equação (1.9) teremos

$$0 = i_0 \sin(\omega_0 0 + \phi)$$

ou, como a amplitude não pode ser identicamente nula,

$$\sin(\phi) = 0, \quad \therefore \phi = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.14)$$

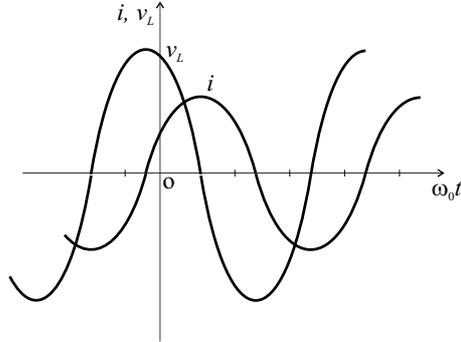


Figura 1.8: Tensão e corrente no circuito LC.

A segunda condição inicial é que o capacitor está carregado com uma tensão v_0 em $t = 0$. Aplicando essa condição na equação (1.13) e de acordo com (1.14) teremos

$$v_0 = \omega_0 L i_0 \cos(\omega_0 0 + k \pi)$$

logo,

$$i_0 = \frac{v_0}{\omega_0 L \cos(k \pi)} \tag{1.15}$$

$$\therefore i_0 = +\frac{v_0}{\omega_0 L}, \text{ para } |k| \text{ par}$$

e

$$\therefore i_0 = -\frac{v_0}{\omega_0 L}, \text{ para } |k| \text{ ímpar.}$$

Assim, substituindo (1.15) e (1.14) na equação (1.9), para qualquer valor de k teremos

$$i = \frac{v_0}{\omega_0 L} \text{sen}(\omega_0 t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \tag{1.16}$$

Essa função está representada, em função do tempo, na figura (Fig. 1.9) para $t \geq 0$.

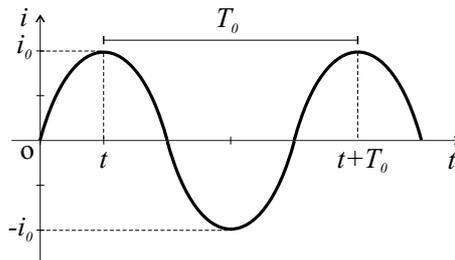


Figura 1.9: Corrente no circuito LC.

Nessa figura está mostrado o período temporal, T_0 , o intervalo de tempo necessário para que ocorra a primeira repetição da função, ou seja,

$$i(t + T_0) = i(t).$$

Portanto, da equação (1.16) fica

$$\begin{aligned}\text{sen}[\omega_0(t + T_0)] &= \text{sen}(\omega_0 t) \\ \therefore \omega_0(t + T_0) &= \omega_0 t + 2\pi\end{aligned}$$

ou

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (\text{rad/s}). \quad (1.17)$$

1.2.1 Variações das energias

No interior do capacitor existe campo elétrico e no interior do indutor existe campo de indução magnética, logo, existem energias associadas a esses campos nesses elementos de circuito. Das equações (1.4) e (1.6) teremos

$$U_E = \frac{C v^2}{2} = \frac{C}{2} [\omega_0 L i_0 \cos(\omega_0 t + \phi)]^2$$

e

$$U_B = \frac{L i^2}{2} = \frac{L}{2} [i_0 \text{sen}(\omega_0 t + \phi)]^2. \quad (1.18)$$

Mas, $C\omega_0^2 L = 1$, então

$$U_E = \frac{L}{2} [i_0 \cos(\omega_0 t + \phi)]^2. \quad (1.19)$$

Somando as duas energias para obter a energia total U fica

$$U = U_E + U_B = \frac{L}{2} i_0^2 [\cos^2(\omega_0 t + \phi) + \text{sen}^2(\omega_0 t + \phi)] = \frac{L}{2} i_0^2.$$

Substituindo o valor de i_0 dado por (1.15) fica

$$U = U_E + U_B = \frac{C}{2} v_0^2. \quad (1.20)$$

Observe que a energia total é constante (se conserva) e que é igual à energia inicial que estava armazenada no capacitor (a energia inicial no indutor é nula pois não havia corrente).

É bastante instrutivo observar os gráficos das duas energias (Fig. 1.10).

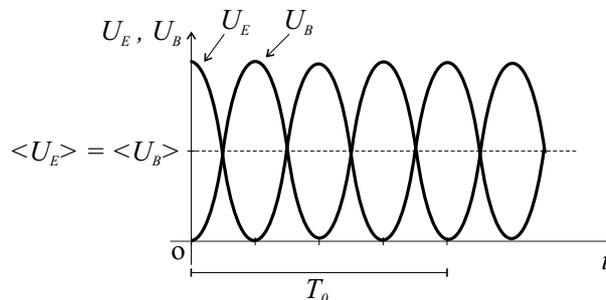


Figura 1.10: Energias no circuito LC.

A simetria das curvas sugere que o valor médio de cada energia em um período da oscilação da corrente seja igual à metade do respectivo valor máximo. Isso pode ser verificado formalmente a partir da definição do valor médio de uma função em um intervalo:

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Em nosso caso o intervalo onde será executada a média será o período T_0 . Apliquemos a definição à energia no capacitor, U_E

$$\langle U_E \rangle = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} U_E(t) dt.$$

Substituindo a expressão de U_E , equação (1.19), e lembrando as identidades

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

fica

$$\begin{aligned} \langle U_E \rangle &= \frac{1}{T_0} \frac{L i_0^2}{2} \int_0^{T_0} \frac{1 + \cos[2(\omega_0 t + \phi)]}{2} dt \\ \langle U_E \rangle &= \frac{L i_0^2}{2} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{1}{2} dt + \frac{L i_0^2}{2} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \frac{\cos[2(\omega_0 t + \phi)]}{2} dt. \end{aligned}$$

A segunda integral é nula pois trata-se da área do cosseno num período (calcule!). Portanto,

$$\langle U_E \rangle = \frac{L i_0^2}{4} \frac{1}{T_0} T_0 = \frac{L i_0^2}{4}. \quad (1.21)$$

O mesmo resultado é obtido ao calcular-se o valor médio de U_B .

$$\langle U_B \rangle = \frac{L i_0^2}{4} \frac{1}{T_0} T_0 = \frac{L i_0^2}{4}. \quad (1.22)$$

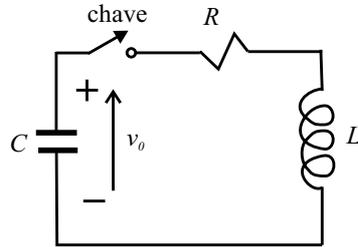
Portanto, as duas energias médias são iguais e a energia média total é igual à energia inicial

$$\langle U \rangle = \frac{L i_0^2}{4} + \frac{L i_0^2}{4} = \frac{L i_0^2}{2} = \frac{C v_0^2}{2}.$$

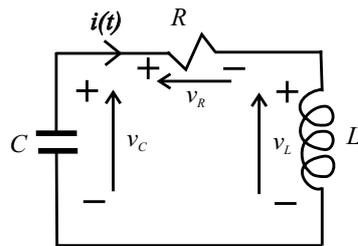
1.3 O oscilador *RLC*

O oscilador *LC* da seção anterior é um oscilador ideal pois não existe nenhum elemento capaz de dissipar energia. Como vimos, uma vez iniciada a oscilação ela se perpetua havendo apenas a troca oscilante de energia entre o capacitor e o indutor. Um oscilador mais próximo da realidade contém algum elemento dissipativo que será representado por um resistor.

Consideremos, novamente, um capacitor previamente carregado com uma tensão inicial v_0 . Esse capacitor será conectado em $t = 0$ (fechamento da chave) a um resistor em série com um indutor formando um circuito *RLC* em série (Fig. 1.11).

Figura 1.11: Circuito RLC aberto.

Após o fechamento da chave deverá aparecer uma corrente $i(t)$ e nosso objetivo é determiná-la estando submetida à condição inicial de corrente nula em $t = 0$. Essa condição inicial para a corrente é a mesma do circuito anterior, uma vez que não pode haver variação brusca na energia do indutor cujo valor inicial é zero. Teremos, então, as tensões representadas na figura (Fig. 1.12).

Figura 1.12: Oscilador RLC .

Temos, após a conexão, que

$$v_C = v_R + v_L$$

ou

$$-\frac{1}{C} \int i dt = L \frac{di}{dt} + Ri. \quad (1.23)$$

Derivando com relação ao tempo para colocar na forma de equação diferencial fica

$$-\frac{1}{C} i = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt}$$

rearrumando

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0. \quad (1.24)$$

Essa equação contém um termo relacionado com a dissipação de energia representado pelo parâmetro R/L e um termo relacionado com a oscilação representado pelo quadrado da frequência angular, $1/LC$. O fato do circuito estar dissipando energia indica que, se houver uma corrente oscilante, sua amplitude deve diminuir com o passar do tempo. Se a corrente não for oscilante, seu valor também deve diminuir com o passar do tempo pois, em ambos os casos, a energia armazenada no indutor depende do valor da corrente e, como existe dissipação no resistor, essa energia deve estar diminuindo.

Procuramos, como uma tentativa, uma solução dessa equação diferencial na forma de uma corrente oscilante amortecida. Nada garante, ainda, que exista tal solução. Pode ser que o resistor dissipe tanta energia que o circuito nem consiga oscilar, mas não custa tentar. Suponhamos que a corrente seja da forma

$$i(t) = i_0 e^{-\beta t} \text{sen}(\omega' t + \phi), \quad \beta > 0. \quad (1.25)$$

ou seja, uma função senoidal amortecida por uma exponencial decrescente.

As constantes i_0 , β , ω' e ϕ são desconhecidas e seus valores deverão ser determinados posteriormente.

Derivando com relação ao tempo a proposta de solução (1.25) encontraremos

$$\frac{di}{dt} = i_0 e^{-\beta t} [-\beta \text{sen}(\omega_0 t + \phi) + \omega' \cos(\omega_0 t + \phi)]$$

e

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = i_0 e^{-\beta t} [(\beta^2 - \omega'^2) \text{sen}(\omega_0 t + \phi) - 2\beta \omega' \cos(\omega_0 t + \phi)].$$

Substituindo essas duas derivadas na equação (1.24) e agrupando os termos em seno e cosseno fica

$$(\beta^2 - \omega'^2 - \frac{R}{L} \beta + \frac{1}{LC}) \text{sen}(\omega_0 t + \phi) + (\frac{R}{L} \omega' - 2\beta \omega') \cos(\omega_0 t + \phi) = 0$$

ou seja, uma equação do tipo

$$A \text{sen}(\omega_0 t + \phi) + B \cos(\omega_0 t + \phi) = 0, \quad A \text{ e } B \text{ constantes.}$$

Essa equação tem que se verificar para qualquer valor do tempo t . Isso só é possível se $A = B = 0$. Essa é uma outra maneira de expressar o fato das funções seno e cosseno serem linearmente independentes.

De $B = 0$ temos

$$\frac{R}{L} \omega' = 2\beta \omega' \quad \therefore \beta = \frac{R}{2L}, \quad (1.26)$$

de $A = 0$ fica

$$\beta^2 - \omega'^2 - \frac{R}{L} \beta + \frac{1}{LC} = 0$$

e substituindo o valor de β e arrumando temos

$$\omega' = \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}. \quad (1.27)$$

Veja que a frequência angular ω' é menor ou igual do que $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Em outras palavras, a presença da resistência elétrica diminui a frequência da oscilação além de promover a atenuação da amplitude da corrente.

O aspecto dessa função pode ser visto na figura (Fig. 1.13).

Os valores de i_0 e ϕ na equação (1.25) podem ser determinados a partir das condições iniciais de modo semelhante ao que realizamos para o oscilador LC . As condições iniciais são as mesmas, em $t = 0$ temos $i = 0$ e $v_C = v_0$. A corrente inicial nula produzirá $\phi = k\pi$ onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ como no caso anterior.

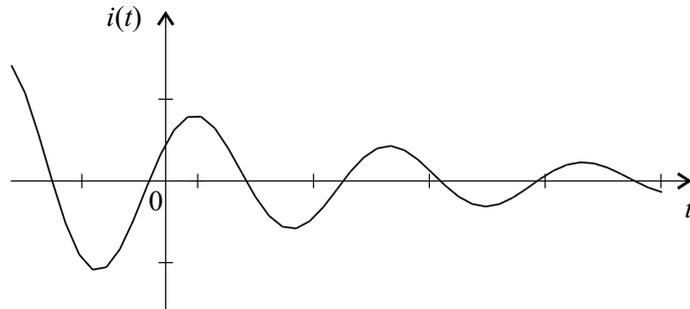


Figura 1.13: Solução oscilatória amortecida.

O fato da corrente inicial ser nula também fará com que a tensão inicial no resistor seja nula, uma vez que $v_R = Ri$, portanto, a tensão inicial do capacitor, v_0 , aparecerá aplicada ao indutor, $v_L = v_0$ e, como no caso anterior, também teremos

$$i_0 = \frac{v_0}{\omega' L \cos(k\pi)}.$$

A solução completa será então

$$i(t) = \frac{v_0}{\omega' L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \left[\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} t \right] \quad (1.28)$$

onde foi considerada apenas a raiz positiva para a frequência angular.

O aspecto dessa função pode ser visto na figura (Fig. 1.14).

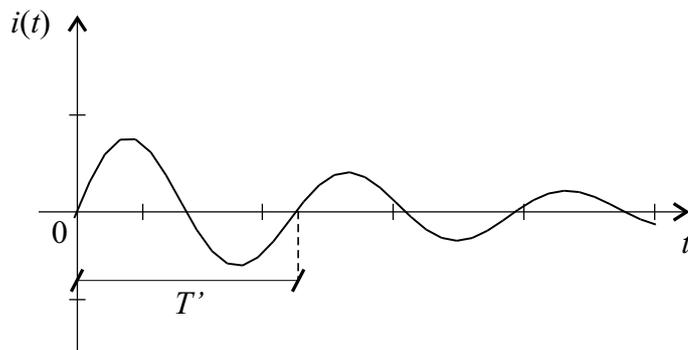


Figura 1.14: Solução oscilatória amortecida completa.

É importante notar que essa solução tem uma limitação, ela só existe enquanto a frequência angular for um número real e isso só ocorre no caso em que

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \leq \frac{1}{LC}$$

ou seja,

$$R \leq 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Esse valor de resistência é conhecido como resistência crítica, R_C . A condição para termos uma oscilação oscilatória amortecida é que a resistência seja menor que a resistência crítica.

$$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.29)$$

Se isso não ocorrer, a solução só pode ser encontrada como uma combinação de uma função exponencial com o produto de uma função linear por uma função exponencial ou como combinação de funções exponenciais. Não temos interesse, agora, em estudar esse caso não oscilatório apesar de ter alguma importância. Nos restringiremos às situações importantes em que a resistência não ultrapasse a resistência crítica.

Costumamos classificar os osciladores a depender do grau de amortecimento, ou seja, a depender de quanto a resistência é comparada com a resistência crítica.

- Se $R \ll R_C$ falamos em baixo amortecimento, a corrente oscila muitas vezes antes da amplitude decair de um valor apreciável. É o caso dos osciladores utilizados nos relógios para marcar o tempo.
- Se $R < R_C$ falamos em oscilador subamortecido. É o caso mais comum em circuitos de rádio e TV.
- Se $R = R_C$ falamos em oscilador criticamente amortecido. É a situação de transição entre oscilar e não oscilar. A solução é do tipo

$$i = C_1 e^{\alpha t} + C_2 t e^{\alpha t}.$$

- Se $R > R_C$ falamos em oscilador superamortecido. É o caso onde não ocorre oscilação, apenas uma subida e uma relaxação da corrente. É importante para evitar oscilações parasitas em circuitos onde existem indutâncias e capacitâncias indesejadas como parte da geometria dos condutores do circuito. A solução é do tipo

$$i = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}.$$

No site onde você encontrou esse texto (www.eleto.fis.ufba.br) deverá estar disponível uma planilha eletrônica de nome “amortecido.xls” que desenha a curva da corrente em função do tempo a depender dos valores de R , L e C para a condição inicial que utilizamos. Esteja a vontade para experimentar.

Na solução oscilatória amortecida a função não é periódica. Contudo, a corrente anula-se em intervalos de tempo regulares de modo que podemos definir um “pseudo período”, T' , equivalente ao tempo necessário para a senoide executar uma oscilação completa (Fig. 1.14) e

$$\omega' = \frac{2\pi}{T'}.$$

No caso do baixo amortecimento o pseudo período é muito pequeno quando comparado com a constante de tempo de relaxação (do circuito RL) definida como L/R de forma que o decréscimo da amplitude da corrente é pouco perceptível se observarmos apenas alguns ciclos da oscilação. É como se a amplitude permanecesse constante durante uma oscilação. O fator exponencial decai muito lentamente quando comparado com o fator senoidal.

1.3.1 Energia e coeficiente de qualidade

Já mencionamos que no circuito RLC a energia total armazenada no indutor e no capacitor deve diminuir ao longo do tempo devido à dissipação no resistor. Isso é fácil de perceber no indutor onde a energia é diretamente proporcional ao quadrado da corrente em cada instante de tempo. No capacitor a situação é um pouco mais complicada de se calcular uma vez que a energia no capacitor depende do quadrado da tensão nesse elemento e a tensão deve ser calculada a partir da integração da corrente.

Estamos mais interessados nos valores médios da energia durante uma oscilação do que nos valores instantâneos. Os cálculos podem ser muito simplificados se nos restringirmos ao caso importante do baixo amortecimento,

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC}, \quad \omega' \approx \omega_0,$$

onde o fator exponencial pode ser considerado aproximadamente constante durante o intervalo de integração (igual ao pseudo período). Isso reduz tremendamente a dificuldade de resolver a integral e nos leva a conclusões importantes. Vejamos:

Consideremos a energia média num pseudo período armazenada no indutor

$$\begin{aligned} \langle U_B \rangle &= \frac{L}{2} \langle i^2 \rangle = \frac{L}{2} \frac{1}{T'} \int_0^{T'} i^2(t) dt \\ \langle U_B \rangle &= \frac{L}{2} \left(\frac{v_0}{\omega' L}\right)^2 \frac{1}{T'} \int_0^{T'} \left(e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega' t)\right)^2 dt. \end{aligned}$$

A exponencial pode ser considerada como aproximadamente constante durante a integração e retirada para fora da integral

$$\langle U_B \rangle = \frac{L}{2} \left(\frac{v_0}{\omega_0 L}\right)^2 e^{-\frac{R}{L}t} \frac{1}{T'} \int_0^{T'} (\sin(\omega_0 t))^2 dt.$$

O valor médio do quadrado do seno vale 1/2, portanto,

$$\langle U_B \rangle = \frac{L}{4} \left(\frac{v_0}{\omega_0 L}\right)^2 e^{-\frac{R}{L}t}$$

e como $\omega_0^2 = 1/(LC)$ teremos

$$\langle U_B \rangle = \frac{C v_0^2}{4} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (1.30)$$

Consideremos agora a energia média num pseudo período armazenada no capacitor. Inicialmente calculemos a tensão no capacitor.

$$v_C = -\frac{1}{C} \int i(t) dt = -\frac{1}{C} \int \frac{v_0}{\omega' L} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega' t) dt = -\frac{1}{C} \frac{v_0}{\omega' L} \int e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega' t) dt$$

Essa integral é tabelada,

$$\int e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega' t) dt = \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega'^2} \left(\frac{R}{2L} \sin(\omega' t) + \omega' \cos(\omega' t)\right)$$

e a tensão fica escrita como

$$v_C = -\frac{1}{C} \frac{v_0}{\omega' L} \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega'^2} \left(\frac{R}{2L} \operatorname{sen}(\omega' t) + \omega' \cos(\omega' t) \right). \quad (1.31)$$

A energia no capacitor é proporcional ao quadrado da tensão

$$U_E = \frac{C v_C^2}{2} = \frac{C}{2} \left(\frac{1}{C} \frac{v_0}{\omega' L} \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega'^2} \right)^2 \left(\frac{R}{2L} \operatorname{sen}(\omega' t) + \omega' \cos(\omega' t) \right)^2$$

lembrando que

$$\operatorname{sen}(2\theta) = 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)$$

fica

$$U_E = \frac{1}{2C} \left(\frac{v_0}{\omega' L} \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega'^2} \right)^2 \left[\left(\frac{R}{2L} \right)^2 \operatorname{sen}^2(\omega' t) + \frac{R}{2L} \omega' \operatorname{sen}(2\omega' t) + \omega'^2 \cos^2(\omega' t) \right].$$

Calculemos agora o valor médio em um pseudo período dessa energia utilizando a mesma aproximação feita anteriormente (considerando o fator exponencial como constante)

$$\langle U_E \rangle = \frac{1}{2C} \left(\frac{v_0}{\omega' L} \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega'^2} \right)^2 \left\langle \left(\frac{R}{2L} \right)^2 \operatorname{sen}^2(\omega' t) + \frac{R}{2L} \omega' \operatorname{sen}(2\omega' t) + \omega'^2 \cos^2(\omega' t) \right\rangle.$$

Como os valores médios do quadrado do seno e do quadrado do cosseno valem $1/2$ e o valor médio do seno é zero, fica

$$\langle U_E \rangle = \frac{1}{2C} \left(\frac{v_0}{\omega' L} \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \omega'^2} \right)^2 \left[\left(\frac{R}{2L} \right)^2 \frac{1}{2} + \omega'^2 \frac{1}{2} \right].$$

Como se trata de baixo amortecimento podemos simplificar mais ainda essa expressão

$$\langle U_E \rangle = \frac{1}{2C} \left(\frac{v_0}{\omega_0 L} \frac{e^{-\frac{R}{2L}t}}{\omega_0^2} \right)^2 \omega_0^2 \frac{1}{2}$$

e como $\omega_0^2 = 1/(LC)$ teremos finalmente

$$\langle U_E \rangle = \frac{C v_0^2}{4} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (1.32)$$

Que é o mesmo resultado obtido para a energia média no indutor.

A energia média armazenada no capacitor e no indutor vale

$$\langle U \rangle = \langle U_E \rangle + \langle U_B \rangle = 2 \frac{C v_0^2}{4} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\langle U \rangle = \frac{C v_0^2}{2} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (1.33)$$

Onde vemos que a energia média total cai exponencialmente com o passar do tempo a partir do valor da energia inicial que estava totalmente armazenada no capacitor.

A potência média relacionada com a energia média armazenada pode ser calculada como

$$\langle P \rangle = \frac{d \langle U \rangle}{dt} = -\frac{RC}{L} \frac{v_0^2}{2} e^{-\frac{R}{L}t} = -\frac{R}{L} \langle U \rangle$$

onde vemos que a potência é negativa, o que é coerente com o fato do sistema oscilante está perdendo energia na forma de calor no resistor.

A energia média dissipada no resistor durante uma oscilação pode ser avaliada através do produto da potência média pelo pseudo período (que é aproximadamente igual ao período da oscilação do oscilador LC).

$$\langle U_R \rangle = - \langle P \rangle T' \approx \frac{R}{L} \langle U \rangle T_0.$$

A qualidade de um oscilador pode ser avaliada pela comparação entre a energia média armazenada e a energia média perdida em uma oscilação. Define-se o coeficiente de qualidade, Q , da seguinte forma

$$Q = 2\pi \frac{\text{energia média armazenada}}{\text{energia média dissipada em uma oscilação}} \quad (1.34)$$

$$Q = 2\pi \frac{\langle U \rangle}{\langle U_R \rangle} = 2\pi \frac{\langle U \rangle}{\frac{R}{L} \langle U \rangle T_0}$$

ou

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}. \quad (1.35)$$

Observe dois fatos importantes: o fator $\omega_0 L$ tem dimensão de resistência (a unidade é o ohm) devido ao fato do coeficiente Q ser um número e o coeficiente é inversamente proporcional à resistência em série no circuito. Um circuito com resistência pequena tem um alto fator de qualidade, em outras palavras, dissipa pouca energia por oscilação.

Os osciladores RLC utilizados em rádio e TV usualmente tem Q entre 10 e 20 enquanto que em um relógio eletrônico é maior que 1000. Voltaremos a esse assunto, posteriormente, nos osciladores forçados.

1.4 Oscilador RLC forçado

Na seção anterior, iniciamos a análise do circuito considerando que o capacitor estava previamente carregado ao fecharmos a chave do circuito. Vimos que isso produz uma oscilação amortecida na corrente e, com o passar do tempo, essa oscilação tende a se extinguir. Se desejarmos manter o sistema oscilando temos que prover alguma fonte de energia para compensar a energia perdida no resistor. Isso pode ser feito se acoplarmos uma fonte de tensão (ou então uma fonte de corrente) ao circuito.

Consideremos um circuito RLC alimentado por uma fonte de tensão com condições iniciais nulas (capacitor descarregado e corrente nula no indutor) e que a chave seja fechada em $t = 0$ como mostra a figura (Fig. 1.15).

Após o fechamento da chave poderá aparecer uma corrente e as tensões instantâneas nos elementos estão mostradas na figura (Fig. 1.16).

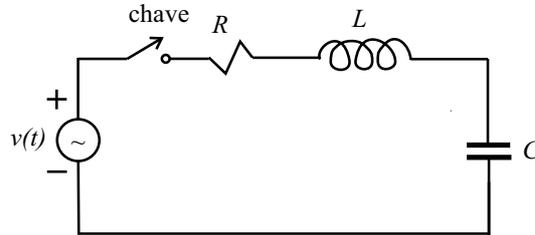


Figura 1.15: Circuito RLC forçado aberto.

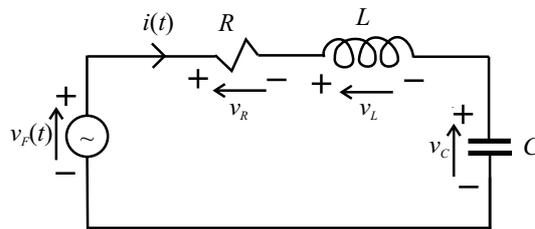


Figura 1.16: Oscilador RLC forçado.

Consideremos que a tensão da fonte seja conhecida e varie senoidalmente como

$$v_F = v_0 \text{sen}(\omega t), \quad v_0 \text{ e } \omega \text{ conhecidos.}$$

Desejamos determinar o comportamento da corrente ao longo do tempo. Para isso, vamos escrever a equação do circuito.

$$\begin{aligned} v_F &= v_R + v_L + v_C \\ v_0 \text{sen } \omega t &= R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \end{aligned} \tag{1.36}$$

derivando com relação ao tempo e rearrumando fica

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = \frac{v_0 \omega}{L} \cos(\omega t).$$

Essa é uma equação linear de segunda ordem não homogênea. A solução geral dessa equação pode ser obtida pela soma da solução da equação homogênea com uma solução particular.

Solução geral = Solução da eq. homogênea + Solução Particular.

A solução da equação homogênea é a mesma do item anterior, o oscilador amortecido, e já sabemos que essa solução tende a zero com o passar do tempo. Por esse motivo essa solução também é conhecida como solução transitória ou “transiente”. Resta determinar a solução particular.

A solução particular é a solução que é mantida pela excitação da fonte e por isso é também conhecida como solução permanente. Pode ser encontrada por tentativa (como é o caso para a maioria das equações diferenciais). Normalmente, uma solução que tenha a

mesma forma da excitação satisfaz. Quando isso não acontece tentamos outras funções que tenham comportamento parecido com a excitação até encontrar uma que satisfaça.

Tentemos uma solução particular com a forma senoidal com a mesma frequência angular da excitação mas deixemos a possibilidade dela estar defasada com relação à excitação. Algo do tipo

$$i = i_0 \text{ sen } (\omega t + \alpha), \quad i_0 \text{ e } \alpha \text{ a determinar.}$$

As duas constantes podem ser determinadas diretamente a partir da substituição da proposta de solução na equação diferencial. Contudo, uma mudança de variável torna esse trabalho mais simples e mais interessante. A razão é a seguinte: nós preferimos colocar a referência de fase na corrente do circuito ao invés da tensão da fonte para podermos tomar a tensão no resistor como referência (lembre-se que no resistor $v_R = Ri$). Isso pode ser feito redefinindo o tempo, ou seja, trocando de relógio. Tomemos um tempo t' tal que

$$\omega t' = \omega t + \alpha,$$

ou seja,

$$\omega t = \omega t' + \phi, \quad \phi = -\alpha.$$

Ficaremos então com

$$v_F = v_0 \text{ sen } (\omega t' + \phi)$$

e

$$i = i_0 \text{ sen } (\omega t')$$

com i_0 e ϕ a determinar.

Substituindo na equação integro-diferencial (1.36) do circuito (ou mesmo na equação diferencial) com t trocado por t' fica

$$v_0 \text{ sen } (\omega t' + \phi) = Ri_0 \text{ sen } (\omega t') + L \frac{d(i_0 \text{ sen } (\omega t'))}{dt} + \frac{1}{C} \int i_0 \text{ sen } (\omega t') dt$$

$$\therefore v_0 \text{ sen } (\omega t' + \phi) = Ri_0 \text{ sen } (\omega t') + L\omega i_0 \cos(\omega t') - \frac{i_0}{C\omega} \cos(\omega t'),$$

expandindo o seno da soma e rearrumando os termos fica

$$v_0 \text{ sen } (\omega t') \cos(\phi) + v_0 \cos(\omega t') \text{ sen } (\phi) = i_0 \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\omega t') + Ri_0 \text{ sen } (\omega t').$$

Essa igualdade só se verifica para todos os instantes de tempo se

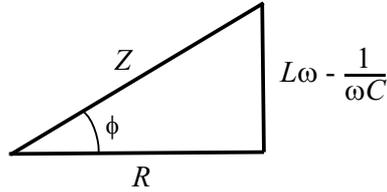
$$i_0 \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right) = v_0 \text{ sen } (\phi)$$

e

$$Ri_0 = v_0 \cos(\phi).$$

Dividindo a primeira equação pela segunda fica

$$\frac{\left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)}{R} = \frac{\text{sen } (\phi)}{\cos(\phi)},$$

Figura 1.17: Triângulo representativo da $\tan \phi$.

ou seja,

$$\tan(\phi) = \frac{\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)}{R}. \quad (1.37)$$

Desenhemos um triângulo retângulo que represente a $\tan(\phi)$ (Fig. 1.17) na situação em que $L\omega > \frac{1}{\omega C}$.

A hipotenusa do triângulo é chamada de Z , impedância, valendo

$$Z = \sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}. \quad (1.38)$$

A impedância é composta pela resistência e por um termo que é dependente da frequência angular da fonte e dos parâmetros do circuito. Esse último termo envolve a diferença entre duas parcelas conhecidas como reatância indutiva e reatância capacitiva que possuem a mesma unidade da resistência, o ohm, assim como a própria impedância.

$X_L = \omega L$ é a reatância indutiva,

$X_C = \frac{1}{\omega C}$ é a reatância capacitiva.

A amplitude da corrente pode ser determinada a partir da equação

$$R i_0 = v_0 \cos(\phi)$$

$$\therefore i_0 = \frac{v_0}{R} \cos(\phi)$$

e do valor do $\cos(\phi)$ obtido através do triângulo,

$$i_0 = \frac{v_0}{Z} = \frac{v_0}{\sqrt{\left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}. \quad (1.39)$$

Essa expressão é um análogo à lei de Ohm para circuitos de corrente alternada que contém R , L e C . Observe que a amplitude da corrente depende da frequência angular da fonte através da impedância $Z(\omega)$.

$$i_0(\omega) = \frac{v_0}{Z(\omega)}$$

Veja que os valores de $i_0(\omega)$ e $\phi(\omega)$ foram determinados e são independentes da mudança de variável que executamos no início da resolução.

Nosso próximo passo é estudar como a variação da frequência da fonte influencia nos valores da amplitude da corrente e na diferença de fase entre a tensão e a corrente na solução permanente do circuito. Para isso, consideremos que todos os parâmetros do circuito e a amplitude da tensão da fonte sejam mantidos constantes e variemos a frequência angular da fonte entre zero e infinito.

Iniciando com uma frequência muito pequena, $\omega \approx 0$ teremos uma reatância capacitiva muito grande, $X_C \rightarrow \infty$ quando comparada à reatância indutiva e à resistência. Consequentemente, de acordo com a equação (1.39), a impedância $Z \rightarrow \infty$ e a amplitude da corrente $i_0 \rightarrow 0$. Também, de acordo com a equação (1.37), teremos $\phi \rightarrow -\pi/2$.

$$\omega \rightarrow 0 \implies Z \rightarrow \infty \implies i_0 \rightarrow 0 \text{ e } \phi \rightarrow -\pi/2.$$

Dizemos que o circuito é predominantemente capacitivo.

Aumentando gradativamente o valor da frequência teremos uma diminuição da reatância capacitiva e um aumento da reatância indutiva com a conseqüente redução da impedância e elevação da corrente. A diferença de fase ϕ aumenta em direção à zero.

Continuando o aumento da frequência, haverá uma situação em que a reatância capacitiva se iguala à reatância indutiva fazendo com que a impedância atinja o valor mínimo, $Z = R$, a amplitude da corrente atinja o valor máximo, $i_0 = v_0/R$ e a diferença de fase se anule.

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}} \implies X_L = X_C \implies Z = R \implies i_0 = \frac{v_0}{R} \text{ e } \phi = 0.$$

O circuito se torna puramente resistivo e dizemos que atingimos a situação de ressonância.

Continuando o aumento da frequência em direção ao infinito, a reatância indutiva torna-se maior que a reatância capacitiva ocasionando um aumento na impedância. A amplitude da corrente decresce do seu valor máximo e a diferença de fase torna-se positiva.

No limite em que a frequência tende ao infinito teremos a reatância indutiva muito maior que a reatância capacitiva e que a resistência. A impedância também cresce para o infinito fazendo com que a amplitude da corrente tenda a zero e a diferença de fase tenda a $\pi/2$.

$$\omega \rightarrow \infty \implies X_L \rightarrow \infty \implies Z \rightarrow \infty \implies i_0 \rightarrow 0 \text{ e } \phi \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Dizemos que o circuito é predominantemente indutivo.

O comportamento da amplitude da corrente em função da frequência angular tem o aspecto mostrado na figura (Fig. 1.18) para $v_0 = 5$ V, $R = 1$ Ω , $L = 1$ H e $C = 1$ F.

A diferença de fase ϕ em função da frequência angular, para os mesmos valores dos parâmetros, tem o aspecto mostrado na figura (Fig. 1.19).

O aspecto dessas curvas é dependente do valor da resistência. Quando a resistência é pequena, a curva da amplitude da corrente (curva de ressonância) é alta, estreita e torna-se quase simétrica com relação à frequência de ressonância. Quando a resistência é grande essa mesma curva é baixa, larga e bastante assimétrica. Veja na figura (Fig. 1.20) as curvas correspondentes a dois valores de resistência diferentes do valor anterior.

Veja que o valor máximo da amplitude da corrente, para uma dada amplitude de tensão da fonte, fica limitado apenas pelo valor da resistência. Se não houvesse resistência ($R = 0$) essa amplitude seria infinita.

No mesmo "site" que mencionamos anteriormente você deverá encontrar as planilhas *ressonancia.xls* e *fase.xls*. Essas planilhas mostram a curva de ressonância e a diferença de fase entre a tensão e a corrente.

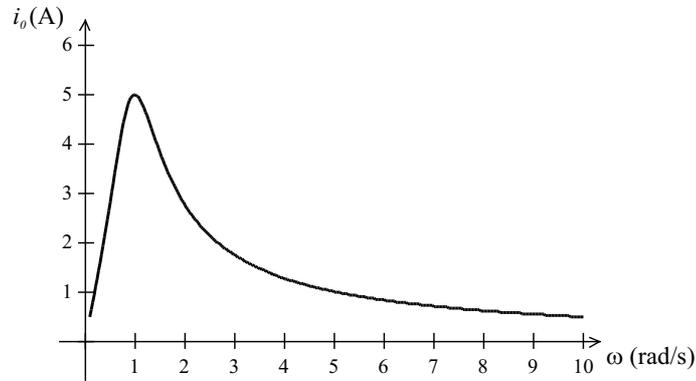


Figura 1.18: Amplitude da corrente em função da frequência angular.

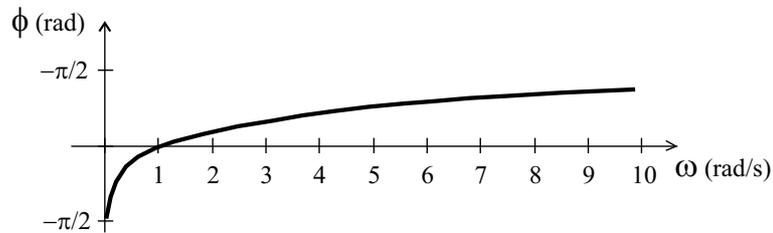


Figura 1.19: Amplitude da corrente em função da frequência angular.

1.4.1 Tensões nos elementos do circuito

A tensão no resistor vale

$$v_R(t') = R i(t') = R i_0 \text{ sen } (\omega t') = v_{R0} \text{ sen } (\omega t')$$

ou seja, a tensão está em fase com a corrente.

A tensão no indutor vale

$$v_L(t') = L \frac{di(t')}{dt'} = L \frac{d}{dt'}(i_0 \text{ sen } (\omega t')) = \omega L i_0 \text{ cos}(\omega t') = v_{L0} \text{ sen } \left(\omega t' + \frac{\pi}{2} \right)$$

ou seja, a tensão está adiantada de $\pi/2$ com relação à corrente, ou com relação à tensão no resistor.

A tensão no capacitor vale

$$v_C(t') = \frac{1}{C} \int i(t') dt' = \frac{1}{C} \int (i_0 \text{ sen } (\omega t')) dt' = \frac{1}{\omega C} (-i_0 \text{ cos}(\omega t')) = v_{C0} \text{ sen } \left(\omega t' - \frac{\pi}{2} \right)$$

ou seja, a tensão está atrasada de $\pi/2$ com relação à corrente, ou com relação à tensão no resistor.

Podemos visualizar as amplitudes das tensões em um triângulo semelhante ao triângulo anterior. Para isso, multipliquemos todos os lados do triângulo original por i_0 (Fig 1.21).

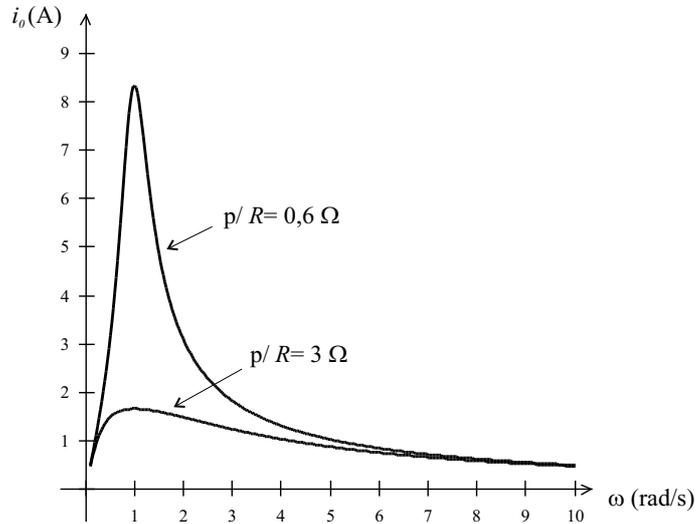


Figura 1.20: Amplitude da corrente em função da frequência angular para valores de resistência diferentes.

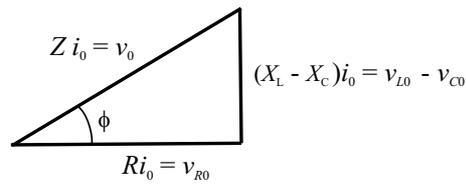


Figura 1.21: Triângulo das amplitudes das tensões.

Podemos observar que as amplitudes das tensões devem satisfazer a regra da soma do triângulo

$$v_0^2 = v_{R0}^2 + (v_{L0} - v_{C0})^2$$

enquanto que os valores instantâneos das tensões somam-se *algebricamente*

$$v_F(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t).$$

Para as amplitudes das tensões, tudo se passa como se fosse uma soma de vetores (Fig. 1.22).

Vejam agora o que ocorre com as tensões instantâneas substituindo o valor de $i_0 = v_0/Z(\omega)$ nas expressões das tensões. Em geral temos

$$v_R(t') = v_0 \frac{R}{Z(\omega)} \text{sen}(\omega t')$$

$$v_L(t') = v_0 \frac{X_L}{Z(\omega)} \text{sen}\left(\omega t' + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v_C(t') = v_0 \frac{X_C}{Z(\omega)} \text{sen}\left(\omega t' - \frac{\pi}{2}\right).$$

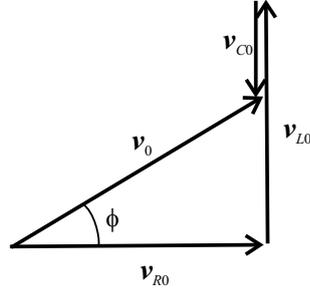


Figura 1.22: Amplitudes das tensões somadas como vetores.

Dessas expressões e do triângulo das tensões podemos observar que as amplitudes das tensões no indutor e no capacitor podem ser maiores ou menores que v_0 a depender do valor da frequência angular. Contudo, a amplitude da tensão no resistor é sempre menor ou igual à v_0 . Na ressonância ($\omega = \omega_0$), $Z = R$ e $\phi = 0$. As expressões das tensões tomam as formas

$$\begin{aligned} v_R(t') &= v_0 \operatorname{sen}(\omega t') \\ v_L(t') &= v_0 \frac{X_L}{R} \operatorname{sen}\left(\omega t' + \frac{\pi}{2}\right) \\ v_C(t') &= v_0 \frac{X_C}{R} \operatorname{sen}\left(\omega t' - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Podemos ver que a tensão da fonte aparece integralmente no resistor, que a tensão no indutor é oposta à tensão no capacitor porém com a mesma amplitude (uma vez que $X_L = X_C$). De fato, a soma das tensões no indutor e no capacitor anula-se. Essa é a causa da tensão da fonte aparecer aplicada integralmente no resistor.

As tensões no indutor e no capacitor podem atingir valores muito elevados, muito maiores que a tensão da fonte, tudo depende da razão X_L/R ou X_C/R que são iguais. Lembre-se que essa razão é o próprio coeficiente de qualidade calculado na ressonância $Q(\omega_0)$. Esse coeficiente foi definido para o oscilador amortecido e aparece também no oscilador forçado. É muito comum ter-se valores elevados ($Q > 10$) para esse coeficiente nas aplicações usuais, podendo haver rompimento da isolamento elétrica dos isolantes caso a tensão seja muito elevada.

1.4.2 Potência média da fonte no regime permanente

Estamos interessados em determinar a potência média fornecida pela fonte ao circuito. Para isso calculemos, inicialmente, o valor da potência instantânea,

$$P(t) = v(t) i(t) = v_0 \operatorname{sen}(\omega t' + \phi) i_0 \operatorname{sen}(\omega t').$$

Expandindo o seno da soma fica

$$P(t) = v_0 i_0 [\operatorname{sen}(\omega t') \cos(\phi) + \operatorname{sen}(\phi) \cos(\omega t')] \operatorname{sen}(\omega t')$$

$$P(t) = v_0 i_0 [\operatorname{sen}^2(\omega t') \cos(\phi) + \operatorname{sen}(\phi) \cos(\omega t') \operatorname{sen}(\omega t')]$$

$$P(t) = v_0 i_0 \left[\text{sen}^2(\omega t') \cos(\phi) + \text{sen}(\phi) \frac{\text{sen}(2\omega t')}{2} \right].$$

Essa expressão tem duas parcelas. A primeira parcela é pulsante e sempre positiva significando que a fonte está sempre fornecendo energia ao circuito. A segunda parcela é senoidal, ora sendo positiva, ora sendo negativa, significando que existem momentos em que a fonte fornece energia ao circuito e momentos em que a o circuito devolve a energia à fonte. Calculemos o valor médio dessa potência durante um período da oscilação.

$$\langle P \rangle = v_0 i_0 \cos(\phi) \langle \text{sen}^2(\omega t') \rangle + v_0 i_0 \text{sen}(\phi) \langle \frac{\text{sen}(2\omega t')}{2} \rangle.$$

Já sabemos que o primeiro valor médio vale $1/2$, enquanto que o segundo valor médio é nulo. Portanto

$$\langle P \rangle = \frac{v_0 i_0}{2} \cos(\phi) = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{i_0}{\sqrt{2}} \cos(\phi). \quad (1.40)$$

É conveniente expressar a potência média em função dos valores eficazes da tensão e da corrente. O valor eficaz de uma tensão é um valor constante (contínuo ou DC) que, quando aplicado em um resistor, dissipa a mesma quantidade de energia que seria dissipada por uma tensão alternada aplicada ao mesmo resistor, durante um intervalo de tempo igual ao período da oscilação. Para uma tensão senoidal, a energia dissipada em uma oscilação vale

$$U = \int_0^{T_0} \frac{v^2(t)}{R} dt = \frac{v_0^2}{R} \int_0^{T_0} \text{sen}^2(\omega t) dt = \frac{v_0^2}{R} \frac{T_0}{2}.$$

A energia dissipada no mesmo resistor por uma tensão constante de valor v_{ef} no mesmo intervalo de tempo vale

$$U' = \frac{v_{\text{ef}}^2}{R} T_0.$$

Igualando as duas energias teremos

$$\begin{aligned} U = U' &\Rightarrow \frac{v_0^2}{R} \frac{T_0}{2} = \frac{v_{\text{ef}}^2}{R} T_0 \\ \therefore v_{\text{ef}} &= \frac{v_0}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Um resultado análogo pode ser obtido para a corrente

$$i_{\text{ef}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}}. \quad (1.42)$$

Dessa forma, a equação (1.40) pode ser escrita como

$$\langle P \rangle = v_{\text{ef}} i_{\text{ef}} \cos(\phi). \quad (1.43)$$

O fator $\cos(\phi)$ é chamado de *fator de potência*. Observe que a potência média fornecida pela fonte é sempre menor ou igual ao produto do valor eficaz da tensão pelo valor eficaz da corrente e a causa disso é o fato da tensão da fonte estar defasada da corrente.

Podemos verificar facilmente que essa potência é igual à potência média dissipada no resistor, $\langle P_R \rangle$, vejamos:

$$\begin{aligned}
 P_R(t) &= R i^2(t) = R (i_0 \text{ sen}(\omega t'))^2 = R i_0^2 \text{ sen}^2(\omega t') \\
 \langle P_R \rangle &= R i_0^2 \langle \text{ sen}^2(\omega t') \rangle = R i_0^2 \frac{1}{2} = R \left(\frac{i_0}{\sqrt{2}} \right)^2 \\
 \therefore \langle P_R \rangle &= R i_{\text{ef}}^2
 \end{aligned}
 \tag{1.44}$$

ou então

$$\begin{aligned}
 \langle P_R \rangle &= R i_0^2 \frac{1}{2} = R \frac{v_0}{Z} i_0 \frac{1}{2} \\
 \langle P_R \rangle &= \frac{1}{2} v_0 i_0 \frac{R}{Z} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{i_0}{\sqrt{2}} \cos(\phi) \\
 \therefore \langle P_R \rangle &= v_{\text{ef}} i_{\text{ef}} \cos(\phi).
 \end{aligned}
 \tag{1.45}$$

A potência média também pode ser visualizada em um triângulo. Considere o triângulo das amplitudes das tensões (Fig. 1.21). Esse triângulo também pode ser encarado como o triângulo das tensões eficazes, pois, basta dividir todos os lados por $\sqrt{2}$ obtendo um triângulo semelhante. Multipliquemos todos os lados deste último triângulo pelo valor da corrente eficaz, i_{ef} .

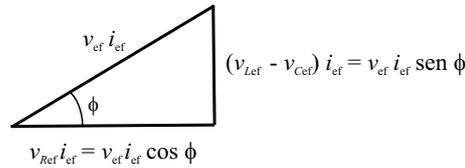


Figura 1.23: Triângulo das potências médias.

Nesse triângulo podemos observar que o cateto adjacente ao ângulo ϕ é a potência média fornecida pela fonte e é chamada de *potência ativa*. Portanto, todos os lados do triângulo tem dimensão de potência. A hipotenusa é chamada de *potência aparente* e o cateto oposto é a *potência reativa* (Fig. 1.24). As unidades utilizadas para essas três potências são: o watt para a ativa, o VA (volt-ampère) para a aparente e VAR (volt-ampère reativo) para a reativa. Utilizam-se nomes diferentes para as unidades somente para chamar a atenção do tipo de potência que se refere.

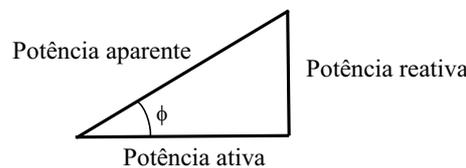


Figura 1.24: Nomenclaturas no triângulo das potências médias.

Muitos equipamentos elétricos simples (motores, eletrodomésticos, etc.) podem ser representados por uma associação *RLC* em série (ou em paralelo) e essa associação forma

uma impedância Z . No caso do equipamento estar conectado à rede de energia doméstica ou industrial, a rede é a fonte de tensão e a impedância é a “carga” apresentada a essa rede. A rede tem frequência (60 Hz no Brasil) e valor eficaz de tensão fixos de modo que a corrente eficaz será uma consequência da impedância do equipamento. Os equipamentos são construídos de modo a oferecer um mínimo de potência reativa à rede para diminuir as perdas de energia na resistência dos fios que distribuem a energia da rede. As reatâncias contribuem para que a corrente fique defasada da tensão reduzindo a potência ativa no equipamento mas, contribuem também com as perdas nos fios tornando o sistema de distribuição de energia pouco eficiente. Por isso os equipamentos devem ser o mais resistivo possível. Quando o equipamento não satisfaz essa condição o mesmo tem que ser corrigido. Se ele for excessivamente indutivo, deve-se acrescentar capacitores para compensar de modo que a diferença entre as reatâncias fique pequena quando comparada com a resistência do equipamento. Atualmente, a legislação brasileira (portaria 456 da ANEEL de 29/11/2000) impõe que o fator de potência ($\cos(\phi)$) seja maior ou igual a 0,92, correspondendo uma diferença de fase ϕ menor ou igual a aproximadamente 23 graus.

1.4.3 A curva de ressonância e o coeficiente de qualidade

Já mencionamos que o aspecto da curva de ressonância depende do valor da resistência do circuito, considerando que os outros parâmetros do circuito sejam mantidos fixos. Mostraremos agora que o coeficiente de qualidade do circuito RLC pode ser estimado a partir da curva de ressonância. Isso tem um aspecto prático importante, pois nem sempre é possível conhecer o valor da resistência que, de fato, representa as diversas perdas de energia no circuito. Os indutores e os capacitores reais dissipam um pouco de energia por diversas razões, resistência dos condutores, perdas dielétricas, perdas no núcleo, radiação e outras. Essa energia dissipada é muito difícil de ser avaliada teoricamente e muitas vezes não se consegue individualizá-las. Só conseguimos observar o resultado global.

Considere a curva representativa da amplitude da corrente em função da frequência angular (Fig. 1.25) e determinemos as frequências angulares ω_1 e ω_2 em que a amplitude da corrente cai a $1/\sqrt{2}$ (ou 0,707) do valor máximo. Essas duas frequências correspondem à queda da potência média à metade do valor máximo, uma vez que a potência média é proporcional ao quadrado da amplitude da corrente (ou do valor eficaz).

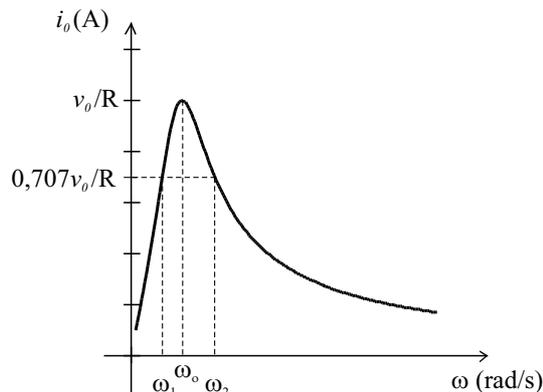


Figura 1.25: Amplitude da corrente em função da frequência angular.

A condição para a queda a $1/\sqrt{2}$ pode ser escrita como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{R} = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}$$

ou

$$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{2} R$$

ou

$$R^2 + (X_L - X_C)^2 = 2 R^2 \\ \therefore (X_L - X_C) = \pm R.$$

Em função de ω fica

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R$$

que é uma equação do segundo grau

$$\omega^2 \pm \omega \frac{R}{L} - \frac{1}{LC} = 0.$$

Para cada sinal de $\omega R/L$ existem duas raízes, logo temos um total de quatro raízes. Duas positivas e duas negativas simétricas. As raízes positivas são

$$\omega_2 = \frac{\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}}{2}$$

e

$$\omega_1 = \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}}}{2}.$$

A diferença entre as raízes vale

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$$

e dividindo ambos os lados por ω_0 fica

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L}.$$

Lembrando que o coeficiente de qualidade na ressonância é dado por $Q = (\omega_0 L)/R$ fica

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

$$\therefore Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (1.46)$$

Vemos, portanto, que o coeficiente de qualidade pode ser determinado muito facilmente a partir da curva de ressonância pela medida das três frequências no gráfico. A curva de ressonância pode ser obtida por um simples ensaio em laboratório do circuito *RLC*.

Uma observação importante é que as duas frequências angulares, ω_1 e ω_2 não são, em geral, simétricas com relação à frequência de ressonância ω_0 . Somente quando o coeficiente de qualidade é grande, digamos maior que 10, é que as frequências se tornam aproximadamente simétricas, pois as curvas ficam altas e estreitas. Costumamos dizer que um circuito com alto coeficiente de qualidade é muito seletivo já que, quanto mais estreita for a curva, maior é a capacidade de selecionar uma frequência em uma mistura de várias frequências. Este é o caso dos circuitos RLC utilizados nos sintonizadores de rádio e televisão.

Para se ter uma ideia, um canal de rádio FM com uma largura de banda de aproximadamente 50 kHz em uma estação, com uma frequência central de 100 MHz, necessita de um coeficiente de qualidade $Q = (100/0.05) = 2000$.

1.5 Exemplos

Alguns exemplos simples ajudarão a compreender melhor os conceitos.

1.5.1 Oscilação amortecida

1- Um circuito RLC em série com $R = 2 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ e $C = 1 \mu\text{F}$ oscila no regime transitório partindo, apenas, com o capacitor inicialmente carregado. Determinar: a) O tipo de oscilação. b) Quantas oscilações serão efetuadas até que a amplitude da corrente caia a um décimo da amplitude inicial. c) A razão entre a energia média e a energia inicial quando a condição do item b) for atingida.

Verifiquemos se a oscilação pode ser descrita por

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \text{sen}(\omega' t), \quad \text{com } \omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Calculemos

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \left(\frac{2}{2 \times 2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{1 \times 1 \times 10^{-6}} = 10^6.$$

Vê-se que

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 \ll \frac{1}{LC},$$

portanto trata-se do caso sub-amortecido com baixo amortecimento. De modo equivalente, a resistência (2Ω) é muito menor que a resistência crítica, R_{crit} ,

$$R_{\text{crit}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{1}{10^{-6}}} = 2000\Omega.$$

A frequência angular de oscilação ω' é aproximadamente igual à frequência angular do oscilador LC

$$\omega' = \sqrt{10^6 - 1} \approx 10^3 \text{ rad/s} = \omega_0$$

e o pseudo-período é aproximadamente igual ao período do oscilador LC

$$T' \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10^3} \approx 6,28 \times 10^{-3} \text{ s.}$$

A amplitude da oscilação vale

$$i_0 e^{-\frac{R}{2L} t}$$

e a amplitude inicial é i_0 .

Para que a amplitude caia a 1/10 do valor inicial deveremos ter

$$i_0 e^{-\frac{R}{2L} t} = \frac{1}{10} i_0$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{R}{2L} t &= \ln 10 \\ \therefore t &\approx 2,3 \frac{2}{2} = 2,3 \text{ s.} \end{aligned}$$

Nesse intervalo de tempo serão executadas N oscilações

$$N = \frac{2,3}{T_0} = \frac{2,3}{6,28 \times 10^{-3}} \approx 366 \text{ oscilações.}$$

A razão entre a energia média nesse instante e a energia inicial é

$$\frac{\langle U \rangle}{U_0} = \frac{\frac{1}{2} C v_0^2 e^{\frac{R}{L} t}}{\frac{1}{2} C v_0^2} = e^{-2 \times 2,3} \approx 0,01.$$

Observe que a queda da energia média relativa (igual a 1%) é compatível com o fato da energia média também ser aproximadamente proporcional ao quadrado da amplitude da corrente (que tem uma queda relativa igual a 0,1 %) no caso do baixo amortecimento.

2- Um circuito RLC em série, forçado por uma fonte de tensão senoidal, oscila no regime permanente. Sendo $R = 3 \Omega$, $X_L = 9 \Omega$, $X_C = 5 \Omega$, $f = 60 \text{ Hz}$ e $v_0 = 100 \text{ V}$, determine: a) A amplitude da corrente e seu valor eficaz. b) O fator de potência e os valores da indutância e da capacitância. c) A potência média dissipada no resistor. d) A potência média fornecida pela fonte. e) A potência média dissipada no resistor se o valor da capacitância fosse alterado para $294,73 \mu\text{F}$.

Como a resistência e as reatâncias são conhecidas, podemos facilmente montar o triângulo da impedância (Fig. 1.26).

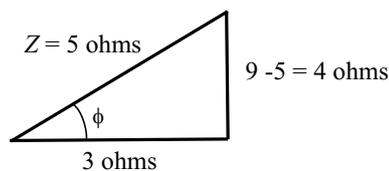


Figura 1.26: Triângulo da impedância.

Nesse triângulo podemos calcular o valor da impedância

$$Z = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\Omega.$$

A amplitude da corrente será

$$i_0 = \frac{v_0}{Z} = \frac{100}{5} = 20 \text{ A}$$

e o valor eficaz vale

$$i_{\text{ef}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14,14 \text{ A.}$$

O fator de potência também pode ser determinado pelo triângulo

$$\cos(\phi) = \frac{3}{5} = 0,6.$$

A indutância e a capacitância podem ser determinadas a partir das reatâncias

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{X_L}{2\pi f} \quad e \quad C = \frac{1}{\omega X_C} = \frac{1}{2\pi f X_C}$$

$$\therefore L = \frac{9}{2 \times \pi \times 60} \approx 0,0239 \text{ H}$$

e

$$C = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 5} \approx 0,53 \times 10^{-3} \text{ F.}$$

A potência média dissipada no resistor vale

$$\langle P_R \rangle = R i_{\text{ef}}^2 = 3 \left(\frac{20}{\sqrt{2}} \right)^2 = 600 \text{ W.}$$

A potência média fornecida pela fonte vale

$$\langle P_F \rangle = v_{\text{ef}} i_{\text{ef}} \cos(\phi) = \frac{100}{\sqrt{2}} \frac{20}{\sqrt{2}} 0,6 = 600 \text{ W.}$$

Confirmando que as duas potências médias são iguais.

Alterando o capacitor para $294,73 \mu\text{F}$ a nova reatância capacitiva será

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{377 \times 294,73 \times 10^{-6}} = 8,9999 \approx 9\Omega.$$

Esse valor é exatamente igual à reatância indutiva. Portanto, com essa nova capacitância, o circuito encontra-se na situação de ressonância ($Z = R$)

$$i_{\text{ef}} = \frac{v_{\text{ef}}}{Z} = \frac{v_{\text{ef}}}{R} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}}}{3} = 23,57 \text{ A}$$

e

$$\langle P_R \rangle = R i_{\text{ef}}^2 = 3 \left(\frac{100}{\sqrt{2} \times 3} \right)^2 = 1666,6 \text{ W.}$$

Essa potência é quase o triplo da potência anterior.

1.6 O transformador

Denominamos de transformador um arranjo de dois ou mais indutores magneticamente acoplados, ou seja, um conjunto de bobinas suficientemente próximas de modo que o campo de indução magnética produzido por qualquer uma delas atravesse as demais.

Para simplificar o raciocínio consideremos apenas dois indutores magneticamente acoplados. Um dos indutores será conectado a uma fonte de tensão variável no tempo e será chamado de indutor primário. O segundo indutor será conectado a uma “carga” (um resistor ou qualquer outro dispositivo elétrico) e será chamado de indutor secundário. A figura (Fig. 1.27) mostra a representação de um transformador alimentado por uma fonte e conectado a um “resistor de carga”.

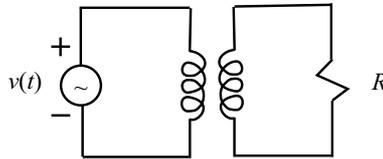


Figura 1.27: Transformador conectado a uma fonte e a uma carga.

Hipóteses do transformador ideal:

1. Em um transformador ideal todas as linhas de campo de indução magnética produzidas pelo indutor primário devem atravessar o indutor secundário. Em outras palavras, o fluxo do campo de indução magnética em cada espira do indutor primário deve ser igual ao fluxo em cada espira do indutor secundário. Não existe fluxo disperso.
2. A indutância do indutor primário deve ser suficientemente alta para que a reatância deste indutor seja praticamente infinita para a frequência de operação da fonte. Nessa condição, amplitude da corrente primária devido a essa reatância, chamada de “corrente de magnetização”, deve ser desprezível.
3. As resistências elétricas dos fios dos indutores devem ser desprezíveis.

As condições para se obter um transformador ideal podem ser obtidas com boa aproximação em um transformador real com a utilização de um núcleo fechado de material ferromagnético e muitas espiras de fio com baixa resistência. O núcleo ferromagnético guia as linhas de campo mantendo-as concentradas no seu interior com pouquíssimas linhas de campo fechando o circuito magnético pelo exterior do núcleo (pelo ar). Além disso, é comum enrolar a bobina secundária sobre a bobina primária para garantir que o fluxo por espira tenha sempre o mesmo valor.

Observe que, se a fonte de tensão for senoidal com amplitude v_0 e frequência angular ω , a indutância do indutor primário for L_1 e a resistência do fio do indutor for nula, a amplitude da corrente de magnetização será dada por

$$i_{\text{mag}0} = \frac{v_0}{\omega L_1}$$

e quanto maior for L_1 menor será a amplitude dessa corrente.

Consideremos agora que os indutores primário e secundário sejam bobinas de fios com N_1 e N_2 espiras respectivamente e chamemos de $v_1(t)$ e $v_2(t)$ as tensões nesses indutores (Fig. 1.28).

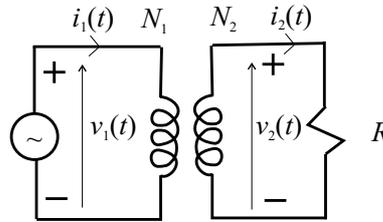


Figura 1.28: Transformador conectado a uma fonte e a uma carga.

Sendo $v_1(t)$ a própria tensão da fonte, a lei de Faraday aplicada ao indutor primário diz que

$$v_1(t) = -N_1 \frac{d\phi_{B1}}{dt}$$

onde ϕ_{B1} é o fluxo por espira no indutor primário.

Pela hipótese do transformador ideal, o fluxo por espira no indutor secundário é igual ao fluxo por espira no indutor primário, $\phi_{B2} = \phi_{B1}$. A lei de Faraday aplicada ao indutor secundário diz que

$$v_2(t) = -N_2 \frac{d\phi_{B2}}{dt} = -N_2 \frac{d\phi_{B1}}{dt} = -N_2 \left(-\frac{v_1(t)}{N_1} \right) = \frac{N_2}{N_1} v_1(t)$$

ou

$$v_2(t) = \frac{N_2}{N_1} v_1(t), \quad \therefore \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (1.47)$$

A fração N_1/N_2 é chamada de “relação de transformação” ou relação de espiras. Quando $N_2 > N_1$ a tensão no indutor secundário é maior que a tensão no indutor primário e dizemos que o transformador é um elevador de tensão. No caso oposto, $N_2 < N_1$ dizemos que o transformador é um abaixador de tensão.

A corrente elétrica, i_2 , que atravessa o resistor de carga é dada pela lei de Ohm

$$i_2(t) = \frac{v_2(t)}{R}$$

de forma que o transformador entrega ao resistor uma potência

$$P_2(t) = v_2(t) i_2(t).$$

Como estamos supondo que o transformador é ideal, não existe “perda” de energia (produção de calor, som, etc.) no interior do transformador. Logo, a potência fornecida pela fonte deve ser igual à potência entregue ao resistor

$$P_1(t) = P_2(t), \quad \therefore v_1(t) i_1(t) = v_2(t) i_2(t)$$

$$\therefore i_1(t) = \frac{v_2(t)}{v_1(t)} i_2(t)$$

ou

$$i_1(t) = \frac{N_2}{N_1} i_2(t). \quad (1.48)$$

Vemos, portanto, que a corrente no indutor primário é diretamente proporcional à corrente no indutor secundário. Essa corrente pode ser determinada de modo simples substituindo as expressões para $i_2(t)$ e $v_2(t)$

$$i_1(t) = \frac{N_2}{N_1} \frac{v_2(t)}{R} = \frac{N_2}{N_1} \frac{\frac{N_2}{N_1} v_1(t)}{R}$$

ou

$$i_1(t) = \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 \frac{v_1(t)}{R}.$$

Observe que a corrente no indutor primário depende do valor da resistência conectada ao indutor secundário.

A fonte “enxerga” uma resistência $R' = v_1(t)/i_1(t)$, ou seja

$$R' = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R. \quad (1.49)$$

Por essa expressão podemos encarar o transformador também como um dispositivo que transforma a resistência de carga em uma nova resistência. Observe que essa transformação é executada com o quadrado da relação de espiras.

Duas observações importantes:

- No transformador ideal nós desprezamos a corrente de magnetização. Num transformador real essa corrente deve ser adicionada à corrente i_1 devido ao resistor de carga transformado para formar a corrente total no indutor primário.
- As relações de transformação que mostramos para os valores instantâneos das tensões e das correntes também são válidas no regime permanente com excitações senoidais. As mesmas relações valem para as amplitudes das tensões e das correntes bem como seus valores eficazes. Além disso, o resistor de carga pode ser, em geral, uma impedância Z que também será transformada em uma nova impedância Z' vista pela fonte de tensão.

Exemplo 1

Um transformador com relação de espiras $N_1/N_2 = 10$ tem o indutor primário conectado à rede de eletricidade doméstica (fonte) de 127 V(eficazes)/60 Hz e o indutor secundário conectado a um resistor, $R = 6,0 \Omega$. Determinar as correntes eficazes no resistor e no indutor primário. Determinar também o valor da resistência vista pela rede doméstica (a fonte).

A relação de espiras permite calcular a tensão eficaz sobre o resistor

$$v_R = \frac{N_2}{N_1} v_F = \frac{1}{10} 127 = 12,7 \text{ V}.$$

A corrente eficaz no resistor vale

$$i_R = \frac{v_R}{R} = \frac{12,7}{6} \approx 2,12 \text{ A},$$

e a corrente eficaz no indutor primário (a mesma da fonte) é

$$i_F = \frac{N_2}{N_1} i_R = \frac{1}{10} 2,12 = 0,212 \text{ A.}$$

Portanto, a resistência vista pela fonte vale

$$R' = \frac{v_F}{i_F} = \frac{127}{0,212} = 599 \approx 600\Omega.$$

Exemplo 2

Um exemplo de aplicação importante do circuito RLC oscilante amortecido e transformador é o circuito de ignição dos motores dos automóveis baseados no ciclo Otto (motores a explosão que utilizam gasolina, etanol ou gás natural). Para proceder a queima da mistura ar-combustível comprimida na câmara de combustão esses motores utilizam uma centelha elétrica produzida na “vela de ignição”. Para obter essa centelha é necessário aplicar uma d.d.p. muito elevada entre os dois eletrodos da vela que estão imersos na mistura comprimida, algo em torno de 18000 volts ou mais a depender do tipo de combustível e da taxa de compressão. O problema é como obter tal tensão em um curto intervalo de tempo entre duas queimas consecutivas do ciclo de combustão partindo da tensão contínua da bateria de 12 volts. Para um motor de “quatro tempos” que gire a 4000 RPM, como é usual, esse intervalo de tempo é em torno de 0,03 s.

A solução para esse tipo de problema é utilizar um circuito RLC em série, oscilante, em que o indutor é o indutor primário de um transformador elevador de tensão cujo secundário está conectado à vela de ignição. A vela comporta-se como uma resistência infinita até o momento da produção da centelha quando a mistura gasosa torna-se ionizada. Vejamos os detalhes desse circuito analisando a figura (Fig. 1.29).

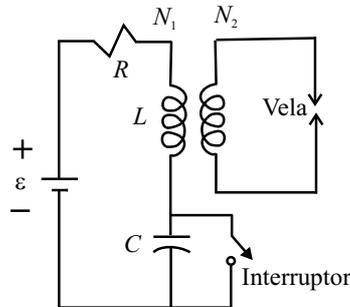


Figura 1.29: Sistema de ignição de um motor de ciclo Otto..

O interruptor que se encontra em paralelo com o capacitor está mecanicamente acoplado ao eixo do motor de tal forma que a chave abre e fecha de modo sincronizado com o movimento do pistão que comprime a mistura.

Iniciemos o raciocínio considerando que o capacitor encontra-se descarregado e o interruptor fecha em $t = 0$ s. Forma-se um circuito RL alimentado pela bateria com tensão constante e igual a 12 volts. A corrente no circuito cresce de acordo com a função

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t}\right).$$

Os valores típicos são aproximadamente $R = 6\ \Omega$ e $L = 18\ \text{mH}$. Com esses valores a corrente se eleva e atinge 2 A em 15 ms permanecendo praticamente constante nesse valor, armazenando energia magnética no indutor.

Quando o pistão chega próximo do máximo de compressão, o interruptor abre e o capacitor que estava descarregado forma um circuito RLC oscilante amortecido. O valor típico da capacitância é em torno de $0,1\ \mu\text{F}$ e a corrente (e a tensão) oscila com uma frequência de aproximadamente 3750 Hz. A tensão no indutor chega a alcançar perto de 800 volts e é transformada para 18000 volts por uma relação de espiras $N_1/N_2 = 1/22,5$. Essa tensão é suficientemente alta para ionizar o gás comprimido e iniciar a centelha.

Capítulo 2

A onda eletromagnética

Apresentaremos nesse capítulo uma das maiores descobertas científicas do século XIX que revolucionou a forma de viver da maior parte da humanidade durante o século XX e ainda revolucionou no século XXI, a onda eletromagnética prevista por James Clerk Maxwell.

2.1 Forma integral das equações de Maxwell

As leis básicas da eletricidade e do magnetismo que representam as propriedades do campo elétrico e do campo de indução magnética conhecidas até o século XVIII podem ser sintetizadas em quatro equações:

1. Lei de Gauss para o vetor do campo eletrostático \mathbf{E}

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

onde q é a carga elétrica interior à superfície fechada S . Essa lei representa o fato das “linhas de força” do campo eletrostático serem linhas abertas com origem na carga e que o módulo do vetor \mathbf{E} produzido pela carga elementar decresce com o quadrado da distância.

2. Lei de Gauss para o vetor do campo de indução magnética \mathbf{B}

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

que representa o fato da não existência da carga magnética (monopolo magnético) e que as linhas de força do campo são linhas fechadas.

3. Lei de Ampère

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i, \quad i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

onde a corrente elétrica i penetra ou “fura” qualquer superfície S apoiada no caminho fechado de integração C . Essa lei representa o fato da corrente elétrica ser a fonte do campo de indução magnética.

4. Lei de Faraday

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}.$$

Essa lei representa o fato do campo elétrico poder ser produzido por uma variação do fluxo do campo de indução magnética. Esse campo tem natureza diferente do campo eletrostático por ser um campo de linhas de força fechadas, sendo chamado de campo elétrico induzido.

A lei de Ampère, conforme apresentada, só tem validade nas situações estacionárias, ou seja, situações onde não exista interrupção na corrente elétrica ao longo do circuito com o consequente acúmulo de cargas elétricas em alguma região do espaço. Isso resulta do fato de que as investigações experimentais que deram origem a essa lei terem sido efetuadas em uma época em que as fontes de tensão em um circuito eram pilhas voltaicas e os circuitos tinham natureza resistiva. Nesses circuitos a corrente elétrica era praticamente constante no tempo e não havia acúmulo de cargas em nenhum ponto ao longo do circuito.

A introdução de um capacitor em um circuito originalmente resistivo produz uma corrente variável no tempo em um circuito com uma fonte de tensão constante. As cargas elétricas acumulam-se nas placas do capacitor durante o processo de carga e a corrente elétrica anula-se no espaço vazio entre as placas.

Consideremos o circuito RC simples, em regime de carga, mostrado na figura (Fig. 2.1) e um caminho de integração C ao redor do fio.

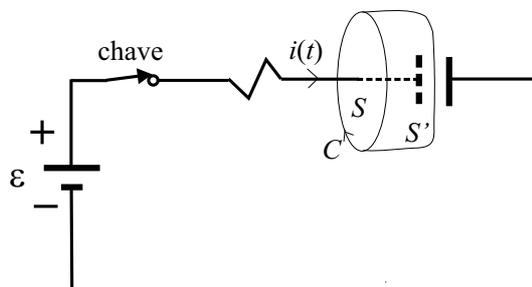


Figura 2.1: Lei de Ampère em um circuito RC .

A aplicação da lei de Ampère em um caminho C ao redor do fio resulta em

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

onde a corrente i é a corrente que fura a superfície S apoiada no caminho. Contudo, se considerarmos a superfície S' em forma de saco que passa entre as placas do capacitor não haverá corrente que a perfure. Portanto, deveríamos obter um resultado nulo para a lei de Ampère, ou seja, uma contradição!

Para corrigir essa lei Maxwell propôs a inclusão de uma parcela aditiva à corrente i denominada de i_D que recebeu o nome histórico de “corrente de deslocamento” (tradução de “displacement current”).

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0(i + i_D).$$

Para manter a validade da lei foi imposto que a parcela i_D só deveria existir entre as placas do capacitor e que deveria ser numericamente igual à corrente i que chega à placa. Sabemos que entre as placas existe campo elétrico e que no interior dos fios ideais este campo não existe. Então, a corrente de deslocamento deve estar relacionada ao campo elétrico.

O campo elétrico entre as placas de um capacitor está relacionado à densidade superficial de cargas elétricas, $\sigma = q/A$, na placa sendo q a carga acumulada e A a área da placa.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Durante o processo de carga do capacitor o campo elétrico encontra-se variando no tempo em função da variação temporal da carga

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{q}{A} \right) = \frac{1}{\varepsilon_0 A} \frac{dq}{dt} \\ \therefore \frac{dq}{dt} &= \varepsilon_0 A \frac{dE}{dt} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} (EA) = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \end{aligned}$$

onde ϕ_E é o fluxo do campo elétrico na área A .

Contudo, a taxa de variação no tempo da carga elétrica acumulada na placa é igual à taxa de variação no tempo da carga elétrica que chega à placa, ou seja, à própria corrente elétrica i . Portanto, se definirmos a corrente de deslocamento i_D como

$$i_D = \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$

teremos satisfeitas as imposições para a definição dessa parcela.

A lei de Ampère generalizada fica

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \right). \quad (2.1)$$

Com essa correção, as quatro equações integrais que mencionamos são conhecidas como as equações de Maxwell na forma integral

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (2.2)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (2.3)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right) \quad (2.4)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.5)$$

Essas equações relacionam os campos e suas fontes quer elas sejam estáticas ou variáveis no tempo. Nas duas últimas equações podemos perceber um fato interessante, a criação de um campo induzido devido à variação no tempo do fluxo do outro campo. Isso sendo válido para os dois campos. Pode-se perguntar se os campos podem se auto-sustentar por esse

processo, ou seja, a variação de um campo produzir o outro cuja variação volte a produzir o anterior e assim por diante. Essa é uma pergunta intrigante porque, mesmo que esse processo seja possível, resta ainda uma outra questão: como o processo iniciou? que campo “nasceu” primeiro?

Podemos argumentar que o campo elétrico estático foi produzido por uma carga elétrica e que um agente externo balançou essa carga criando, simultaneamente, uma corrente elétrica e um campo elétrico variáveis no tempo. Isso daria partida ao processo e a partir desse ponto os campos se perpetuariam no espaço vazio.

Para verificar essa possibilidade de perpetuação dos campos é necessário transformar as equações da forma integral para a forma diferencial. Isso pode ser feito com o auxílio dos operadores diferenciais e seus teoremas associados. Relembremos esses operadores em coordenadas cartesianas.

2.2 Operadores diferenciais

Denominamos de operador um ente matemático que age em uma função transformando-a em uma outra função. A função pode ser uma função escalar ou uma função vetorial.

2.2.1 Operador gradiente

Esse operador é definido sobre uma função escalar da posição transformando-a em uma função vetorial da posição.

Seja $\phi(x, y, z)$ uma função escalar da posição, ou seja, uma função que associa um número a cada posição do espaço, Exemplos de funções escalares são a função temperatura em um ponto do espaço, a função intensidade sonora ou luminosa em cada ponto de um ambiente, a densidade dos sólidos no interior da Terra, a pressão da atmosfera na troposfera, etc.

O vetor gradiente de ϕ , representado por **grad** $\phi(x, y, z)$, é definido como um vetor cujas coordenadas são as derivadas parciais de ϕ com relação a x , y e z respectivamente.

$$\mathbf{grad} \phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \quad (2.6)$$

Por exemplo, determinemos o gradiente do potencial eletrostático produzido por uma carga pontual q colocada na origem de um sistema de referência. Sabemos que o potencial é expresso por

$$V(x, y, z) = K \frac{1}{r}, \quad K = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Calculando a derivada parcial com relação a x fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= K \frac{\partial (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x} \\ \therefore \frac{\partial V}{\partial x} &= -K x (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

De modo semelhante, as outras derivadas são

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -K y (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -K z (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

O vetor gradiente será então

$$\mathbf{grad} V = -K (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})$$

O valor do vetor gradiente será obtido substituindo-se os valores de x , y e z correspondentes ao ponto onde se quer determinar o gradiente.

Observe nesse exemplo que podemos reescrever o gradiente em função da variável r

$$\mathbf{grad} V = -K \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -K \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} = -\mathbf{E}$$

onde \mathbf{E} é o vetor do campo eletrostático produzido pela carga. Essa relação é importante, pois permite obter o campo a partir do potencial eletrostático.

Mostremos o significado físico do vetor gradiente. Para isso, façamos um deslocamento arbitrário de um ponto $P(x, y, z)$ do espaço para uma nova posição $P'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$. A função escalar sofrerá uma variação dada por

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z + \dots$$

No limite em que os acréscimos das variáveis são muito pequenos, o vetor deslocamento $\Delta\mathbf{l}$ tenderá à $d\mathbf{l}$

$$\Delta\mathbf{l} = \Delta x\hat{\mathbf{i}} + \Delta y\hat{\mathbf{j}} + \Delta z\hat{\mathbf{k}} \longrightarrow d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{i}} + dy\hat{\mathbf{j}} + dz\hat{\mathbf{k}}.$$

E o acréscimo infinitesimal da função será

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz.$$

Da definição do vetor gradiente, equação (2.6), e do deslocamento $d\mathbf{l}$ podemos escrever

$$d\phi = \mathbf{grad} \phi \cdot d\mathbf{l}$$

ou

$$d\phi = |\mathbf{grad} \phi| |d\mathbf{l}| \cos \theta$$

onde θ é o ângulo formado entre o deslocamento $d\mathbf{l}$ e o vetor $\mathbf{grad} \phi$.

O deslocamento pode ser feito em qualquer direção e o acréscimo $d\phi$ da função depende dessa direção. Se escolhermos a direção e sentido do deslocamento na mesma direção e sentido do vetor gradiente teremos $\cos \theta = 1$ e a máxima variação possível para o acréscimo da função. Chegamos a duas conclusões importantes: o gradiente indica a direção e sentido que devemos nos deslocar para obter a máxima variação da função e o módulo do gradiente é igual à derivada direcional máxima.

$$|\mathbf{grad} \phi| = \left[\frac{d\phi}{dl} \right]_{max}.$$

2.2.2 O operador divergente

Esse operador é definido sobre uma função vetorial da posição transformando-a em uma função escalar da posição.

Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ uma função vetorial da posição, ou seja, uma função que associa um vetor a cada posição do espaço. Exemplos de funções vetoriais são o campo de aceleração gravitacional, o campo elétrico, o campo de velocidade da água em um rio etc.

Tomemos um ponto do espaço imerso no campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, uma superfície fechada S ao redor desse ponto e calculemos o fluxo de $\mathbf{F}(x, y, z)$ por essa superfície. Esse fluxo pode ser positivo se houver linhas de campo nascendo no interior da superfície, negativo se houver linhas morrendo no interior ou zero se a quantidade de linhas que nascem for igual à quantidade de linhas que morrem. Façamos agora a razão entre o fluxo e o volume interior à superfície à medida que superfície contrai ao redor do ponto.

O divergente de $\mathbf{F}(x, y, z)$ é definido como o limite dessa razão quando o volume tende a zero, se este limite existir.

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{V}.$$

Exemplo: Considere uma distribuição volumétrica de cargas elétricas com densidade $\rho(x, y, z) = dq/dv$. Determinemos o divergente do campo eletrostático em um ponto no interior dessa distribuição.

Tomemos um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ no interior da distribuição e uma pequena superfície fechada S ao redor desse ponto (Fig. 2.2). No interior dessa superfície existirão cargas elétricas que podem ser calculadas por

$$q = \int_V \rho(x, y, z) dv.$$

Se a superfície for suficientemente pequena, a densidade de cargas será essencialmente cons-

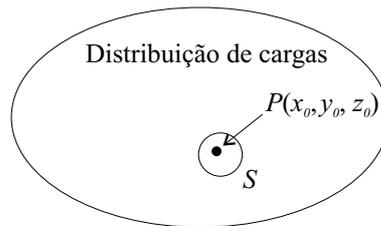


Figura 2.2: Um ponto no interior de uma distribuição volumétrica de cargas.

tante dentro do volume de integração e a carga poderá ser calculada por $q = \rho(x_0, y_0, z_0)V$.

A lei de Gauss diz que o fluxo do campo eletrostático por uma superfície fechada qualquer é igual à q/ϵ_0 . Portanto

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E}(x, y, z) &= \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\frac{q}{\epsilon_0}}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\rho(x_0, y_0, z_0)V}{\epsilon_0 V} \\ \therefore \operatorname{div} \mathbf{E}(x, y, z) &= \frac{\rho(x_0, y_0, z_0)}{\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Como o ponto P pode ser qualquer ponto no interior da distribuição teremos

$$\operatorname{div} \mathbf{E}(x, y, z) = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}. \quad (2.7)$$

Essa expressão também é válida para pontos fora da distribuição uma vez que a densidade de cargas é nula nestes pontos.

O divergente de um campo vetorial mede a “quantidade” de linhas de campo que nascem ou morrem no ponto. No caso do campo eletrostático esse divergente é diretamente proporcional à densidade de cargas elétricas.

A definição geométrica do divergente como o limite da razão entre o fluxo e o volume não é prática para avaliar o valor do divergente em todos os pontos, pois, teríamos que repetir essa operação em todos os pontos do espaço. Uma definição analítica equivalente se presta melhor nesse caso. Calculando o fluxo e o volume em uma superfície infinitesimal cúbica genérica é possível mostrar que o divergente de um campo vetorial $\mathbf{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$ vale

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (2.8)$$

Por essa expressão podemos ver facilmente que um campo constante tem divergência nula.

Exemplo:

Determinar o divergente do campo vetorial $F = 2x\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$.

A única derivada não nula é

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = 2.$$

Portanto,

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 2$$

Exemplo:

Determinar o divergente do campo vetorial $r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ (vetor posição).

Temos que

$$\frac{\partial r_x}{\partial x} = \frac{\partial r_y}{\partial y} = \frac{\partial r_z}{\partial z} = 1$$

Portanto,

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Um teorema importante chamado de “Teorema de Gauss” ou “Teorema da Divergência” permite transformar uma integral de superfície fechada em uma integral de volume. Esse teorema afirma que

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{F} dv. \quad (2.9)$$

Se aplicarmos esse teorema à lei de Gauss para o campo eletrostático

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\varepsilon_0}, \quad q = \int_V \rho dv$$

teremos

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dv = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dv = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, dv.$$

Como essa igualdade tem que ser válida para qualquer volume teremos que ter,

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

que é o mesmo resultado encontrado anteriormente.

2.2.3 O operador Rotacional

Esse operador é definido sobre uma função vetorial da posição transformando-a em uma outra função vetorial da posição.

Seja $\mathbf{F}(x, y, z)$ uma função vetorial da posição.

Tomemos um ponto do espaço imerso no campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z)$, uma superfície fechada S ao redor desse ponto e calculemos a integral

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} \, ds$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal externa à superfície S .

Observe que o produto vetorial nessa integral produz um vetor tangente à superfície em todos os pontos onde está sendo feita a integração.

Façamos agora a razão entre essa integral e o volume interior à superfície à medida que superfície contrai ao redor do ponto.

O rotacional de $\mathbf{F}(x, y, z)$ é definido como o limite dessa razão quando o volume tende a zero, se este limite existir.

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(x, y, z) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} \, ds}{V}$$

Do mesmo modo que no caso do divergente, essa definição não é prática para avaliar o rotacional em qualquer ponto do espaço e uma definição analítica é mais interessante. Pode-se mostrar que o rotacional de um campo vetorial \mathbf{F} pode ser expresso pela definição equivalente

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.10)$$

Exemplo:

Determinemos o rotacional do campo eletrostático produzido por uma carga pontual q colocada na origem de um sistema de referência.

Sabemos que esse campo é radial e dado por

$$\mathbf{E} = K \frac{\mathbf{r}}{r^3} = K \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \quad K = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}.$$

$$E_x = K \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \quad E_y = K \frac{y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}, \quad E_z = K \frac{z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}.$$

Calculemos as coordenadas do rotacional iniciando com

$$(\text{rot } E)_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right).$$

Temos

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = K z \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (2y) = -3 K z y (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = K y \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (2z) = -3 K y z (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Subtraindo essas derivadas obtemos

$$(\text{rot } E)_x = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = 0.$$

O mesmo ocorre com as outras coordenadas do rotacional. Portanto,

$$\mathbf{rot } \mathbf{E} = 0.$$

Ou seja, o campo eletrostático de uma carga pontual é irrotacional. Esse mesmo resultado pode ser generalizado para qualquer campo radial, independente de como o campo dependa da distância r .

Um teorema importante relaciona uma integral de caminho fechado com uma integral de superfície apoiada nesse caminho, o teorema do rotacional ou o teorema de Stokes. Esse teorema afirma que a integral de caminho fechado de um campo vetorial é igual ao fluxo do rotacional desse campo vetorial por qualquer superfície aberta apoiada nesse caminho.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \quad (2.11)$$

sendo que o sentido do caminho de integração e a normal à superfície obedecem à regra da mão direita.

Esse teorema ajuda a compreender o significado do rotacional de um campo vetorial.

Quando a integral de caminho fechado é diferente de zero, ou seja, quando o campo não é conservativo, esse campo deve necessariamente ter um rotacional diferente de zero. Por outro lado, se o campo é conservativo o rotacional desse campo deve ser nulo.

Muitos campos conhecidos possuem rotacional diferente de zero, o campo de velocidade do escoamento da água em movimento espiralado em um ralo de uma pia, o campo de escoamento turbilhonado do ar ou da água, o campo elétrico induzido de acordo com a lei de Faraday, o campo de indução magnética, etc.

2.2.4 Operadores diferenciais compostos

A aplicação sucessiva dos operadores gradiente, divergente e rotacional, quando possível, leva a um novo operador diferencial. Por exemplo, um operador muito importante pode

ser obtido pela aplicação do divergente sobre o gradiente de uma função escalar, conhecido como o laplaceano da função escalar ou operador de Laplace.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\mathbf{grad} \phi(x, y, z)] &= \operatorname{div} \left[\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right] \\ \operatorname{div} [\mathbf{grad} \phi(x, y, z)] &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Esse operador, quando aplicado ao potencial eletrostático resulta em

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\mathbf{grad} V(x, y, z)] &= \operatorname{div} (-\mathbf{E}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

conhecida como equação de Poisson.

Quando a densidade de cargas é nula (espaço vazio) essa equação reduz-se à

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (2.14)$$

conhecida como equação de Laplace.

Essas duas equações tem um papel importante na Física e nas Engenharias pois, é muito mais simples determinar primeiro a função potencial pela resolução dessas equações e, em seguida, calcular o campo pelo gradiente do que o cálculo direto do campo a partir das fontes.

Pode-se ainda definir o laplaceano de um campo vetorial \mathbf{F} a partir do laplaceano escalar. Esse vetor é definido como um vetor em que suas coordenadas sejam os laplaceanos escalares das coordenadas de \mathbf{F} .

$$\text{Laplaceano de } \mathbf{F} = \operatorname{div} [\mathbf{grad} F_x] \hat{\mathbf{i}} + \operatorname{div} [\mathbf{grad} F_y] \hat{\mathbf{j}} + \operatorname{div} [\mathbf{grad} F_z] \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.15)$$

Uma identidade útil pode ser obtida pela aplicação sucessiva do operador rotacional de um campo vetorial \mathbf{F}

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \text{laplaceano de } \mathbf{F}. \quad (2.16)$$

Essa identidade pode ser verificada pelo desenvolvimento dos dois lados da equação e posterior comparação.

2.2.5 O operador Nabla ou Del

Os operadores diferenciais que apresentamos podem ser convenientemente representados pela utilização de um operador simbolizado por ∇

$$\nabla () = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) ()$$

com as seguintes propriedades de definição:

1. Quando aplicado em uma função escalar como produto simples resulta em

$$\nabla(\phi(x, y, z)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \phi(x, y, z) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) = \mathbf{grad} \phi$$

2. Quando aplicado em uma função vetorial segundo a regra do produto escalar resulta em

$$\nabla \cdot (\mathbf{F}(x, y, z)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \mathit{div} \mathbf{F}(x, y, z)$$

3. Quando aplicado em uma função vetorial segundo a regra do produto vetorial resulta em

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{F}(x, y, z)) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{rot} \mathbf{F}(x, y, z) \end{aligned}$$

O laplaceano de uma função escalar ϕ pode ser escrito em termos do operador nabla:

$$\begin{aligned} \mathit{div} \mathbf{grad} \phi &= \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi \\ \nabla^2 \phi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

O laplaceano vetorial também pode ser escrito em termos do operador nabla:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla^2 F_x) \hat{\mathbf{i}} + (\nabla^2 F_y) \hat{\mathbf{j}} + (\nabla^2 F_z) \hat{\mathbf{k}}. \quad (2.18)$$

A identidade (2.16) fica escrita como

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{F} = \mathbf{grad} \mathit{div} \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}. \quad (2.19)$$

2.3 Forma diferencial das equações de Maxwell

Estamos, agora, em condições de transformar as equações de Maxwell da forma integral para a forma diferencial utilizando os operadores diferenciais e seus respectivos teoremas.

Já mostramos a partir da lei de Gauss para \mathbf{E} que

$$\mathit{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (2.20)$$

De modo semelhante, da lei de Gauss para \mathbf{B} teremos

$$\mathit{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.21)$$

Transformemos a lei de Faraday

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s},$$

observando que a variação temporal do fluxo do campo \mathbf{B} pode ter muitas causas. Pode ser que \mathbf{B} esteja variando no tempo, pode ser que a direção de \mathbf{B} com relação à normal à superfície esteja variando no tempo ou pode ser que a superfície esteja se deformando com o passar do tempo. Consideremos apenas as situações em que a geometria seja fixa, ou seja, consideremos que apenas \mathbf{B} esteja variando no tempo. Nesse caso, a derivada total pode entrar na integral como derivada parcial agindo apenas sobre \mathbf{B} .

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}.$$

Aplicando o teorema do rotacional à integral da esquerda fica

$$\oint_S \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (-) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}.$$

Como essa igualdade deve ser válida para qualquer superfície, deveremos ter que

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.22)$$

Essa é a forma diferencial da lei de Faraday.

Em outras palavras, a variação no tempo do campo de indução magnética é a causa da existência de um campo elétrico que possui rotacional (campo induzido).

Vejamos agora a transformação da lei de Ampère generalizada:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(i + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right).$$

Lembrando que a corrente i pode ser escrita como o fluxo do vetor densidade de corrente \mathbf{J} , podemos reescrever a lei como

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right).$$

Se considerarmos que a variação do fluxo do campo elétrico é devida apenas à variação do campo elétrico no tempo (geometria fixa) podemos entrar com a derivada na integral, como derivada parcial agindo apenas em \mathbf{E}

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \right).$$

Agrupando as integrais de superfície em uma única integral e utilizando o teorema de Stokes na integral da esquerda fica

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \left(\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s}.$$

Como essa igualdade deve ser verdadeira para qualquer superfície S , devemos ter

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2.23)$$

que é a forma diferencial da lei de Ampère.

Essa equação evidencia que o rotacional do campo induzido \mathbf{B} tem como causa a densidade de corrente \mathbf{J} e a variação do campo elétrico no tempo $\partial\mathbf{E}/\partial t$.

As quatro equações fundamentais da eletricidade e do magnetismo podem ser resumidas como:

1.
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

2.
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

3.
$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

4.
$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

2.4 A equação diferencial de onda no vácuo

Uma situação particularmente interessante é o caso do vácuo (ausência de matéria) onde não existe densidade de carga nem densidade de corrente. Nesse caso particular as equações de Maxwell tomam a forma

1.
$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \tag{2.24}$$

2.
$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{2.25}$$

3.
$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.26}$$

4.
$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{2.27}$$

Nessa situação as equações são simétricas, a menos de constantes. A existência de um dos vetores do campo é condicionada à existência do outro vetor do campo. Mostremos, agora, que é possível a auto-sustentação dos campos. Para isso, tomemos o rotacional do rotacional do campo elétrico de acordo com a equação (2.16).

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}.$$

Mas, de acordo com as equações (2.27) e (2.24) fica

$$\operatorname{rot} \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \mathbf{E}.$$

Permutemos a ordem de diferenciação entre o rotacional e a derivada temporal, isso é possível uma vez que o rotacional é composto por derivadas espaciais.

$$\left(-\frac{\partial \mathbf{rot} \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\nabla^2 \mathbf{E}.$$

Substituindo a equação (2.26) fica

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = -\nabla^2 \mathbf{E}$$

ou

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (2.28)$$

Se tivéssemos calculado o $\mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{B}$, procedendo do mesmo modo, encontraríamos

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (2.29)$$

Essas duas equações vetoriais idênticas são compostas, cada uma, por três equações escalares para as coordenadas do respectivo vetor

$$\nabla^2 E_x = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 E_y = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 E_z = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

e

$$\nabla^2 B_x = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 B_y = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 B_z = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}.$$

Essas equações são da forma geral

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \frac{1}{v^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

que é a equação diferencial de uma onda nas variáveis x , y , z e t que propaga com uma velocidade v . Compare com as equações diferenciais unidimensionais, ao longo do eixo ox por exemplo, da onda sonora (onda longitudinal de pressão, P , no ar) ou da onda na corda (onda de deslocamento transversal, h) que são do mesmo tipo.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$$

ou

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}.$$

A única diferença é que agora estamos lidando com uma onda que propaga no espaço tridimensional e no tempo.

Por comparação com essas equações diferenciais para as ondas mecânicas vemos que a velocidade de propagação vale

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

que denominaremos de c .

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \times 10^{-12} \times 4\pi \times 10^{-7}}} \approx 2,99 \times 10^8 \text{ m/s.}$$

Observe que esse valor de velocidade depende das propriedades elétricas e magnéticas do vácuo. Quando Maxwell previu esse comportamento no século XIX, foi muito difícil, para as pessoas daquela época, aceitar a possibilidade de existir um comportamento ondulatório de alguma coisa no vácuo, uma vez que as pessoas só estavam acostumadas com ondas mecânicas nos meios materiais. Essa dúvida perdurou por quase um século para muitos cientistas e chegou-se a aventar a possibilidade da existência de um meio material invisível e intangível denominado de “Éter”. A ideia do Éter é muito antiga, já fazia parte da cosmologia de Aristóteles na Grécia antiga e perdurou ao longo dos séculos. Contudo, todas as experiências que foram até hoje realizadas para a detecção de tal meio falharam. Não existe nenhuma evidência experimental da existência desse meio.

Esse tipo de equação diferencial de onda possui uma infinidade de soluções. Qualquer função “bem comportada”, da variável $(p - ct)$, onde p é uma variável espacial na direção de propagação da onda, derivável até pelo menos segunda ordem no espaço e no tempo, satisfaz essa equação de onda.

2.5 A solução onda plana no vácuo

Estudaremos uma solução simples, muito importante, conhecida como onda plana harmônica. A importância dessa solução consiste no fato de podermos utilizá-la para construir outras soluções, mais complexas e mais próximas da realidade, via superposição de diversas componentes discretas ou mesmo contínuas.

Uma onda plana é definida como uma onda em que a perturbação (grandeza que ondula) é constante sobre um plano perpendicular à direção de propagação em cada instante de tempo. Por exemplo, se uma onda de campo elétrico propaga ao longo do eixo ox , o vetor do campo elétrico é constante sobre o plano yz em cada instante de tempo. Em outras palavras, para um dado instante de tempo o vetor do campo elétrico não depende das variáveis y e z sobre o plano yz . Contudo, nada impede que esse vetor assuma um outro valor em um plano paralelo ao plano anterior no mesmo instante de tempo ou que assuma um outro valor sobre o mesmo plano em um outro instante de tempo.

Relembremos a equação de um plano cuja normal seja o versor $\hat{\mathbf{K}}$. Tomemos um sistema de referência cartesiano e um plano π que, de maneira geral, intercepte os eixos desse sistema e localizemos um ponto $P(x, y, z)$ qualquer do plano pelo vetor posição \mathbf{r} (Fig. 2.3).

Todos os pontos do plano tem uma coisa em comum, a projeção do vetor posição do ponto ao longo da direção da normal ao plano tem o mesmo valor, ou seja, é uma constante.

$$(\text{Proj } \mathbf{r})_{\hat{\mathbf{K}}} = \hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} = C', \quad C' = \text{constante.}$$

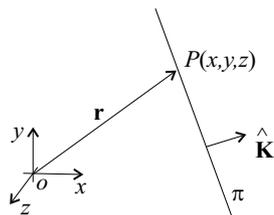


Figura 2.3: Localização de um ponto genérico no plano π (visto de corte) através do vetor posição r .

Em outras palavras, os pontos do plano são aqueles em que essa equação é obedecida. Se definirmos um vetor $\mathbf{K} = K\hat{\mathbf{K}}$ não unitário, a equação do plano pode ser reescrita como

$$\frac{\mathbf{K}}{K} \cdot \mathbf{r} = C', \quad C' = \text{constante}$$

ou

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = KC' = C, \quad C = \text{constante}.$$

Mostremos que uma onda harmônica do vetor do campo elétrico dada pela equação vetorial

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \text{sen}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad \mathbf{E}_0 = \text{vetor constante e } \omega = \text{constante}$$

satisfaz à definição de onda plana. Para isso tomemos um instante de tempo fixo tal que $\omega t = \text{constante}$ e procuremos determinar sob que condição o vetor do campo elétrico permanece constante. Teremos

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \text{sen}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \text{cte}) = \mathbf{cte}'.$$

Como a amplitude vetorial \mathbf{E}_0 é uma constante deveremos ter que a função senoidal seja uma constante. Porém, isso só ocorrerá se o argumento da função senoidal for constante, ou seja,

$$(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \text{cte}) = \text{cte}''$$

logo,

$$(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) = \text{cte}'' + \text{cte} = \text{cte}'''.$$

que é justamente a equação de um plano perpendicular à direção de \mathbf{K} . Observe ainda que o vetor do campo elétrico só se altera se passarmos desse plano a um outro plano paralelo. Portanto, \mathbf{K} está na direção de propagação da onda.

Verifiquemos, agora, que essa onda, de fato, satisfaz a equação diferencial de onda. Para isso, observemos que qualquer coordenada E_x , E_y ou E_z satisfaz a equação diferencial de onda no vácuo.

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Tomemos E_x , por exemplo

$$E_x = E_{0x} \text{sen}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

e reescrevamos o produto escalar notando que $\mathbf{K} = K_x \hat{\mathbf{i}} + K_y \hat{\mathbf{j}} + K_z \hat{\mathbf{k}}$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = (K_x \hat{\mathbf{i}} + K_y \hat{\mathbf{j}} + K_z \hat{\mathbf{k}}) \cdot (x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}) = K_x x + K_y y + K_z z.$$

Fica

$$E_x = E_{0x} \text{sen}(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t).$$

Calculemos $\nabla^2 E_x$

$$\nabla^2 E_x = E_{0x} \nabla^2 [\text{sen}(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t)]$$

$$\nabla^2 E_x = E_{0x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) [\text{sen}(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t)]$$

$$\nabla^2 E_x = -E_{0x} (K_x^2 + K_y^2 + K_z^2) \text{sen}(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t) = -K^2 E_x$$

Calculemos, agora a segunda derivada com relação ao tempo

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x = -\omega^2 E_{0x} \text{sen}(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t) = -\omega^2 E_x.$$

Substituindo na equação diferencial fica

$$\begin{aligned} -K^2 E_x &= \frac{1}{c^2} (-\omega^2 E_x) \\ \therefore K^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \end{aligned}$$

ou, tomando a raiz positiva,

$$\omega = K c.$$

Essa é a única condição para que a função seja solução da equação de onda. Esse resultado se aplica a qualquer coordenada do campo elétrico ou do campo de indução magnética.

2.5.1 Comprimento e onda e frequência

A função que descreve a onda plana harmônica é uma função periódica no espaço e no tempo. Quando tiramos uma “foto” de uma onda, paralisamos a variável tempo (fazemos $t = \text{cte.}$) e representamos a função apenas como função do espaço.

Por outro lado, quando observamos o valor do campo em um ponto fixo do espaço, fazemos $\mathbf{r} = \mathbf{cte}$ e representamos a função apenas como função do tempo. Neste caso, costumamos definir o período temporal T como o mínimo intervalo de tempo para que a função repita seu valor, ou seja,

$$f(\text{cte}, t + T) = f(\text{cte}, t).$$

Tomando uma coordenada do campo elétrico, E_x por exemplo, teremos

$$E_x(\text{cte}, t + T) = E_x(\text{cte}, t)$$

ou

$$E_{0x} \text{sen}(\text{cte} - \omega(t + T)) = E_{0x} \text{sen}(\text{cte} - \omega t).$$

veja a figura (Fig. 2.4).

Como, $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$, fica

$$-\text{sen}(\omega(t + T) - \text{cte}) = -\text{sen}(\omega t - \text{cte}).$$

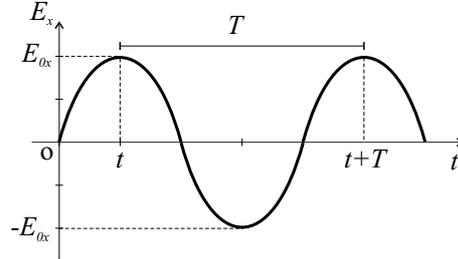


Figura 2.4: Período temporal em uma onda.

Logo,

$$\omega(t+T) - cte = \omega t - cte + 2\pi$$

$$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \text{ rad/s, é a frequência angular.}$$

Consideremos, agora, que o tempo foi paralisado (uma foto). A função dependerá apenas da variável espacial $\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}$. Nessa situação, definimos o período espacial, ou comprimento de onda λ , como a distância, ao longo da direção de propagação, em que a função repete seu valor (Fig. 2.5).

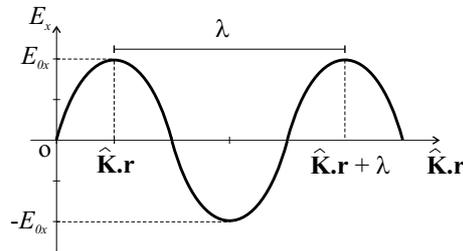


Figura 2.5: Período espacial em uma onda.

Ou seja,

$$E_x(\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} + \lambda, cte) = E_x(\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}, cte)$$

ou

$$E_{0x} \text{ sen}[K(\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} + \lambda) - cte] = E_{0x} \text{ sen}(K\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} - cte).$$

Isso ocorre quando o argumento do seno varia de 2π

$$K(\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} + \lambda) - cte = K\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} - cte + 2\pi$$

$$\therefore K\lambda = 2\pi, \quad K = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ rad/m}$$

O vetor \mathbf{K} é chamado de vetor de onda e seu módulo K é chamado de número de ondas (nome histórico relacionado à quantidade de comprimentos de ondas que cabem em uma unidade de comprimento).

2.5.2 Relações entre os vetores \mathbf{E} , \mathbf{B} e \mathbf{K}

Inicialmente, poderia-se pensar na possibilidade do vetor do campo elétrico \mathbf{E} estar defasado do vetor do campo de indução magnética \mathbf{B} . Isso não altera o fato de ambos satisfazerem a equação diferencial de onda, pois, uma constante adicionada ao argumento da função não contribui em nada nas operações de derivação. Contudo, os dois vetores estão relacionados pela lei de Ampère e pela lei de Faraday que ligam a derivada espacial de um vetor com a derivada temporal do outro vetor. Isso faz com que não seja possível haver diferença de fase entre os vetores, pois, se houvesse, essas equações não seriam satisfeitas, não é possível igualar uma função senoidal a outra função senoidal defasada para todos os valores dos argumentos das funções.

Portanto, a primeira conclusão é que os dois vetores possuem a mesma fase.

Tomemos a equação do divergente para ambos os vetores, $\text{div}\mathbf{E} = \text{div}\mathbf{B} = 0$.

$$\text{div}\mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\text{div}\mathbf{E} = E_{0x} \frac{\partial}{\partial x} \text{sen}(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t) + E_{0y} \frac{\partial}{\partial y} \text{sen}(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t)$$

$$+ E_{0z} \frac{\partial}{\partial z} \text{sen}(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t) = 0$$

$$\text{div}\mathbf{E} = [E_{0x}K_x + E_{0y}K_y + E_{0z}K_z] \cos(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t) = 0$$

ou

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{K} = 0.$$

Ou seja, o vetor do campo elétrico é perpendicular ao vetor de propagação. De modo análogo, o vetor indução magnética também é perpendicular ao vetor de propagação. Contudo, ainda não podemos concluir nada a respeito da direção entre \mathbf{E} e \mathbf{B} além do fato de ambos serem coplanares no plano perpendicular à direção de propagação. Isso caracteriza o caráter transversal da oscilação. As direções de vibração dos vetores dos campos são perpendiculares à direção de propagação. Portanto, a onda eletromagnética no vácuo é uma *onda transversal*.

Tomemos, agora, a lei de Faraday

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e façamos o cálculo do rotacional por componentes, iniciando com a coordenada x

$$[\text{rot}\mathbf{E}]_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = (E_{0z}K_y - E_{0y}K_z) \cos(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t).$$

De modo análogo teremos para as outras coordenadas

$$[\text{rot}\mathbf{E}]_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = (E_{0x}K_z - E_{0z}K_x) \cos(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t),$$

$$[\text{rot}\mathbf{E}]_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = (E_{0y}K_x - E_{0x}K_y) \cos(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t).$$

Portanto,

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{K} \times \mathbf{E}_0 \cos(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t).$$

Calculemos a derivada com relação ao tempo

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\omega \mathbf{B}_0 \cos(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t).$$

Substituindo na lei de Faraday fica

$$\mathbf{K} \times \mathbf{E}_0 \cos(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t) = \omega \mathbf{B}_0 \cos(K_x x + K_y y + K_z z - \omega t)$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \times \mathbf{E}_0 &= \omega \mathbf{B}_0 \\ \therefore \mathbf{B}_0 &= \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{E}_0}{\omega}. \end{aligned}$$

Lembrando que, no vácuo $K = \omega/c$ também podemos escrever

$$\therefore \mathbf{B}_0 = \frac{\hat{\mathbf{K}} \times \mathbf{E}_0}{c}.$$

Podemos concluir que o vetor do campo de indução magnética é perpendicular ao vetor do campo elétrico. Em resumo, os três vetores são mutuamente ortogonais.

A utilização da lei de Ampère permite, de modo análogo, explicitar \mathbf{E}_0 em função de \mathbf{B}_0

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\omega}{K} \mathbf{B}_0 \times \hat{\mathbf{K}}$$

É importante notar que, *em módulo*, $B = E/c$ no vácuo. Isso faz com que o valor numérico de B seja muito menor que o valor numérico de E (no sistema de unidades MKS). A figura (Fig. 2.6) mostra os vetores uma onda eletromagnética que propaga para a direita em um certo instante de tempo. Os eixos não estão na mesma escala!

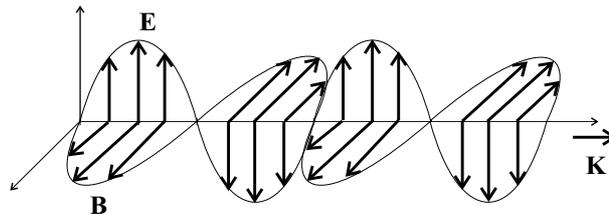


Figura 2.6: Representação de trecho de uma onda eletromagnética.

2.6 A onda eletromagnética nos meios dielétricos

De modo semelhante ao vácuo, em um meio dielétrico neutro não existe densidade de cargas livres nem densidade de corrente. Consequentemente, as equações de Maxwell no meio dielétrico tem a mesma forma das equações no vácuo, diferenciando apenas nos valores das constantes de permissividade elétrica e permeabilidade magnética que passam a assumir

os valores ε e μ . Sendo assim, temos as mesmas equações de onda e as mesmas soluções, com ondas propagando com a velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

A experiência mostra que, em todos os meios materiais conhecidos, a velocidade de propagação é menor que a velocidade de propagação no vácuo. Para caracterizar esse fato define-se o índice de refração de um meio como a relação entre a velocidade no vácuo e a velocidade no meio

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Além disso, verifica-se que nos meios ópticos transparentes e não magnéticos o valor da permeabilidade magnética do meio é muito próximo do valor da permeabilidade magnética do vácuo, $\mu \approx \mu_0$, de modo que

$$n = \frac{c}{v} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}.$$

Outro fato experimental importante é que a permissividade elétrica, em geral, depende da frequência (ou do comprimento de onda) da radiação

$$\varepsilon = \varepsilon(\omega), \quad \varepsilon = \varepsilon(f), \quad \varepsilon = \varepsilon(\lambda).$$

Isso é uma propriedade do meio e não existe uma função que represente esse comportamento e que seja válida para todos os meios. Contudo, em alguns casos é possível fazer um modelo microscópico teórico para o meio material que represente, de modo aproximado, a variação dessa propriedade em uma certa faixa de frequências. Portanto, em geral, podemos dizer que o índice de refração varia com a frequência.

$$n = n(\omega), \quad n = n(f) \quad \text{ou} \quad n = n(\lambda)$$

Para se ter ideia da extensão dessa variação tomemos a água pura por exemplo. Na região da luz visível o índice de refração vale 1,33 enquanto na região de baixas frequências (ondas de rádio) o índice chega a atingir 9,0.

Normalmente, quando se especifica o índice de refração de uma determinada substância e não se indica o valor da frequência, subentende-se que esse índice se refere à luz amarela emitida pelo átomo de sódio ($\lambda = 589 \text{ nm}$).

2.7 O espectro eletromagnético no vácuo

Conforme vimos anteriormente, não existe limitação teórica para a frequência e o comprimento de onda de uma onda eletromagnética no vácuo desde que a relação $\omega = Kc$ ou $c = \lambda f$ seja obedecida. Ou seja, em princípio, é possível gerar onda eletromagnética com qualquer frequência.

A produção de uma onda eletromagnética tem origem na oscilação de uma carga elétrica. Quando forçamos uma carga elétrica a oscilar, por exemplo, por meios mecânicos ou mesmo em um circuito RLC, os vetores dos campos elétrico e magnético variam no tempo gerando a onda eletromagnética. A frequência da onda é a mesma frequência da carga oscilante. Logo,

a possibilidade de gerar uma onda com determinada frequência fica atrelada à possibilidade de por a carga elétrica para oscilar com esta frequência. Na prática, a oscilação das cargas ocorre nas *antenas* que são dispositivos projetados e construídos com esse objetivo. Um pedaço de fio ou até mesmo um circuito LC pode funcionar como uma antena. Verifica-se, experimentalmente, que para uma antena irradiar com eficiência suas dimensões geométricas devem ser da ordem do comprimento de onda da radiação (usualmente metade ou um quarto do comprimento de onda). Sendo assim, se desejássemos gerar uma onda eletromagnética com uma frequência de 1 Hz cujo comprimento de onda no vácuo vale $\lambda = c/f$ deveríamos ter uma antena de meio comprimento de onda com $1,5 \times 10^8$ m ! Isso é impraticável.

Por outro lado, a produção de ondas eletromagnéticas com frequências extremamente elevadas também torna-se muito difícil pois as antenas teriam que ter dimensões microscópicas. Contudo, existem processos naturais não controlados que chegam a produzir tais radiações e o espectro de frequências conhecido para as ondas eletromagnéticas vai de fração de hertz a valores tão altos como 10^{20} hertz.

Cada faixa do espectro eletromagnético recebe uma denominação, porém seus limites não são muito exatos. Uma divisão grosseira, contudo explicativa, será apresentada:

- Ondas longas de rádio:

Vai de frações de hertz a aproximadamente 100 kHz (comprimento de onda maior que 1000 Km aproximadamente). Ocorrem na natureza e também são produzidas com circuitos oscilantes podendo ser usadas para comunicações transoceânicas propagando sobre a superfície dos oceanos.

- Ondas médias de rádio:

Frequências entre 500 kHz e 1,7 MHz aproximadamente (comprimento de onda de dezenas a centenas de metros), utilizadas pelas rádios comerciais que operam com amplitude modulada (AM). A informação, voz, som, etc. é transmitida variando-se a amplitude da onda eletromagnética (portadora). É produzida por circuitos convencionais, osciladores LC e osciladores a cristal de quartzo.

- Ondas curtas:

Estende-se de 2MHz a 10^{13} Hz. É uma faixa muito ampla e bastante subdividida. Nas frequências mais baixas tem-se rádios comerciais em amplitude modulada que transmitem a grandes distâncias aproveitando-se do fenômeno da reflexão na ionosfera em determinada parte do ciclo diário de bombardeamento das altas camadas da atmosfera pelos raios do sol, que as tornam ionizadas e funcionando como espelho. À noite é possível receber sinais de diversas estações de rádio localizadas em outras partes do mundo. Utiliza-se também para serviços de comunicação privados a grandes distâncias (centenas de quilômetros). Nas frequências em torno de 100 MHz tem-se os canais baixos de TV, as rádios comerciais que transmitem em frequência modulada (FM: 88-108 MHz), estações de rádio para auxílio de navegação aérea (108- 118 MHz), rádio comunicação entre aeronaves (118-136 MHz) em amplitude modulada, rádio para barcos e navios (156 MHz em FM), canais altos de TV e canais muito altos de TV (UHF). Acima de poucas centenas de MHz tem-se a região de micro-ondas onde estão os telefones celulares (em torno de 1 GHz) o forno de micro-ondas em 1,45 GHz, os sinais de comunicação via satélite (em torno de 10 GHz) e a faixa de micro-ondas milimétricas.

Até perto de 2 GHz ainda se consegue gerar a onda eletromagnética por meio de circuitos elétricos. Contudo, não é mais possível considerar os parâmetros concentrados, não se pode mais considerar que as capacitâncias, indutâncias e resistências estão concentradas individualmente nos componentes. Já é necessário utilizar o conceito de parâmetros distribuídos. A partir dessas frequências não se pode mais trabalhar com “circuitos” sendo necessário introduzir os guias de ondas, as cavidades ressonantes e novas técnicas de produção da oscilação eletrônica para a geração da onda. Estamos no limite da produção da onda eletromagnética por meios eletrônicos. A região das micro-ondas estende-se ao início da região infravermelha.

- O infravermelho:

Nessa região ($10^{12} - 10^{14}$ Hz, aproximadamente) não é mais possível produzir a radiação por meios eletrônicos. Essa faixa corresponde às frequências de vibração térmicas de átomos e moléculas e a produção dessa radiação está associada ao efeito Joule, produção de calor pela passagem de uma corrente elétrica. Muitas moléculas orgânicas absorvem e emitem radiação nessa faixa de modo não controlado. Na região infravermelha próxima (do visível) já existem dispositivos semicondutores (LEDs e LASERS) que produzem radiação em determinadas frequências que são utilizadas para comunicação com fibras ópticas e gravação/leitura de dados em mídia óptica.

- Luz visível:

Essa é uma faixa bastante estreita do espectro eletromagnético cujo comprimento de onda vai decrescendo de 700 nm (vermelho) a 400 nm (violeta) e que produz a sensação de cor ou matiz ao olho humano normal. Basicamente, essas frequências podem ser obtidas a partir da luz branca, emitida por um corpo aquecido a altas temperaturas, por um processo de filtragem seletiva com substâncias absorvedoras, por dispersão da luz em um meio de índice de refração variável e forma geométrica conveniente (prisma de vidro por exemplo) e posterior seleção ou por um processo de interferência construtiva (rede de difração). Determinados valores de frequências e comprimentos de onda também podem ser obtidos por descarga elétrica em um gás ou pela utilização de dispositivos semicondutores (LEDs)

- Radiação ultravioleta:

Corresponde às frequências acima da luz violeta no fim do espectro visível indo a aproximadamente 10^{17} Hz onde se confunde com o início da faixa dos raios-X moles. Essa faixa caracteriza-se por produzir efeitos ionizantes sobre várias substâncias. Pode produzir quebra de ligações químicas transformando muitos compostos orgânicos produzindo, inclusive, alterações no código genético. É uma faixa de frequências em que ocorrem muitas ressonâncias nos osciladores naturais (átomos e moléculas). Transforma o oxigênio em ozônio e extermina muitas formas de vida, inclusive bactérias, sendo utilizada em processos de esterilização. É fortemente absorvida pelo vidro comum mas é transmitida pelo quartzo ou sílica de modo que uma lâmpada bactericida tem que ter o bulbo feito de quartzo. A radiação ultravioleta pode ser obtida, em determinadas frequências, por descarga elétrica em gases como Hg e Xe. Lâmpadas fluorescentes e halógenas a produzem sendo necessário filtrá-la com filtro de vidro, no caso das halógenas, cujo bulbo normalmente é de quartzo. Essa radiação também pode ser produzida nos aceleradores de partículas em grandes intensidades para uso específico. A radiação do Sol é rica em radiação ultravioleta intensa.

- Raios-X:

Essa faixa de frequências da radiação eletromagnética inicia-se em torno de 10^{16} Hz coincidindo com a região final da radiação ultravioleta em direção às altas frequências sendo conhecido também como raios-X moles. Os raios-X podem ser produzidos por fontes radioativas naturais com valores bem definidos e fixos de frequência ou por meios artificiais desacelerando bruscamente uma carga elétrica em um choque com um alvo fixo ou mesmo acelerando cargas elétricas em aceleradores de partículas. O processo mais utilizado é o da desaceleração brusca, normalmente executado sobre um feixe de elétrons que foi previamente acelerado até energias da ordem de dezenas de keV (quilo-elétron-volt). Por exemplo, em um cinescópio de televisão de 20" a 29" acelera-se o feixe de elétrons a uma diferença de potencial de até 25 kV e esse feixe é direcionado para a tela de vidro revestida com uma substância fosforescente. Ao chocar-se com o vidro o elétron é desacelerado e emite raios-X moles que são absorvidos pelo próprio vidro e pelo ar exterior que o circunda. Para uso médico e odontológico a desaceleração é realizada em um alvo de metal duro (usualmente o tungstênio) e o potencial de aceleração pode chegar a 70 kV ou mais produzindo raios-X duros (comprimento de onda da ordem de 10^{-10} m).

- Raios- γ :

Essa faixa de radiação inicia-se em torno de 10^{18} Hz e estende-se a 10^{24} Hz cujos raios passam a se chamar raios cósmicos. É produzida pelas fontes radioativas naturais e artificiais sendo altamente penetrante na matéria ordinária de baixa densidade podendo ser absorvida por substâncias muito densas como o chumbo. Resulta dos processos naturais que ocorrem no interior do núcleo atômico e não pode ser controlada. Encontra aplicações na esterilização de alimentos e artefatos médicos, na radiografia industrial de soldas metálicas, sensores de nível em silos e controle de qualidade na produção de metais. A radiação cósmica corresponde à radiação gama de alta frequência de origem cósmica.

2.8 O vetor de Poynting

Sabemos, do caso eletrostático e do caso das correntes estacionárias, que os módulos dos vetores dos campos elétrico e de indução magnética estão associados às respectivas densidades de energias através das expressões

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

e

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Em uma onda eletromagnética, em cada instante de tempo e em cada ponto do espaço, os vetores do campo eletromagnético possuem valores bem definidos que podem ser associados às densidades de energias naquele momento e naquela posição. Consideremos, por exemplo, uma onda eletromagnética plana e harmônica propagando para a direita como mostra a figura (Fig. 2.7) em um determinado instante de tempo fixo.

Tomando uma fatia do espaço perpendicular à direção de propagação com espessura dx e área A (Fig. 2.8) haverá campo eletromagnético no interior dessa fatia. Como a fatia tem

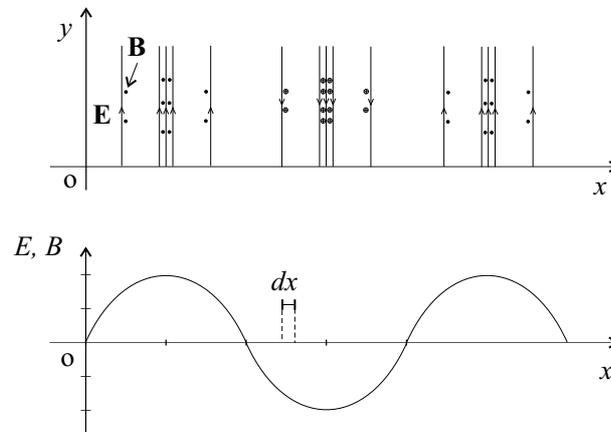


Figura 2.7: Representação da onda eletromagnética para um tempo fixo.

espessura infinitesimal, os vetores do campo serão praticamente constantes no interior da fatia e poderemos associar densidades de energia constante a este campo.

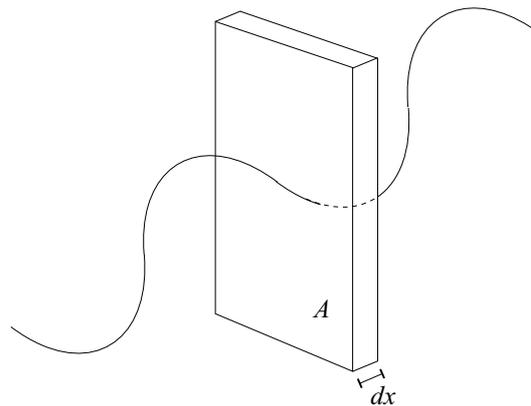


Figura 2.8: Fatia do espaço sendo atravessada por uma onda eletromagnética.

A energia no interior da fatia pode ser determinada pelo produto da densidade de energia total (elétrica e magnética) pelo volume da fatia.

$$dU = (u_E + u_B)dV = (u_E + u_B)A dx.$$

Em um intervalo de tempo dt a onda percorre a distância $dx = c dt$ e a energia contida no interior da fatia atravessará sua fronteira.

$$dU = (u_E + u_B)A c dt.$$

A intensidade, I , da onda é definida como a energia por unidade de tempo por unidade de área que atravessa um plano perpendicular à direção de propagação da onda, ou seja,

$$I = \frac{dU}{A dt} = (u_E + u_B)c.$$

Substituindo as expressões das densidades de energia e lembrando que $E = cB$ teremos

$$I = \frac{dU}{A dt} = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) c = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E E + \frac{B B}{\mu_0} \right) c = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E c B + \frac{B E}{c \mu_0} \right) c.$$

como $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$ fica

$$I = \frac{EB}{\mu_0}. \quad (2.30)$$

Em uma onda eletromagnética os campos oscilam muito rapidamente em função do tempo e os efeitos físicos mensuráveis, como aquecimento e luminosidade, são efeitos médios e raramente interessa o valor da intensidade instantânea. Como os campos são funções senoidais do tempo e do espaço, o valor médio no tempo da intensidade em um ponto do espaço pode ser facilmente determinado.

$$\langle I \rangle = \frac{\langle EB \rangle}{\mu_0} = \frac{\langle E_0 B_0 \sin^2(cte - \omega t) \rangle}{\mu_0} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}.$$

É conveniente expressar esse resultado em função, apenas, do campo elétrico uma vez que a maioria dos instrumentos (inclusive o olho) são sensíveis a este campo.

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{c \mu_0}$$

ou, em função do valor eficaz, $E_{ef} = E_0/\sqrt{2}$,

$$\langle I \rangle = \frac{E_{ef}^2}{c \mu_0} \approx \frac{E_{ef}^2}{377} \text{ W/m}^2. \quad (2.31)$$

O vetor de Poynting é definido como sendo um vetor que aponta no sentido da transmissão da energia (propagação da onda) e cujo módulo seja a intensidade da onda.

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (2.32)$$

O fluxo do vetor de Poynting por uma superfície dá a potência que atravessa esta superfície.

$$P(t) = \int_{\text{Sup.}} \mathbf{S}(t) \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.33)$$

Exemplo:

Uma estação de televisão cuja potência média de radiação vale 100 kW irradia, em sua antena, onda eletromagnética isotropicamente (igualmente em todas as direções). Determinar o valor do campo elétrico eficaz a uma distância r da antena supondo que a essa distância a onda possa ser considerada como plana. Avalie o valor do campo a 500 m e a 20 km de distância. A figura (Fig. 2.9) mostra a situação do problema.

Como a radiação é isotrópica, a potência média se distribui sobre uma superfície esférica de raio r e a intensidade em um ponto a essa distância é dada por

$$\langle I \rangle = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}$$

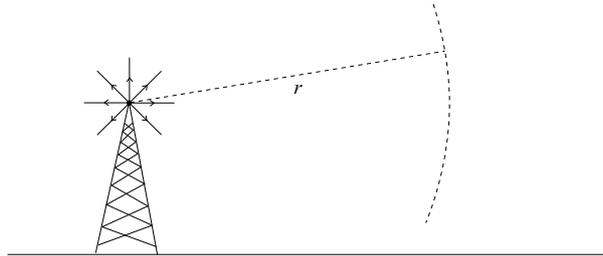


Figura 2.9: Antena irradiando uma onda eletromagnética isotropicamente.

ou

$$\frac{E_{ef}^2}{377} = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2} \quad \therefore E_{ef} = \frac{1}{r} \sqrt{377 \frac{\langle P \rangle}{4\pi}}$$

Substituindo-se os valores fornecidos encontraremos aproximadamente que

$$E_{ef}(500 \text{ m}) = 3,3 \text{ V/m}$$

e

$$E_{ef}(20 \text{ km}) = 86 \times 10^{-3} \text{ V/m}.$$

2.9 Momentum em uma onda eletromagnética

Quando uma onda eletromagnética incide em um corpo absorvedor (resistivo) o vetor do campo elétrico põe as cargas elétricas do corpo em movimento oscilatório. Essas cargas em movimento interagem com o vetor do campo de indução magnética produzindo uma força que é perpendicular à velocidade da carga e à indução magnética, ou seja, na direção de propagação da onda. Essa força empurra o corpo absorvedor. Foi previsto que, sendo ΔU a quantidade de energia absorvida pelo corpo em um intervalo de tempo Δt , uma quantidade de movimento Δp é transferida ao corpo absorvedor segundo a expressão

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c} = \frac{\langle I \rangle A \Delta t}{c}$$

sendo A a área frontal do corpo absorvedor (área perpendicular à direção da onda). Portanto, uma força F dada por

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\langle I \rangle A}{c}$$

será aplicada ao corpo.

A verificação experimental dessa expressão é difícil de ser realizada para ondas de intensidades usuais devido ao enorme valor de c que produz forças muito pequenas. Foi necessário utilizar uma balança de torção em um ambiente evacuado para medir tal força e somente após o desenvolvimento de bombas de alto vácuo foi possível verificar a validade dessa expressão. O ambiente evacuado é extremamente necessário para a obtenção correta dos resultados experimentais uma vez que a agitação térmica das moléculas de ar que incidem no corpo pode produzir um resultado oposto ao esperado quando o corpo se aquece (e o ar também) sob a incidência da radiação.

Quando o corpo reflete integralmente a radiação (espelho) na direção oposta à direção de incidência, a quantidade de movimento transferida ao corpo vale o dobro do caso anterior. Consequentemente, o valor da força também é dobrado.

Exemplo:

A intensidade média da radiação solar que chega ao solo na região nordeste do Brasil em um dia sem nuvens ao meio dia vale em torno de 800 W/m^2 . Avalie a força exercida por essa radiação sob um cidadão deitado, vestido com uma roupa negra (absorvedora) sob incidência normal. Suponha que a área equivalente seja retangular com $1,7 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$.

De acordo com a expressão acima temos:

$$F = \frac{\langle I \rangle A}{c} = \frac{800 \times 1,7 \times 0,5}{2,99 \times 10^8} \approx 2,3 \times 10^{-6} \text{ N}$$

que é um valor extremamente pequeno para ser perceptível pelos nossos sentidos. Afinal, ninguém nunca se sentiu esmagado ao tomar um banho de sol!

Capítulo 3

A natureza da luz

Nesse capítulo faremos uma breve discussão sobre alguns fatos relacionados com a natureza da radiação eletromagnética, em particular, com a luz visível.

3.1 A luz visível

O que ordinariamente chamamos de luz corresponde à região do espectro eletromagnético capaz de ser detectada pelo olho humano, cujos comprimentos de onda vão de 400 nm a 700 nm aproximadamente. Esse fato simples não foi reconhecido por muitos séculos. Desde a época de Isac Newton não se conhecia exatamente qual era a natureza da luz e o próprio Newton defendia a tese de que a luz era composta por corpúsculos enquanto que Hooke, seu contemporâneo, defendia a natureza ondulatória apesar de não saber que propriedade ondulava. A disputa era tão ferrenha que Newton esperou a morte de Hooke (que era mais velho) em 1703 para publicar o seu famoso tratado sobre a Óptica em 1704.

Outra questão importante era a da determinação da velocidade da luz. Desde a antiguidade já se sabia que a luz era mais rápida que o som e credita-se a Galileu a primeira tentativa para a medida dessa velocidade. Galileu (1600) teria chegado à conclusão de que “se a luz não fosse instantânea seria extremamente rápida”. Em 1675 Roemer, na França, determina o valor de 200.000 km/s utilizando métodos astronômicos e em 1729 Bradley, na Inglaterra, encontra o valor de 304.000 km/s também por métodos astronômicos. Pouco mais de um século após, em 1862 na França, Foucault encontra o valor de 298.000 km/s utilizando espelhos rotatórios, valor muito próximo do valor atual de 299.792 km/s.

A natureza ondulatória da luz foi demonstrada pelos trabalhos de Thomas Young muito antes da teoria eletromagnética de Maxwell sem contudo se conhecer o que é que ondulava. A coincidência entre o valor da velocidade da luz e a velocidade das ondas eletromagnéticas no vácuo, prevista pelos trabalhos de Maxwell, deve ter tido um forte papel na aceitação de que a luz seria, de fato, uma onda eletromagnética.

Vejamos alguns detalhes interessantes sobre a luz visível e os mecanismos de percepção do olho.

Newton demonstrou, experimentalmente, que a luz do Sol, quando decomposta por um prisma de vidro, reproduz as cores ou espectro do arco-íris, as chamadas cores puras ou cores espectrais saturadas. Sabemos, atualmente, que cada frequência (ou comprimento de onda) corresponde a uma sensação de cor decodificada pelo cérebro como uma cor pura.

Realizando-se experimentos com muitas pessoas “normais” chegou-se a uma distribuição estatística da sensibilidade ou percepção do olho para os diversos comprimentos de onda da faixa visível (Fig. 3.1).

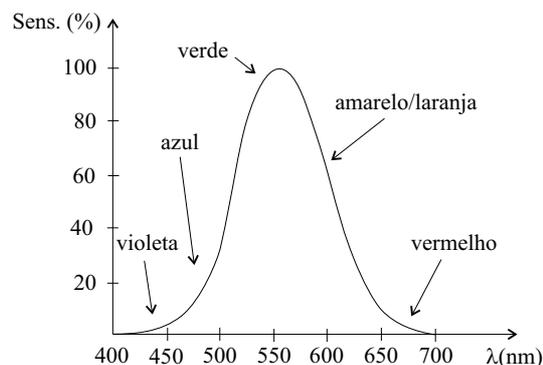


Figura 3.1: Curva de sensibilidade do olho humano.

Observa-se que o máximo da sensibilidade do olho ocorre para a cor verde amarelada e que o olho é pouco sensível tanto para o violeta quanto para o vermelho. Apesar de cada frequência corresponder a uma sensação de cor pura, o oposto não é verdadeiro! Ou seja, é possível se ter uma sensação de cor que não está associada a uma única frequência ou comprimento de onda. Por exemplo, um comprimento de onda de 580 nm produz a sensação da cor amarela mas essa mesma cor pode ser percebida por uma combinação do comprimento de onda 550 nm com 660 nm (aproximadamente). Além disso, existem sensações de cores que não correspondem a nenhum comprimento de onda específico ou cor do espectro do arco-íris (o marrom por exemplo).

A sensação luminosa é caracterizada por três parâmetros, a luminância ou brilho, o matiz ou cor e a saturação ou grau de diluição no branco. Antes de prosseguirmos analisando esses parâmetros é necessário compreender o que é o branco e o preto. O branco (iluminante A) foi padronizado como sendo a sensação luminosa produzida por um filamento de tungstênio aquecido à temperatura de 2848 K e corresponde aproximadamente à luz emitida por uma lâmpada incandescente comum. O preto corresponde à sensação da ausência completa de luz.

Se tomarmos uma fonte de luz branca com uma certa intensidade e fizermos a luz emitida por essa fonte atravessar um filtro absorvedor que reduza apenas a intensidade de modo uniforme para todas as frequências que compõe a luz branca, obteremos a sensação de cinza. Quanto maior for a absorção mais o cinza aproxima-se do preto. Existem substâncias que absorvem quase que completamente a luz incidente transformando a energia luminosa em calor. Um bom exemplo é a fuligem (negro de fumo) resultante da queima incompleta de alguns combustíveis. Trata-se de pó de carvão (carbono) muito fino. Se depositarmos esse pó sobre uma placa de vidro obteremos um filtro de cinza para a luz branca. Se a densidade do pó for baixa, pouca luz será absorvida e a maior parte da luz será transmitida pelo filtro, esta luz terá o aspecto de cinza claro. A medida que aumentamos a densidade do pó mais luz será absorvida e a luz transmitida pelo filtro terá o aspecto de cinza escuro. Portanto, esse filtro controla a intensidade da luz transmitida e essa característica da luz é o que chamamos de luminância. Em uma TV preto e branco a imagem é formada pela variação

da luminância ou tons de cinza.

A saturação de uma cor corresponde ao grau de diluição desta cor no branco. Por exemplo, se tomarmos a cor pura espectral vermelha e acrescentarmos o branco em uma certa proporção, obteremos a cor rosa e quanto maior for o teor de branco mais insaturado parecerá esse rosa. Dizemos que o vermelho puro espectral é um vermelho saturado e o rosa é um vermelho insaturado ou diluído.

A parte do olho humano sensível à luz é composta por dois tipos de células ou foto-sensores capazes de perceber a luz, os cones e os bastonetes. Os cones ocupam a região central da retina e são os responsáveis pela percepção das cores enquanto que os bastonetes, que são maiores e mais espaçados, ocupam a região periférica da retina. Os bastonetes são insensíveis às cores mas tem extraordinária sensibilidade ao brilho ou luminância. Os bastonetes são os responsáveis pela visão noturna com baixos níveis de luminosidade (visão escotópica) onde perdemos a capacidade de distinguir as cores. Segundo a teoria de percepção das cores de Young (1801) os cones se subdividem em três grupos especializados cada um apresentando picos de sensibilidade no azul, no verde e no vermelho, respectivamente, havendo interpenetração das curvas de sensibilidade dos grupos verde com vermelho e azul com verde.

As diversas cores que percebemos podem ser geradas por dois processos, o processo aditivo e o processo subtrativo.

No processo aditivo escolhe-se três ou mais cores conhecidas como “cores primárias” e faz-se a combinação linear dessas cores. É o processo utilizado na televisão, nas gráficas (inclusive as impressoras coloridas) e na iluminação de espetáculos. As cores primárias não são únicas, a escolha dessas cores depende da viabilidade tecnológica de produzi-las com facilidade e da possibilidade de reproduzir a maior quantidade possível das diversas cores. Na televisão foram escolhidas o vermelho (≈ 615 nm) o verde (≈ 540 nm) e o azul (≈ 470 nm) enquanto que nas gráficas utiliza-se normalmente o amarelo, o magenta, o ciano e o preto. Os artistas podem escolher outras cores como cores primárias. Procura-se, no processo aditivo, gerar a maior quantidade de cores possível. Contudo, existem cores que não podem ser reproduzidas por esse processo.

No processo subtrativo parte-se da cor branca e absorve-se uma ou mais cores com a utilização de filtros. A cor resultante corresponde à mistura de todas as cores que compõe a luz branca que não foram absorvidas. Muitas cores só podem ser geradas por esse processo.

Quando duas cores são adicionadas e obtém-se o branco diz-se que essas duas cores são complementares. A cor complementar é a cor que falta para gerar o branco. Por exemplo: sabemos que, com as devidas proporções, o verde + o azul + o vermelho = ao branco, o verde somado ao vermelho produz o amarelo que somado ao azul produz o branco. Dizemos que o amarelo e o azul são cores complementares. O verde somado ao azul produz o ciano que somado ao vermelho produz o branco. Dizemos que o ciano e o vermelho são complementares. O azul somado ao vermelho produz o magenta que somado ao verde produz o branco. Dizemos que o magenta e o verde são complementares.

3.2 Noções sobre relatividade restrita

As equações de Maxwell resultam na equação diferencial de onda que prevê o valor da velocidade de propagação da luz no vácuo como valendo $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, ou seja, dependente apenas das propriedades elétricas e magnéticas do vácuo. Se essas constantes tiverem os

mesmos valores para qualquer observador inercial (aquele que se move com velocidade constante) que realize experiências com a eletricidade e o magnetismo e as equações de Maxwell permanecerem válidas, concluiremos que a velocidade de propagação da luz será a mesma para qualquer desses observadores. Em outras palavras, todos os observadores inerciais medem o mesmo valor para a velocidade de propagação da luz no vácuo independentemente se a fonte de luz esteja em repouso ou em movimento com relação ao observador. Até onde foi possível investigar, as equações de Maxwell são válidas e os valores das constantes permanecem os mesmos para qualquer observador. Inúmeras aplicações tecnológicas se baseiam nesse fato, por exemplo, satélites artificiais e naves espaciais exploratórias em altas velocidades tiram fotografias das superfícies de planetas distantes e as enviam para nós, na Terra, via onda eletromagnética com perfeição. Seus motores elétricos e equipamentos eletrônicos construídos baseados nas leis da eletricidade e do magnetismo funcionam como esperado.

Como não podemos esgotar todos os experimentos possíveis de serem realizados, *acreditamos*, baseados em todas as evidências coletadas, que as equações de Maxwell tenham validade (mantenham as formas) e que o valor da velocidade da luz no vácuo seja constante para qualquer observador inercial. Isso foi colocado por Einstein, numa forma equivalente, como sendo os dois postulados da relatividade restrita (ou especial).

A aceitação da teoria eletromagnética e suas consequências não foi um fato de fácil compreensão na época em que foi proposta. A noção de uma onda de campo elétrico e indução magnética propagando no espaço vazio não era algo trivial. Para as pessoas acostumadas com as ondas mecânicas, que necessitam de um meio para propagar, era uma ideia de difícil aceitação. Era tão difícil que se chegou a propor a existência de um meio especial para a propagação das ondas eletromagnéticas, o *éter*, um meio tênue e imponderável que preencheria todo o espaço. Contudo, todas as tentativas de detecção do éter (e não foram poucas) falharam!

O fato da velocidade da luz ser independente do observador contradiz a noção básica da adição de velocidades que estamos acostumados a realizar. Por exemplo, se andamos no interior de um ônibus, para a frente, a 5 km/h com relação ao piso do ônibus e este se desloca, também para a frente, a 20 km/h com relação ao solo, não hesitamos dizer que nossa velocidade é de 25 km/h com relação ao solo. Simplesmente adicionamos as duas velocidades. O mesmo não é válido se realizamos um experimento com uma fonte de luz. Uma pessoa que carregue uma lanterna no interior do ônibus vê a luz sair da sua lanterna com um valor c idêntico ao que seria visto por uma outra pessoa no solo independente da velocidade do ônibus, da velocidade do portador da lanterna ou mesmo de sua própria velocidade.

Esse fato pode ser colocado de uma maneira um pouco mais formal se considerarmos as leis de transformação de coordenadas entre dois sistemas de referência em que um se movimenta com velocidade constante v com relação ao outro. Consideremos que um sistema esteja em repouso (segundo nossos conceitos elementares sobre o repouso) e que o outro esteja em translação (mantendo os eixos paralelos com relação ao primeiro) com velocidade v . Para facilitar o raciocínio consideremos que o movimento seja feito apenas ao longo do eixo ox . A origem do sistema em repouso será denotada por 0 e a origem do sistema em movimento será denotada por $0'$ (Fig. 3.2).

Suponha que no ponto P ocorra um evento, por exemplo, exploda uma bomba. Esse acontecimento será posicionado em termos de suas coordenadas nos dois sistemas de re-

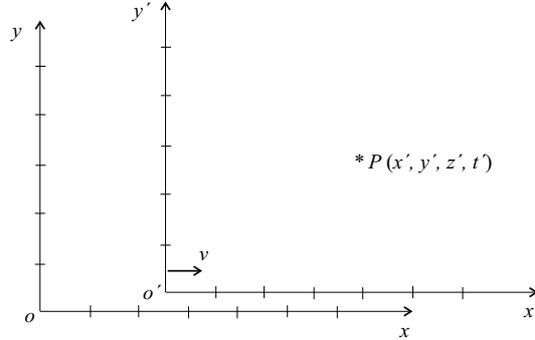


Figura 3.2: Sistemas de referência em movimento relativo.

ferência que podem ser transformadas da seguinte forma.

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (3.1)$$

ou

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad (3.2)$$

Essas transformações são conhecidas como as *transformações de Galileu*.

Se derivarmos com relação à t ou t' teremos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + v = \frac{dx'}{dt'} + v, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'}$$

e derivando novamente para determinarmos as acelerações,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt'^2} + 0 = \frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt'^2}.$$

Vemos a adição de velocidades para os movimentos paralelos ao eixo ox e vemos que as acelerações são idênticas. O fato de termos as mesmas acelerações faz com que não seja possível determinar se o sistema de referência está parado ou em movimento através da realização de algum experimento mecânico pois as forças são as mesmas. Isso equivale a dizer que todos os sistemas inerciais são idênticos e nunca saberemos se um sistema está em repouso absoluto ou em movimento uniforme através da realização de algum experimento mecânico.

Suponhamos agora que o evento, a explosão da bomba, ocorra na origem do sistema “linha”. Um observador nesse sistema verá uma onda esférica de luz que se expande com velocidade c em todas as direções. A equação da superfície esférica em expansão é

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2.$$

Se realizarmos a transformação das coordenadas para o outro sistema de referência teremos

$$(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, \quad \therefore x^2 - 2xvt + v^2t^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2$$

que não é a equação de uma superfície esférica em expansão! Isso contradiz o postulado da relatividade que diz que a velocidade da expansão da onda é a mesma em todas as

direções para os dois observadores nos dois sistemas de referência. Os dois deveriam observar ondas esféricas em expansão (como de fato ocorre). Somos obrigados a concluir que as transformações das coordenadas não devem estar corretas.

Lorentz, quando estudava a teoria do éter, havia encontrado as leis de transformação corretas com um outro objetivo. Essas transformações preservam a forma esférica da onda em expansão como pode ser facilmente verificado. Elas transformam uma superfície esférica em expansão com velocidade c em uma outra superfície esférica idêntica (verifique!). As transformações são as seguintes

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (3.3)$$

e

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + \left(\frac{v}{c^2}\right)x'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (3.4)$$

Observe que para baixas velocidades, $v \ll c$, as transformações de Lorentz recaem nas transformações de Galileu.

Admitir que a velocidade da luz tem o mesmo valor para todos os observadores inerciais tem consequências importantes, uma delas está associada à noção da simultaneidade entre dois eventos. Isso foi demonstrado por um “experimento pensado” proposto por Einstein e conhecido como o “Trem de Einstein”. Vejamos:

Considere um observador situado no interior de um vagão de um trem em movimento com relação ao solo com uma velocidade v_T . Esse observador situa-se exatamente no meio do vagão. Nas duas paredes internas e extremas do vagão existem espelhos. Um segundo observador encontra-se parado com relação ao solo e próximo aos trilhos do trem. No exato momento em que um observador passa pelo outro acende-se uma lâmpada no meio do trem e ambos observadores veem a onda de luz se afastar da lâmpada (Fig. 3.3).

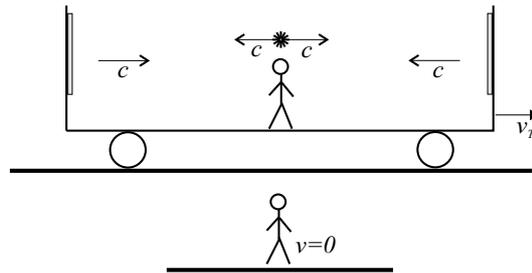


Figura 3.3: O trem de Einstein.

Para o observador no interior do trem as luzes alcançam os espelhos, voltam refletidas e chegam a ele simultaneamente.

O observador que está em repouso fora do trem vê as luzes propagando em direção aos extremos do trem (espelhos) com a mesma velocidade c . Vê também o trem avançar para a direita com a velocidade v_T de modo que a luz da esquerda atinge o espelho e volta refletida antes da luz da direita chegando a esse observador em instantes diferentes, ou seja,

os acontecimentos não são simultâneos (os acontecimentos são as reflexões nos espelhos que só são percebidas pela chegada das luzes ao observador).

Conclusão: os acontecimentos ou eventos que são simultâneos para um observador podem não ser simultâneos para outro observador que possua uma velocidade relativa com relação ao primeiro.

Como mencionamos anteriormente, as transformações de Lorentz transformam as coordenadas espacial e temporal de modo que a velocidade de propagação da luz seja a mesma para dois observadores em movimento relativo. Considere que no sistema de referência “linha” dois eventos ocorram no mesmo ponto do espaço (em x') separados por um intervalo de tempo $\Delta t'$ medido por um relógio nesse sistema de referência. No sistema em repouso um observador vê o relógio em movimento e observa os mesmos eventos. Para esse observador o intervalo de tempo Δt será dado de acordo com a equação (3.4) por

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (3.5)$$

Observe que $\Delta t > \Delta t'$ e isso é chamado de dilatação do tempo.

Considere agora que um bastão alinhado com o eixo ox' e em repouso com relação a esse sistema tenha um comprimento $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. De acordo com as transformações (3.3), o comprimento medido no sistema fixo pela determinação simultânea das posições extremas do bastão está relacionado com o comprimento medido em repouso por

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt - (x_1 - vt)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

ou

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (3.6)$$

Observe que $\Delta x < \Delta x'$ e isso é chamado de contração espacial. Tanto a dilatação do tempo quanto a contração espacial foram verificados experimentalmente em partículas a altas velocidades.

Outra observação muito interessante surgiu nas tentativas de aceleração de partículas para alcançar altas velocidades. Por exemplo, considere a aceleração de elétrons pela aplicação de uma diferença de potencial ΔV entre as placas de um capacitor no vácuo como em um tubo de imagens ou cinescópio de televisão. Considerando a conservação da energia, o elétron adquirirá energia cinética a partir da energia potencial elétrica.

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = e\Delta V$$

ou

$$v = \sqrt{2 \frac{e\Delta V}{m_e}}.$$

Assim, bastaria aumentar a diferença de potencial de aceleração para termos velocidades cada vez maiores. Contudo, esse não é o resultado experimental mostrado na figura (Fig. 3.4).

A experiência mostra que, por maior que seja a diferença de potencial de aceleração, a velocidade não alcança o valor c . Outros experimentos confirmam que a carga do elétron

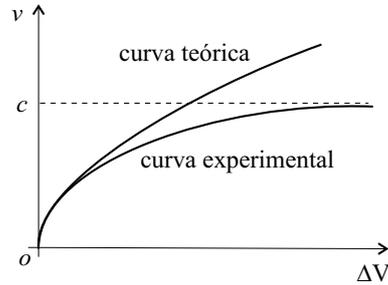


Figura 3.4: Velocidade em um acelerador de elétrons.

é uma constante universal, daí, somos forçados a admitir que a massa do elétron em movimento deve se alterar (crescer) com o aumento da velocidade para compensar o aumento da diferença de potencial e limitar o valor da velocidade. Vale notar que essa massa difere da massa que determinamos em uma “balança”, que é a massa do elétron em repouso que denominamos por m_0 . É possível mostrar que essas duas massas estão relacionadas por

$$m_e = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}. \quad (3.7)$$

Observe que para baixas velocidades os valores das duas massas coincidem.

Como um exemplo, considere a determinação da velocidade do elétron num tubo de imagem típico de televisão que acelera o feixe com uma d.d.p. de 25 kV. Se não fizermos a correção relativística da massa encontraremos

$$v = \sqrt{2 \frac{e\Delta V}{m_e}} = \sqrt{2 \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 25 \times 10^3}{9,1 \times 10^{-31}}} = 9,4 \times 10^7 \text{ m/s.}$$

Apesar de ser um valor extremamente alto, a razão $v/c = 0,313$ é pequena. Como na expressão da massa esse valor está elevado ao quadrado, o denominador é muito próximo da unidade e a correção é muito pequena. O cálculo exato da velocidade pode ser efetuado substituindo-se a expressão da massa relativística na expressão anterior e resolvendo-se a equação do segundo grau resultante.

$$v = \sqrt{2 \frac{e\Delta V}{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}}.$$

Fazendo

$$x = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad \text{e} \quad a = \frac{2e\Delta V}{c^2 m_0}$$

encontraremos

$$x^2 + a^2 x - a^2 = 0$$

ou

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{-a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2}}{2}}.$$

Com o potencial de aceleração de 25 kV teremos $a = 0,0983$ e $v/c = 0,306$ que é muito próximo do valor anteriormente calculado.

3.2.1 O efeito Doppler relativístico

Esse efeito é a mudança na frequência (ou no comprimento de onda) de uma onda eletromagnética percebido por um observador quando a fonte da radiação encontra-se em movimento com relação ao observador. Pode-se mostrar que, sendo f' a frequência emitida pela fonte que se afasta com uma velocidade v , a frequência f percebida pelo observador vale

$$f = \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} f'. \quad (3.8)$$

Para uma fonte que se aproxima do observador com uma velocidade v fica

$$f = \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} f'. \quad (3.9)$$

Essa variação na frequência tem aplicações tecnológicas importantes. Por exemplo, os radares utilizados pela polícia para medir a velocidade dos automóveis são baseados nesse efeito. Um transmissor de micro-ondas na frequência de 10 GHz envia uma onda que é refletida pelo automóvel, que funciona como uma fonte em movimento, ocasionando uma pequena mudança na frequência que é detectada por um receptor. Essa onda recebida é somada com a onda transmitida sendo produzido um “batimento” cuja frequência é proporcional à diferença das frequências das duas ondas. Essa frequência de batimento, que é uma frequência baixa, é processada pelo circuito eletrônico do equipamento que calcula a velocidade do automóvel.

Outro fato marcante relacionado ao efeito Doppler relativístico foi a descoberta da expansão do universo. Ao observar as luzes emitidas pelas estrelas e realizar uma análise espectral dessas luzes pode-se identificar a composição química dessas estrelas a partir da identificação dos comprimentos de onda das raias ou linhas espectrais. Comparando-se as posições dessas raias com as raias emitidas pelas mesmas substâncias em laboratório, pode-se verificar que os comprimentos de onda daquelas raias estão deslocados em direção à cor vermelha (aumento do comprimento de onda). De acordo com a expressão para o efeito Doppler relativístico, isso só é possível se as estrelas estiverem se afastando em alta velocidade. O mais surpreendente é que qualquer estrela que seja observada, em qualquer direção, apresenta esse comportamento. Isso só é possível se todas as estrelas estiverem se afastando uma das outras, daí a afirmação do universo em expansão.

Capítulo 4

Óptica física

Veremos agora alguns fenômenos físicos relacionados à propagação da onda eletromagnética em meios transparentes semi-infinitos e aos efeitos causados por obstáculos no caminho de propagação. Esses fenômenos são característicos para todo tipo de perturbação ondulatória mas nos restringiremos às ondas eletromagnéticas.

4.1 Reflexão e refração de ondas planas harmônicas

Consideremos uma onda plana incidindo obliquamente na interface plana entre dois meios (dióptro plano) caracterizados pelos respectivos índices de refração, n_1 e n_2 , sendo a onda proveniente do meio 1 para o meio 2.

A experiência mostra que parte da onda é refletida de volta para o meio 1 e outra parte é refratada (transmitida com mudança de direção) para o meio 2. Se considerarmos a representação de raios de luz, onde o raio de luz corresponde à direção de propagação da onda, ou seja, o vetor \mathbf{K} e supormos que esse raio faça um ângulo θ_1 com relação à normal da interface, verificaremos que o raio refletido forma um ângulo θ'_1 e o raio refratado forma um ângulo θ_2 com relação à mesma normal como na figura (Fig. 4.1).

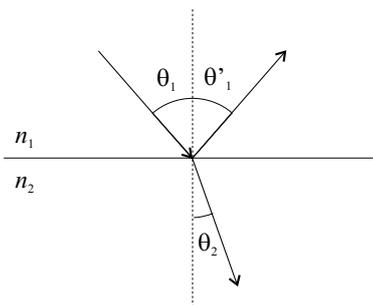


Figura 4.1: Reflexão e refração de uma onda plana na interface entre dois meios.

Determinemos os ângulos de reflexão (θ'_1) e refração (θ_2) baseando-se na teoria ondulatória. Para isso utilizaremos o princípio de Huygens com o objetivo de facilitar o entendimento.

4.1.1 O princípio de Huygens

Christian Huygens em 1678 formulou um princípio em que admitia que cada ponto de uma frente de onda plana podia ser encarado como uma fonte pontual de ondas esféricas. Como uma frente de onda possui uma infinidade de pontos infinitamente próximos, estariam sendo produzidas uma infinidade de ondas esféricas de modo que a frente de onda plana seguinte podia ser encarada como a superposição dessas frentes de ondas esféricas (Fig. 4.2).

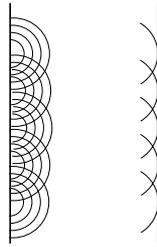


Figura 4.2: Princípio de Huygens. Frente de onda plana produzida pela superposição de frentes de ondas esféricas

Se considerarmos uma onda plana incidindo na fronteira, cada ponto da frente de onda que coincida com a fronteira será uma fonte de onda esférica que propagará nos dois meios com suas respectivas velocidades. A figura (Fig. 4.3) mostra a onda incidente, a figura (Fig. 4.4) mostra a onda refletida e a figura (Fig. 4.5) mostra a onda refratada.

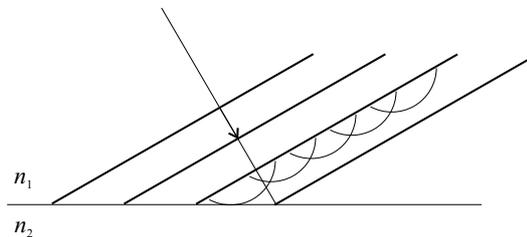


Figura 4.3: Frente de onda plana incidindo na fronteira entre dois meios.

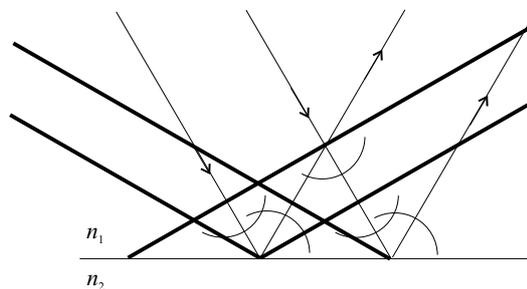


Figura 4.4: Frente de onda plana incidindo e refletindo na fronteira entre dois meios.

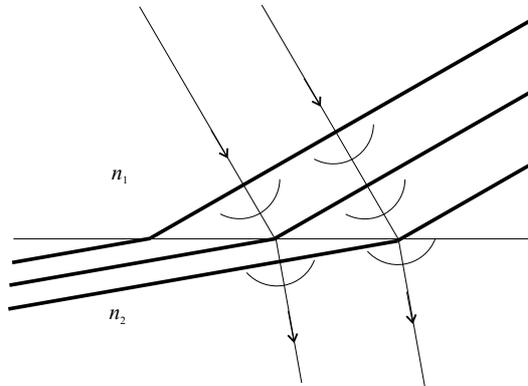


Figura 4.5: Frente de onda plana incidindo e refratando na fronteira entre dois meios.

4.1.2 Lei de Snell

Nosso objetivo agora é relacionar os valores dos ângulos de refração e reflexão com o ângulo de incidência.

Já sabemos que na passagem de um meio para o outro não ocorre mudança na frequência da onda. Contudo, se os índices de refração forem diferentes, haverá mudança no valor da velocidade de propagação e, conseqüentemente, no valor do comprimento de onda. Temos

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\frac{c}{v_1}}{\frac{c}{v_2}} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2 f}{\lambda_1 f} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

ou

$$\lambda_2 = \frac{n_1}{n_2} \lambda_1. \quad (4.1)$$

Consideremos, por exemplo, a passagem da onda do ar ($n = 1$) para a água ($n = 1,33$). Pela relação anterior haverá diminuição no comprimento de onda. Se desenharmos as frentes de onda espaçadas de um comprimento de onda, deverá haver uma mudança na direção de propagação como na figura (Fig. 4.6).

Observe o quadrilátero **ABCD** destacado na figura (Fig. 4.7) para melhor visualização.

Dos dois triângulos retângulos temos

$$\text{sen}(\theta_1) = \frac{\lambda_1}{AC}$$

e

$$\text{sen}(\theta_2) = \frac{\lambda_2}{AC}$$

portanto,

$$\frac{\text{sen}(\theta_1)}{\text{sen}(\theta_2)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

ou

$$n_1 \text{sen}(\theta_1) = n_2 \text{sen}(\theta_2) \quad (4.2)$$

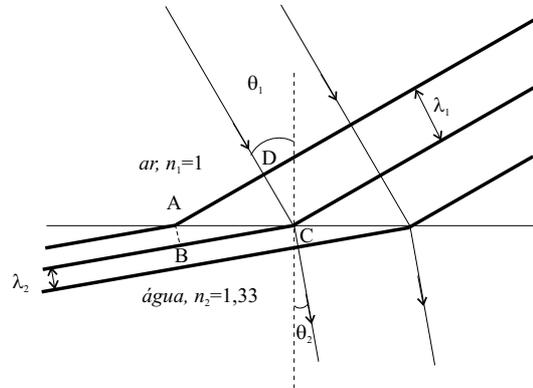


Figura 4.6: Mudança na direção de propagação da onda na passagem do ar para a água.

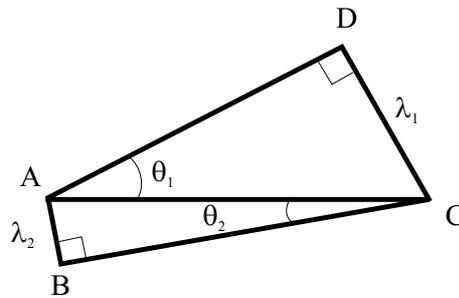


Figura 4.7: Quadrilátero **ABCD**.

conhecida como a lei de Snell.

Dessa forma, podemos expressar o ângulo de refração em função do ângulo de incidência.

$$\theta_2 = \arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \text{sen}(\theta_1)\right).$$

Observe que, apesar de termos utilizado o ar e a água como exemplo, essa lei é válida para quaisquer meios. Se o meio 2 tiver índice de refração maior que o meio 1, o ângulo de refração será sempre menor que o ângulo de incidência e se o meio 2 tiver índice menor que o meio 1 o ângulo de refração será sempre maior que o ângulo de incidência.

Essa segunda situação ($n_2 < n_1$) apresenta uma consequência interessante: como o ângulo de refração é sempre maior que o ângulo de incidência, haverá um valor de ângulo de incidência menor que $\pi/2$, chamado de ângulo crítico, em que o ângulo de refração será exatamente igual à $\pi/2$ e a onda no segundo meio propagará rasante à fronteira. Para ângulos de incidência maiores que o ângulo crítico não existe valor real para θ_2 que satisfaça a lei de Snell e a experiência mostra que a radiação incidente é completamente refletida num processo conhecido como reflexão total.

Além da onda refratada temos também a onda refletida de volta para o meio 1 mantendo o mesmo valor do comprimento de onda da onda incidente. Graficamente, teremos o triângulo **ABC** rebatido para cima e idêntico ao triângulo **ACD** sendo o ângulo θ_2 trans-

formado no ângulo θ'_1 (ângulo de reflexão). Portanto, o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

Se pensarmos em termos da intensidade da radiação, a conservação da energia nos diz que a intensidade da onda refletida somada com a intensidade da onda refratada deve ser igual à intensidade da onda incidente. Isso é evidenciado a partir das fórmulas de Fresnel para os coeficientes de reflexão e transmissão, que são complexas, mas que tem representação gráfica relativamente simples. Por exemplo, na passagem do ar para o vidro ($n = 1,5$) podemos visualizar o resultado na figura (Fig. 4.8) e no caso inverso, do vidro para o ar, na figura (Fig. 4.9).

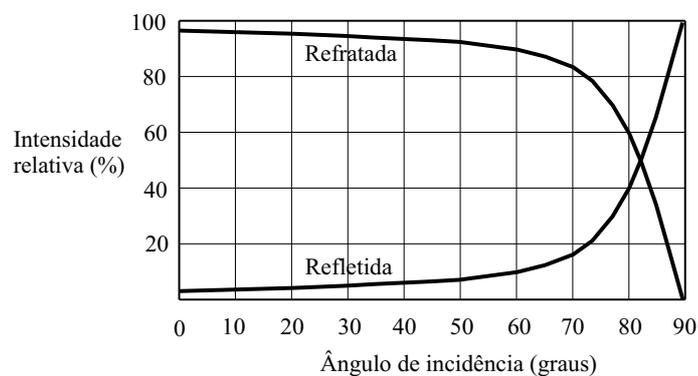


Figura 4.8: Intensidades refletida e refratada no dióptro ar-vidro ($n_1 = 1,0$ e $n_2 = 1,5$). Onda vindo do ar e incidindo no vidro.

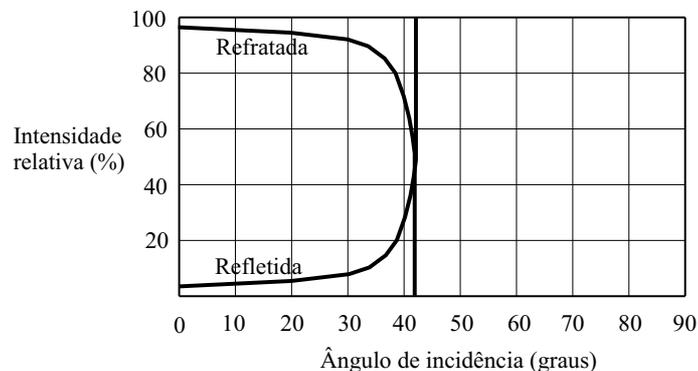


Figura 4.9: Intensidades refletida e refratada no dióptro vidro-ar ($n_1 = 1,5$ e $n_2 = 1,0$). Onda vindo do vidro e incidindo no ar.

Observe que, em ambos os casos, para a incidência normal ($\theta_1 = 0$) a maior parte da intensidade da onda é refratada, cerca de 96%. No primeiro caso, para incidência rasante ($\theta_1 \approx 90^\circ$) a maior parte da radiação é refletida. No segundo caso, para $\theta_1 \approx 41,8^\circ$ ocorre a reflexão total da radiação incidente.

O fenômeno da reflexão total tem aplicações tecnológicas importantes. Muitos instrumentos ópticos de boa qualidade utilizam a reflexão total ao invés da reflexão em espelhos.

As fibras ópticas utilizadas em telecomunicações e em guia de luz também fazem uso desse fenômeno.

Pode-se mostrar que após o ângulo de incidência ter ultrapassado o ângulo crítico, ainda existe campo eletromagnético no segundo meio. Contudo, esse campo não é propagante na direção da normal. É um campo que atenua exponencialmente à medida que penetra no segundo meio sem ter característica ondulatória. A existência desse campo pode ser verificada se considerarmos um sistema de três meios, por exemplo vidro, ar e vidro (Fig. 4.10). Ao incidir luz na primeira interface com um ângulo de incidência superior ao ângulo crítico ainda se observa uma onda transmitida para o terceiro meio (vidro) que emerge paralelamente à onda incidente. Contudo, a intensidade dessa onda é fortemente dependente da espessura da camada intermediária (ar) diminuindo com o aumento da espessura.

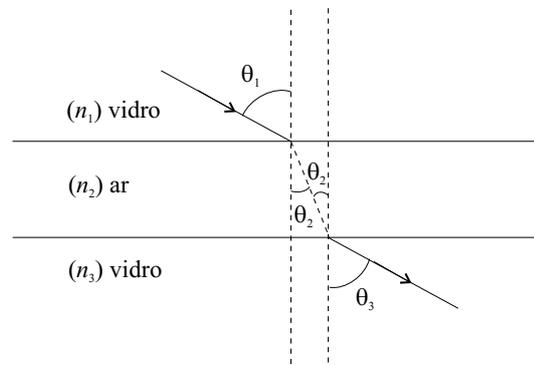


Figura 4.10: Sistema de três meios planos.

A aplicação sucessiva da lei de Snell (admitindo essa possibilidade) nas duas interfaces

$$n_1 \text{sen}(\theta_1) = n_2 \text{sen}(\theta_2)$$

e

$$n_2 \text{sen}(\theta_2) = n_3 \text{sen}(\theta_3)$$

fornecerá

$$n_1 \text{sen}(\theta_1) = n_3 \text{sen}(\theta_3).$$

Como $n_1 = n_3$, teremos $\theta_1 = \theta_3$. Ou seja, a luz sai paralelamente à luz incidente.

4.1.3 O princípio de Fermat

Pierre Fermat (1650) afirmou que, quando a luz parte de um ponto e chega a outro ponto via um processo de reflexão ou refração, o tempo despendido pela luz ao longo da trajetória que a luz percorre e liga esses dois pontos é um máximo, um mínimo ou é invariante quando comparado com as outras trajetórias que também ligam esses dois pontos. Outro modo de estabelecer esse princípio é afirmar que o caminho óptico (caminho geométrico multiplicado pelo índice de refração do meio) é um máximo, um mínimo ou é invariante.

Essa afirmação foi transformada em “princípio” por razões filosóficas da época em que se procurava reduzir as observações de diversos fenômenos naturais à categoria de princípios.

Um outro princípio famoso é o “princípio da mínima ação” que reproduz as equações do movimento (leis de Newton) em um sistema mecânico.

Apliquemos o princípio de Fermat à situação em que um raio de luz parte de uma fonte **A** situada a uma altura a , reflete em um espelho e chega a um ponto **B** a uma altura b sendo d a distância horizontal entre a fonte e o ponto de chegada (Fig. 4.11).

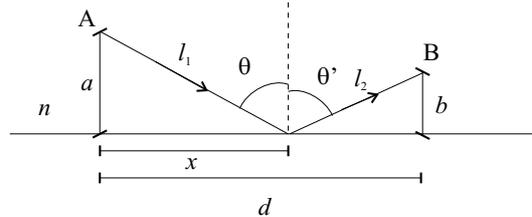


Figura 4.11: Princípio de Fermat aplicado à reflexão.

Consideremos que a reflexão ocorre em ponto a uma distância x medida a partir da esquerda.

O caminho óptico total nl de **A** até **B** vale

$$nl = n(l_1 + l_2) = n \left(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2} \right)$$

ou $nl = nl(x)$. A condição de máximo, mínimo ou invariante ocorre quando a derivada no ponto é nula

$$\frac{d(nl)}{dx} = 0.$$

Então

$$n \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - n \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0$$

ou

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

$$\therefore \text{sen}(\theta) = \text{sen}(\theta'), \quad \therefore \theta = \theta'$$

que é a lei da reflexão.

Considere agora a situação em que a luz passa de um meio com índice de refração n_1 para outro meio com índice de refração n_2 (Fig. 4.12).

O caminho óptico total de **A** até **B** vale

$$n_1 l_1 + n_2 l_2 = n_1 \sqrt{a^2 + x^2} + n_2 \sqrt{b^2 + (d-x)^2}.$$

A condição de máximo, mínimo ou invariante ocorre quando a derivada no ponto é nula

$$\frac{d(n_1 l_1 + n_2 l_2)}{dx} = 0.$$

Então

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - n_2 \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0$$

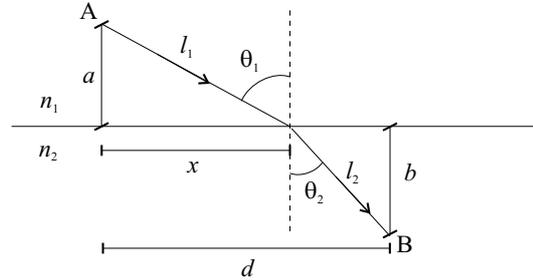


Figura 4.12: Princípio de Fermat aplicado à refração.

ou

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = n_2 \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

$$\therefore n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2),$$

que é a lei da refração.

4.2 Interferência

A interferência ou superposição é um fenômeno comum a todos os tipos de ondas e pode ser observado tanto nas ondas mecânicas como na onda eletromagnética. Se uma fonte 1 de onda eletromagnética produz uma oscilação eletromagnética, em um determinado ponto do espaço, do tipo

$$E_1 = E_{01} \sin(\omega_1 t)$$

e uma fonte 2 produz no mesmo ponto uma oscilação do tipo

$$E_2 = E_{02} \sin(\omega_2 t + \phi)$$

dizemos que as duas ondas se interferem produzindo uma oscilação resultante (supondo que os vetores do campo sejam paralelos)

$$E = E_{01} \sin(\omega_1 t) + E_{02} \sin(\omega_2 t + \phi).$$

Em geral, a interferência não produz nenhum efeito interessante. A superposição das ondas produz uma onda resultante com uma intensidade média. É o que acontece normalmente quando, por exemplo, um ambiente é iluminado por diversas fontes de luz independentes, várias lâmpadas, ou quando ouvimos o som resultante de várias pessoas conversando simultaneamente.

A interferência torna-se interessante quando existe um certo “sincronismo” entre fontes semelhantes, por exemplo, em uma orquestra quando todos os violinos, igualmente afinados, tocam a mesma melodia. O som resultante é reforçado e agradável. No caso das duas ondas mencionadas anteriormente, a interferência torna-se interessante quando as ondas são *coerentes*, ou seja, quando a diferença entre as fases permanece constante com o passar do tempo. Quando ambas possuem a mesma frequência e quando a fase inicial ϕ não depende do tempo. Nesse caso, a superposição dessas ondas senoidais é uma outra onda senoidal

podendo ser reforçada ou mesmo anulada em um determinado ponto do espaço. Quando as ondas se reforçam falamos em interferência construtiva e quando se anulam falamos em interferência destrutiva. Situações intermediárias entre totalmente construtiva e totalmente destrutiva também são possíveis, tudo dependerá das amplitudes de cada onda e do valor de ϕ . Por exemplo, façamos a superposição entre duas ondas de mesma amplitude e mesma frequência

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \text{sen}(\omega t) + E_0 \text{sen}(\omega t + \phi).$$

Usando a identidade

$$\text{sen}(A) + \text{sen}(B) = 2 \text{sen} \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{B-A}{2} \right)$$

fica

$$E = 2E_0 \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \text{sen} \left(\omega t + \frac{\phi}{2} \right).$$

O termo

$$2E_0 \cos \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

pode ser encarado como a amplitude do termo senoidal oscilante e essa amplitude depende do valor de ϕ . Se $\phi/2 = k\pi$ com k inteiro relativo, o módulo da amplitude será o dobro da amplitude de cada onda. Contudo, se $\phi/2 = (2k+1)\pi/2$ com k inteiro relativo, a amplitude será zero. Ou seja, podemos ter situações de interferência construtiva e destrutiva.

Vemos, portanto, que os efeitos interessantes de interferência só ocorrem com ondas coerentes. Obter coerência com ondas mecânicas é um processo relativamente simples devido à natureza do processo de geração dessas ondas, normalmente mecânico ou eletromecânico. Contudo, no caso da luz esse processo é extremamente difícil de realizar partindo de fontes físicas de luz. Normalmente a luz é obtida de fontes baseadas no aquecimento de um filamento ou na descarga elétrica em um gás. Em ambos processos a emissão da luz é completamente aleatória em função das oscilações ou transições de energias das cargas elétricas. Daí o fato de raramente podermos observar, naturalmente, os efeitos interessantes de interferência da luz. Sob condições apropriadas esses efeitos podem ser observados como descreveremos a seguir.

Iniciemos apresentando um fenômeno óptico que pode ser observado com relativa facilidade quando uma onda plana é parcialmente bloqueada por um obstáculo. A onda plana de luz pode ser obtida de uma fonte distante como a de uma estrela ou até mesmo uma lâmpada em um poste de iluminação pública distante. Se fizermos essa luz passar por uma fenda estreita de abertura a , como a fresta entre dois dedos que praticamente se tocam, e observarmos a imagem produzida por essa fenda a uma grande distância quando comparada com a abertura da fenda, veremos uma figura (imagem) parecida com a fenda ladeada por uma série de franjas claras e escuras. Em outras palavras, a imagem não é a sombra geométrica da fenda, as bordas parecem difusas com alternâncias de claros e escuros ou mesmo franjas coloridas se for utilizada luz branca. Esquemáticamente, representamos a situação como na figura (Fig. 4.13) onde está representada a vista de corte do arranjo.

A imagem que aparece no anteparo tem o aspecto da figura (Fig. 4.14) onde podemos identificar uma região central (franja) brilhante e larga e franjas laterais estreitas com intensidades decrescentes. Um exame cuidadoso mostra que as larguras das franjas laterais são aproximadamente a metade da largura da franja central.

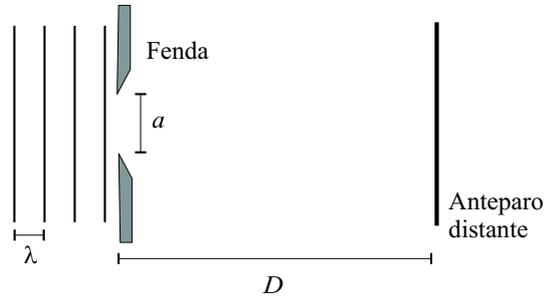


Figura 4.13: Arranjo para a observação da difração da luz por uma fenda.

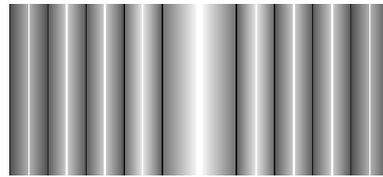


Figura 4.14: Aspecto da figura de difração da luz por uma fenda.

Em termos da intensidade luminosa em função da posição, representamos graficamente como na figura (Fig. 4.15).

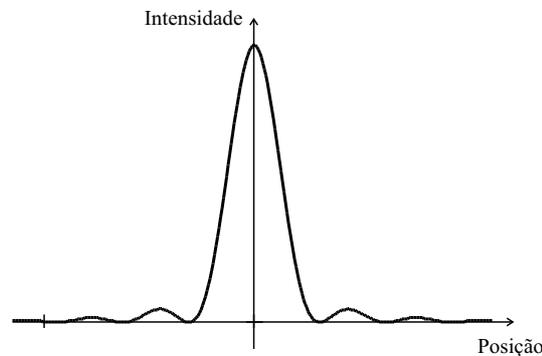


Figura 4.15: Gráfico da intensidade luminosa em função da posição na figura de difração da luz por uma fenda.

Uma observação experimental importante é que as larguras das franjas da figura de difração são inversamente proporcionais à abertura da fenda. Ou seja, a medida que estreitamos a fenda as franjas de difração aumentam a largura. Se considerarmos uma fenda muito estreita a frente de onda que chegará ao anteparo distante será praticamente uma frente de onda cilíndrica (esférica no caso de utilizarmos um orifício circular ao invés de uma fenda) e o anteparo será uniformemente iluminado com muito pouca intensidade. No limite em que a abertura da fenda tender a zero o anteparo tenderá a ser uniformemente iluminado (como em uma onda plana) com intensidade tendendo a zero. Em outras palavras,

as franjas escuras nos lados da franja central brilhante estarão tão afastadas uma da outra (no infinito) que veríamos apenas a franja central brilhante ocupando todo o anteparo.

4.2.1 O experimento de Young

A difração foi utilizada por Thomas Young em 1803 para obter duas fontes coerentes de luz a partir de uma única fonte. Inicialmente, ele colocou uma fenda fina em frente a uma fonte de luz de modo a obter uma onda cilíndrica (frente de onda praticamente reta a grande distância na vista de corte). Em seguida utilizou duas fendas finas idênticas, lado a lado, separadas por uma distância d e distantes de um anteparo (Fig. 4.16).

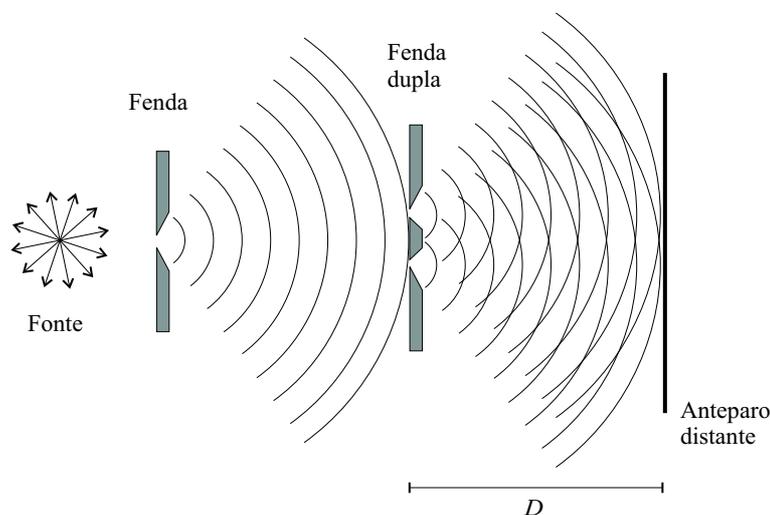


Figura 4.16: Arranjo do experimento de Young.

Como a fenda dupla é iluminada simultaneamente pela mesma frente de onda, ela passa a gerar ondas de modo sincronizado, ou seja, obtêm-se duas ondas coerentes. Se tomarmos um ponto P qualquer, no anteparo, este ponto receberá ondas (luzes) provenientes das duas fendas. A depender da posição do ponto, as trajetórias percorridas pelas ondas poderão ser iguais ou diferentes entre si. No ponto central do anteparo as duas ondas percorrem o mesmo caminho até chegarem nesse ponto não havendo diferença de fase entre elas. Portanto, esse ponto será sempre um ponto de interferência construtiva. Em um ponto deslocado do centro, o caminho óptico percorrido por uma onda difere do caminho óptico percorrido pela outra onda e ao chegarem no ponto haverá uma diferença de fase entre as ondas. A depender do valor dessa diferença de fase poderemos ter qualquer tipo de interferência entre elas. Vejamos com mais detalhes:

Como estamos considerando um anteparo distante com relação à separação entre as fendas, $D \gg d$, as trajetórias percorridas pelas ondas de cada fenda até o ponto P serão essencialmente paralelas apesar de ligeiramente diferentes (Fig. 4.17). Essa pequena diferença de caminhos que pode ser da ordem do comprimento de onda é que é responsável pela diferença entre as fases das ondas.

Utilizemos o ângulo θ para localizar o ponto P e escrevamos a diferença de caminhos em

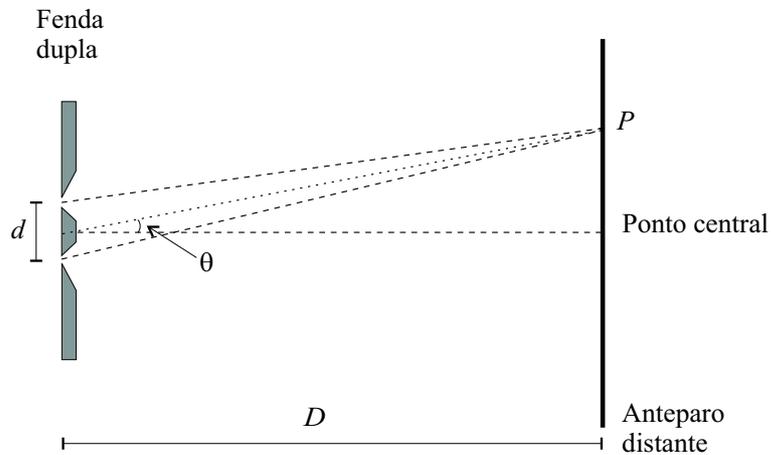


Figura 4.17: Caminhos geométricos entre as fendas e um ponto no anteparo no experimento de Young.

função desse ângulo. Para isso, baixemos uma perpendicular a ambos caminhos lembrando que estamos considerando que eles são paralelos entre si (Fig. 4.18).

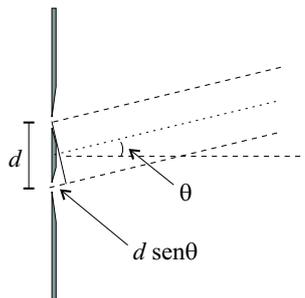


Figura 4.18: Diferença entre os caminhos geométricos das fendas a um ponto no anteparo no Experimento de Young.

A diferença de caminhos vale $d \sin(\theta)$. Essa diferença de caminhos pode ser convertida em diferença de fase por uma simples regra de três onde fazemos uma diferença de caminhos igual a λ corresponder à uma diferença de fase igual a 2π .

$$\phi = -\frac{d \sin(\theta)}{\lambda} 2\pi$$

A diferença de fase é negativa porque a onda que parte da fenda inferior chega atrasada com relação à onda que parte da fenda superior que é tomada como referência. Calculemos a intensidade da luz no ponto P do anteparo. Num ponto fixo do espaço a onda é apenas uma função do tempo de modo que podemos escrever a expressão do campo elétrico (e a do campo de indução magnética) para a onda 1 (correspondente à fenda superior) como

$$E_1 = E_0 \sin(cte - \omega t)$$

e para a onda 2

$$E_2 = E_0 \operatorname{sen}(cte - \omega t + \phi).$$

Conforme mencionamos anteriormente, a superposição dessas oscilações será

$$E = E_1 + E_2 = 2 E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(-\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

e novamente identificamos a amplitude

$$2 E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad \phi = -\frac{d \operatorname{sen}(\theta)}{\lambda} 2 \pi.$$

A intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude e se compararmos a intensidade, $I(\theta)$, no ponto P com a intensidade no ponto central, $I(\theta = 0)$, teremos a intensidade relativa ou intensidade normalizada

$$I_R(\theta) = \frac{I(\theta)}{I(\theta = 0)} = \left[\frac{2 E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}{2 E_0 \cos(0)} \right]^2$$

ou

$$I_R(\theta) = \frac{I(\theta)}{I(\theta = 0)} = \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right). \quad (4.3)$$

As franjas brilhantes correspondem às interferências construtivas ou máximos da intensidade relativa e ocorrem quando

$$\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = 1$$

$$\therefore \frac{\phi}{2} = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

ou

$$\frac{-\frac{d \operatorname{sen}(\theta)}{\lambda} 2 \pi}{2} = k \pi$$

$$\therefore d \operatorname{sen}(\theta) = k' \lambda, \quad k' = -k. \quad (4.4)$$

Valores positivos de k' correspondem a ângulos positivos, pontos localizados na parte superior no anteparo.

As franjas escuras correspondentes às interferências destrutivas ocorrem quando

$$\cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\phi}{2} = (2k - 1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$

$$\therefore d \operatorname{sen}(\theta) = (2k' + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (4.5)$$

Podemos localizar o ponto P no anteparo com uma coordenada linear ao invés de uma coordenada angular (Fig. 4.19).

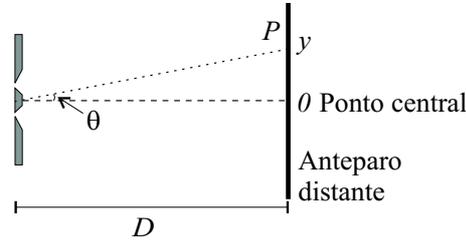


Figura 4.19: Localização do ponto no anteparo por uma coordenada linear.

Se considerarmos pontos próximos do centro podemos aproximar o seno do ângulo pela tangente do mesmo ângulo.

$$\text{sen}(\theta) \approx \tan(\theta) = \frac{y}{D}$$

$$\therefore d \text{sen}(\theta) \approx d \tan(\theta) = d \frac{y}{D}.$$

Dessa forma, as franjas brilhantes ocorrem em

$$y_{max} = k' \lambda \frac{D}{d} \quad (4.6)$$

e as franjas escuras em

$$y_{min} = (2k' + 1) \frac{\lambda}{2} \frac{D}{d}. \quad (4.7)$$

Vemos que nessa aproximação, nas vizinhanças do ponto central, as franjas brilhantes (ou as franjas escuras) são equidistantes.

É interessante notar que a intensidade do máximo de interferência produzida por duas fendas chega a ser quatro vezes maior que a intensidade de uma *única* fenda. Isso pode ser verificado pela relação

$$\frac{I(\theta)}{I_0} = \left(\frac{2 E_0 \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)}{E_0} \right)^2 = 4 \cos^2\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

onde I_0 é a intensidade de uma *única* fenda.

A energia é redistribuída no processo de interferência de modo que, o que falta nos pontos de mínimo aparece reforçada nos pontos de máximo.

4.2.2 Interferência de múltiplas fendas

Consideremos agora a situação física em que uma grande quantidade de fendas estreitas e equidistantes produzem ondas que se interferirão em um ponto P no anteparo distante. Essencialmente, a situação é semelhante ao caso anterior de duas fendas. As trajetórias percorridas pelas ondas até o ponto P serão consideradas paralelas entre si devido ao fato do anteparo estar muito distante quando comparado com a separação entre as fendas (Fig. 4.20).

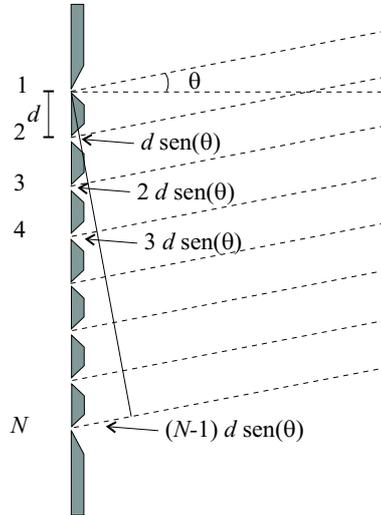


Figura 4.20: Arranjo de múltiplas fendas.

Tomando a onda que partiu da fenda superior como referência, o campo elétrico oscilante dessa onda no ponto P no anteparo será do tipo

$$E_1 = E_0 \text{sen}(\omega t).$$

Para a segunda onda será

$$E_2 = E_0 \text{sen}(\omega t + \phi),$$

para a terceira será

$$E_3 = E_0 \text{sen}(\omega t + 2\phi)$$

e assim sucessivamente até a N -ésima onda

$$E_N = E_0 \text{sen}[\omega t + (N - 1)\phi].$$

O campo total será a soma de todos os campos individuais

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_N.$$

É evidente que o desenvolvimento analítico dessa soma é extremamente complexo para uma grande quantidade de fendas. Contudo, é possível calculá-lo numericamente ou por métodos gráficos. Exploreemos um método gráfico conhecido como método fasorial.

Considere um vetor com amplitude E_0 girando no plano xy com frequência angular ω (Fig. 4.21). Podemos ver facilmente que a projeção desse vetor ao longo do eixo oy é o valor do campo elétrico E_1 .

Somemos a esse vetor um outro vetor girante de mesma amplitude e girado de um ângulo ϕ com relação ao primeiro (Fig 4.22). Esse vetor forma um ângulo $\omega t + \phi$ com relação ao eixo horizontal e a projeção no eixo oy vale $E_0 \text{sen}(\omega t + \phi)$ que é justamente o valor do campo elétrico E_2 .

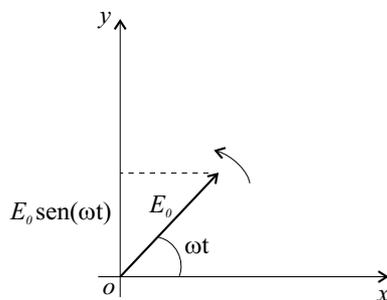


Figura 4.21: Vetor girante no plano.

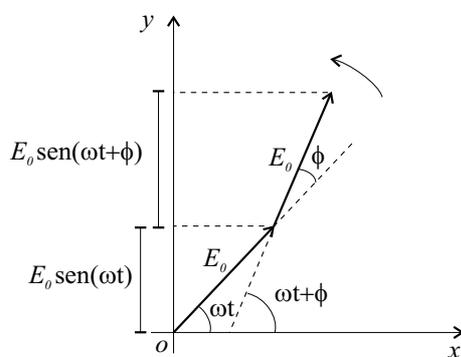


Figura 4.22: Vetores defasados e girantes no plano.

O vetor resultante dessa soma também é um vetor girante com a mesma frequência, possui uma amplitude E_θ e está girado de um ângulo $(\omega t + \alpha)$ com relação ao eixo ox (Fig. 4.23).

Vemos facilmente que a projeção do vetor resultante ao longo do eixo oy é o valor do campo elétrico total $E = E_1 + E_2$.

$$E = E_\theta \sin(\omega t + \alpha) = E_1 + E_2.$$

Esse raciocínio pode ser estendido a qualquer quantidade de vetores representando a soma dos campos de qualquer quantidade de fendas.

Usualmente, a representação gráfica é feita com os vetores parados, ou seja, com $\omega t = 0$ e os vetores são representados apenas pelos módulos e fases iniciais. O primeiro vetor é desenhado ao longo do eixo ox , o segundo vetor é desenhado girado (defasado) de ϕ com relação ao primeiro, o terceiro vetor é desenhado girado de ϕ com relação ao segundo e assim por diante (Fig. 4.24). Esses vetores, quando desenhados dessa forma são chamados de *fasores* por causa da representação das fases iniciais.

A amplitude E_θ e a fase inicial α podem ser medidas diretamente no gráfico.

Numericamente, podemos também determinar a amplitude e a fase do vetor resultante a partir das projeções ao longo dos eixos ox e oy . A projeção E_y do campo elétrico resultante é dada por

$$E_y = E_0 [0 + \sin(\phi) + \sin(2\phi) + \sin(3\phi) + \dots + \sin((N-1)\phi)].$$

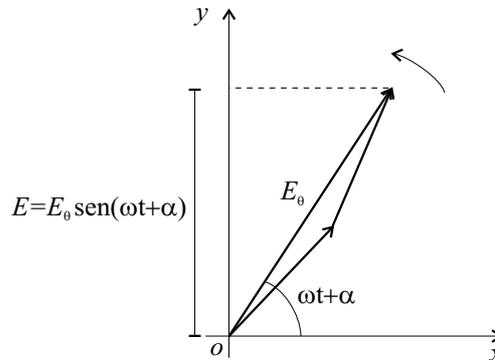


Figura 4.23: Vetor resultante e girante no plano.

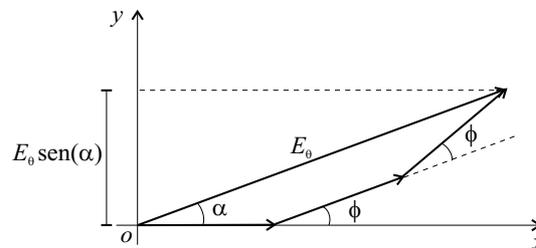


Figura 4.24: Soma de três fasores no plano.

A projeção E_x do campo elétrico resultante é dada por

$$E_x = E_0 [1 + \cos(\phi) + \cos(2\phi) + \cos(3\phi) + \dots + \cos((N - 1)\phi)].$$

A amplitude e a fase do campo resultante serão

$$E_\theta = \sqrt{E_y^2 + E_x^2} \quad \text{e} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{E_y}{E_x}\right).$$

Esse processo numérico pode ser facilmente implementado por um pequeno programa computacional ou pelo uso de uma planilha eletrônica. A planilha interferência.xls está disponível no “site” www.eleto.fis.ufba.br onde também se encontra esse texto.

Que informações podemos adquirir com o uso do método gráfico ou com o método numérico quando calculamos a amplitude do campo resultante e a intensidade da luz no anteparo para uma grande quantidade de fendas? Pode-se verificar que as posições dos picos intensos de interferência construtiva coincidem com o caso de duas fendas. Contudo, os picos são muito mais agudos e entre dois picos intensos aparecem picos secundários com muito baixa intensidade. A quantidade de picos secundários aumenta e suas intensidades diminuem com o aumento da quantidade de fendas. Com uma grande quantidade de fendas, digamos dez ou mais, as intensidades dos picos secundários são tão pequenas que podem ser desprezadas quando comparadas aos picos principais. Em outras palavras, a figura que observamos no anteparo consiste em uma série de franjas finas e brilhantes nas mesmas posições da figura correspondente ao caso de duas fendas (Fig. 4.25). Verifique esse efeito utilizando a planilha e alterando sucessivamente a quantidade de fendas.

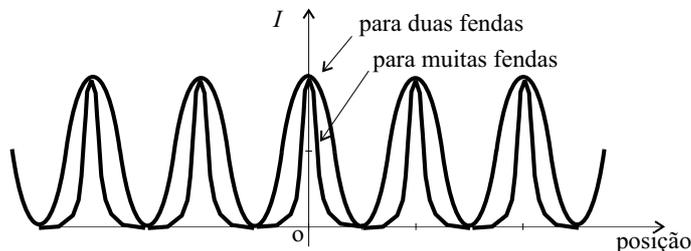


Figura 4.25: Intensidade na figura de interferência para duas e muitas fendas.

Os resultados que obtivemos para a interferência produzida por fendas são válidos quando a abertura da fenda é muito pequena quando comparada com o comprimento de onda da luz utilizada de modo que a franja central da figura de difração de cada fenda é muito larga. É de se esperar que as intensidades das interferências sejam dependentes das aberturas das fendas. Para compreender esse efeito é necessário estudarmos mais detalhadamente os efeitos da difração da luz por uma fenda.

4.3 Difração por uma fenda

Determinaremos a intensidade luminosa, em um anteparo distante, da figura de difração produzida por uma fenda de abertura a sob incidência de onda plana monocromática com a frente de onda paralela à fenda (Fig. 4.13). Para isso, tomemos a parte da frente de onda que não é bloqueada pela fenda e, de acordo com o princípio de Huygens, consideremos que existam N fontes uniformemente distribuídas sobre a frente de onda. Essas fontes produzem ondas coerentes que alcançarão um ponto P no anteparo distante ($D \gg a$) de modo que as trajetórias das fontes ao ponto podem ser consideradas como paralelas (Fig. 4.26). Posteriormente, passaremos ao limite em que $N \rightarrow \infty$ e a distância entre as fontes ($d = a/(N - 1)$) tende a zero.

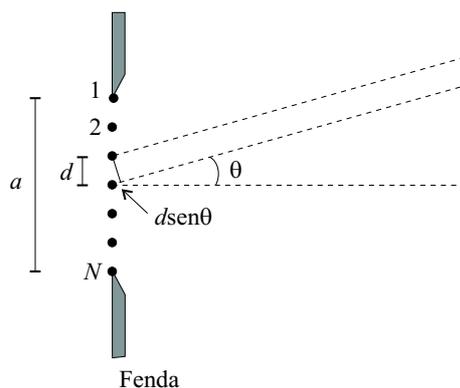


Figura 4.26: Trajetórias das ondas das N fontes pontuais correspondentes à frente de onda não bloqueada pela fenda de acordo com o princípio de Huygens.

Duas ondas provenientes de fontes consecutivas que cheguem ao ponto P no anteparo estarão defasadas de ϕ devido à diferença de caminhos $d \sin(\theta)$. Tomando a onda superior como referência, a imediatamente inferior estará defasada por

$$\phi = -d \sin(\theta) \frac{2\pi}{\lambda} = -\frac{a}{N-1} \sin(\theta) \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.8)$$

Tomemos agora o diagrama fasorial dos N fasores representativos dos campos elétricos das ondas que chegam ao ponto P no anteparo (Fig. 4.27).

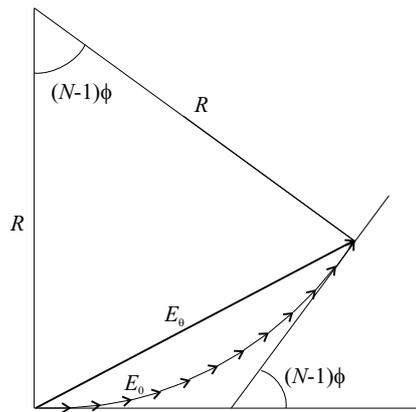


Figura 4.27: Diagrama fasorial para os campos elétricos das ondas que partem da fenda e chegam a um ponto no anteparo.

Nosso interesse é determinar E_θ a partir de considerações geométricas notando que a poligonal formada pelos N fasores tenderá a um arco de círculo cujo comprimento vale NE_0 para grandes valores de N . A relação entre o arco e o raio é, por definição, o ângulo interno

$$\frac{NE_0}{R} = (N-1)\phi, \quad \therefore R = \frac{NE_0}{(N-1)\phi}.$$

Baixando uma perpendicular ao fasor resultante e que passe pelo vértice do ângulo $(N-1)\phi$ teremos dois triângulos retângulos iguais (Fig. 4.28). Essa perpendicular é a bissetriz do ângulo.

Temos que

$$\sin \left[\frac{(N-1)\phi}{2} \right] = \frac{E_\theta}{2R} = \frac{E_\theta}{2 \frac{NE_0}{(N-1)\phi}}$$

e NE_0 é o valor da amplitude do campo resultante, $E_{\theta=0}$ no ponto central do anteparo. Portanto,

$$\frac{E_\theta}{E_{\theta=0}} = \frac{\sin \left[\frac{(N-1)\phi}{2} \right]}{\frac{(N-1)\phi}{2}}.$$

Mas, da equação (4.8) temos que

$$(N-1)\phi = -2\pi \frac{a}{\lambda} \sin(\theta)$$

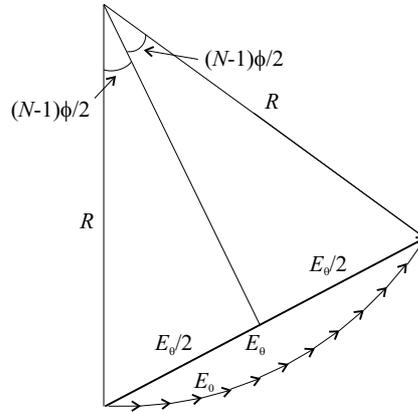


Figura 4.28: Determinação de E_θ a partir do diagrama fasorial para os campos elétricos das ondas que partem da fenda e chegam a um ponto no anteparo.

portanto,

$$\frac{E_\theta}{E_{\theta=0}} = \frac{\text{sen} \left[\frac{-2\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}(\theta)}{2} \right]}{\frac{-2\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}(\theta)}{2}} = \frac{\text{sen} \left(\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}(\theta) \right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}(\theta)} = \frac{\text{sen}(x)}{x}, \quad x = \pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}(\theta).$$

O aspecto dessa função, chamada de função amostragem ($S_a(x)$), está mostrado na figura (Fig. 4.29).

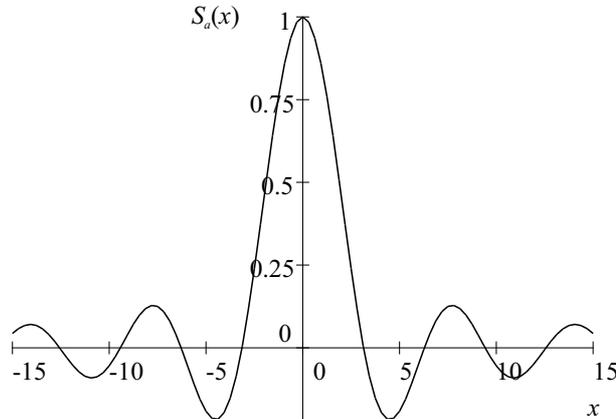


Figura 4.29: Função amostragem, $S_a(x)$.

Como a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude do campo teremos, para a intensidade relativa, a expressão

$$\frac{I(\theta)}{I(\theta=0)} = \left(\frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2 \quad (4.9)$$

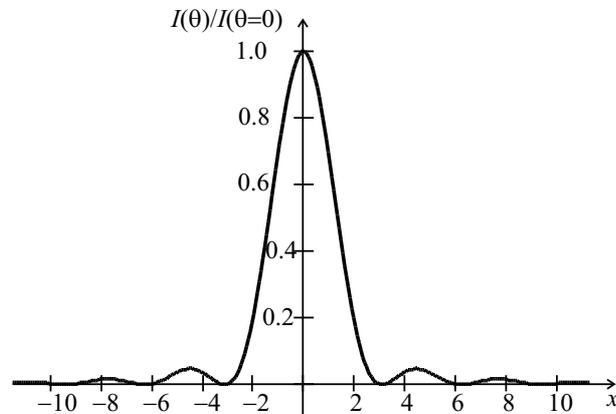


Figura 4.30: Intensidade relativa da difração de uma fenda.

e o correspondente gráfico (Fig. 4.30).

Os pontos de mínimo da intensidade ocorrem quando a função seno se anula

$$\sin(x) = 0, \quad \therefore \pi \frac{a}{\lambda} \sin(\theta) = k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

ou

$$a \sin(\theta) = k\lambda.$$

Para pontos próximos ao ponto central tal que $\theta \ll 1$ rad podemos aproximar o seno pela tangente

$$a \tan(\theta) = k\lambda$$

ou, para a posição y_{min} do ponto de mínimo,

$$a \frac{y_{min}}{D} = k\lambda, \quad \therefore y_{min} = k\lambda \frac{D}{a}. \quad (4.10)$$

Dessa expressão vemos que os pontos de mínimo estão separados por $\lambda D/a$ e que a franja central tem largura $2\lambda D/a$.

Infelizmente, as posições dos pontos de máximo não podem ser determinadas analiticamente pois resulta em uma equação transcendente que só pode ser resolvida graficamente ou numericamente. Podemos determinar, aproximadamente, a posição dos pontos de máximo como se estivessem no meio entre dois pontos de mínimo, com um erro muito pequeno.

4.4 Difração por duas fendas idênticas

Analisaremos agora a situação interessante onde duas fendas de abertura a , separadas por uma distância d produzem uma figura de difração em um anteparo distante.

Nessa situação, cada fenda produzirá, individualmente, uma figura de difração ligeiramente deslocada no anteparo. Como as duas fendas agem simultaneamente, haverá também a interferência das ondas que partem das duas fendas e chegam ao mesmo ponto do anteparo. O resultado dessa situação complexa é uma intensidade de luz no anteparo correspondente

a uma figura de interferência modulada por uma figura de difração. Esse resultado intuitivamente fácil de perceber não é tão simples de se demonstrar. A intensidade resultante é o produto da intensidade da figura de difração de uma fenda pela intensidade da figura de interferência de duas fendas finas, equações (4.3) e (4.9).

$$\frac{I(\theta)}{I(\theta = 0)} = \left(\frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2 \cos^2(\beta) \quad (4.11)$$

onde

$$x = \pi \frac{a}{\lambda} \text{sen}(\theta),$$

$$\beta = \pi \frac{d}{\lambda} \text{sen}(\theta).$$

4.5 Difração de múltiplas fendas

Nessa situação, muitas fendas idênticas de abertura a separadas por uma distância d produzem uma figura no anteparo distante que é, novamente, a intensidade de uma figura de difração de uma única fenda de abertura a modulando a intensidade de uma figura de interferência de múltiplas fendas finas.

Conforme mencionamos anteriormente, a figura de interferência consiste em uma sequência de picos finos (máximos principais) equidistantes e pequenos picos (máximos secundários) entre os máximos principais. A intensidade desses picos de interferência é multiplicada pela intensidade da figura de difração fazendo com que as intensidades dos picos de interferência sejam variáveis de acordo com a função

$$\left(\frac{\text{sen}(x)}{x} \right)^2.$$

Uma situação importante com muitas aplicações práticas é a da rede de difração onde uma grande quantidade de fendas idênticas são agrupadas. É comum se utilizar de 10000 a 15000 fendas em um espaço de 2,0 cm tornando-se um agrupamento extremamente denso. Isso é possível de se realizar mecanicamente riscando-se a superfície de uma placa de vidro com uma ponta fina de diamante com um passo muito pequeno. Também é possível de se realizar por redução fotográfica em um filme a partir de uma imagem de linhas paralelas. Na rede de difração uma pequena quantidade de picos principais de interferência (usualmente de um a sete) aparecem dentro da largura da franja central da figura de difração. Os picos secundários não são visíveis devido à grande quantidade de fendas utilizada, os picos principais ocorrem nas posições previstas para os máximos de interferência que seriam produzidos por duas fendas e as intensidades são moduladas pela figura de difração de uma fenda. A figura (Fig. 4.31) mostra um exemplo com três picos de intensidade.

O pico central chama-se pico de ordem zero e os dois picos laterais são os picos de primeira ordem. As posições dos picos são dadas pela equação

$$d \text{sen}(\theta) = k \lambda$$

e os valores do módulo de k correspondem às “ordens” da interferência. O inverso da separação d entre as fendas (ou linhas da rede) é a densidade de linhas da rede e quanto

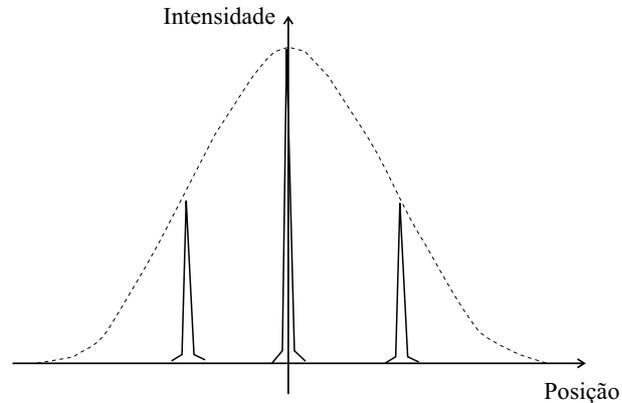


Figura 4.31: Intensidade relativa de uma rede de difração.

maior for a densidade de linhas maior será a separação angular correspondente aos picos de interferência para os diversos comprimentos de onda para uma mesma ordem. Uma rede com alta densidade de linhas é capaz de separar os picos de intensidade correspondentes a dois comprimentos de onda próximos, ou seja, tem capacidade de “resolver” ou separar linhas espectrais próximas.

A maior utilidade das redes de difração está na identificação de linhas espectrais ou comprimentos de ondas característicos de um determinado elemento ou mesmo uma substância química. Isso fornece um poderoso método de análise qualitativa dos elementos presentes em uma mistura conhecido como análise espectral.

4.6 Difração devida a orifícios

Um outro caso interessante de difração ocorre quando uma onda plana incide em um orifício circular, com diâmetro a , paralelo à frente de onda e observa-se a figura de difração em um anteparo distante paralelo ao orifício. No anteparo, visualiza-se uma região circular brilhante cuja intensidade diminui à medida que se afasta do centro até se tornar completamente escura. Concêntricos à região circular visualiza-se também anéis claros e escuros cujas intensidades máximas vão diminuindo à medida que se afasta do centro. Os raios dos anéis com intensidade mínima *não* são múltiplos do comprimento de onda como se poderia pensar como no caso da difração por uma fenda. Esses raios correspondentes ao mínimo da intensidade são descritos como os zeros de uma função especial não periódica mais complexa que a função senoidal. A posição angular do primeiro mínimo é tal que satisfaz, aproximadamente, à equação

$$a \operatorname{sen}(\theta) = 1,22 \lambda$$

ou, com a aproximação $\operatorname{sen}(\theta) \approx \tan(\theta) = r_1/D$

$$a \frac{r_1}{D} = 1,22 \lambda, \quad \therefore r_1 = 1,22 \frac{\lambda D}{a}.$$

Os mínimos consecutivos correspondem a outros valores do coeficiente análogo ao número 1,22.

A difração por orifícios circulares é mais comum do que se possa pensar. Ela ocorre em diversas situações físicas como a luz que atravessa a íris do olho, a luz que atravessa a lente de um instrumento óptico como a objetiva de um microscópio ou um telescópio ou mesmo a luz que atravesse qualquer pequeno orifício. Essa difração pode trazer dificuldades na visualização de objetos refletivos ou fontes de luzes relativamente próximas uma da outra. Por exemplo, as luzes de dois faróis de um automóvel distante do olho de um observador, as luzes de duas estrelas que atravessam a lente de um telescópio e são registradas em um filme fotográfico ou em um sensor de imagem, duas estruturas celulares próximas quando observadas com o auxílio de um microscópio, etc.

Cada fonte, independente, de luz (ou a luz refletida ou transmitida pelo objeto) produz uma figura de difração circular quando observadas individualmente. A observação simultânea das duas fontes resulta em duas figuras de difração que podem estar quase superpostas a depender da separação angular entre as fontes considerando o vértice no centro do orifício difratante (Fig. 4.32). Se as figuras de difração correspondentes à cada fonte estiverem muito superpostas de tal forma que os picos de intensidade da região central brilhante se confundam, teremos dificuldade de identificar que se tratam de duas fontes ao invés de uma única fonte. Em outras palavras, não conseguimos resolver as fontes ou objetos.

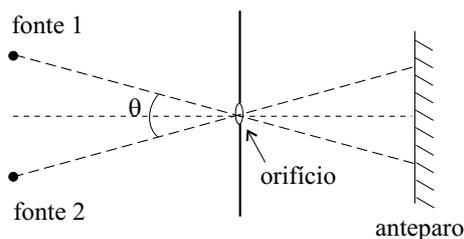


Figura 4.32: Separação angular entre duas fontes de luzes independentes simultaneamente difratadas por um pequeno orifício.

Se o diâmetro do orifício difratante aumentar ou se o comprimento de onda diminuir (mantendo a geometria fixa) as respectivas figuras de difração encolhem (diminuem o raio) diminuindo a superposição e tornando possível resolver os dois objetos. A situação onde ocorre a resolução é um conceito relativo e é necessário adotar-se um critério a partir do qual possamos afirmar que os dois objetos estejam separados ou resolvidos. O critério mais utilizado é o chamado critério de Rayleigh que diz: “dois objetos estão resolvidos quando a posição do máximo de difração de um objeto coincidir com a posição do primeiro mínimo de difração do outro objeto”.

4.7 Interferência produzida por películas

O que denominamos de película é um meio óptico de pequena espessura praticamente uniforme, caracterizado por um índice de refração e podendo estar imerso ou não em um outro meio. Quando falamos em pequena espessura estamos nos referindo à espessuras da ordem de alguns comprimentos de onda da luz utilizada, alguma coisa entre um e algumas dezenas de comprimentos de onda.

Películas comuns são as manchas de óleo sobre a água, bolhas de sabão, revestimentos de lentes de óculos e máquinas fotográficas, metalizações nas superfícies dos CDs e DVDs etc.

As películas apresentam o comportamento de refletir uma parte da luz incidente na primeira superfície enquanto outra parte da luz penetra na película até atingir a outra superfície onde também é refletida. Essas duas luzes refletidas ao chegarem a um observador poderão estar defasadas e a superposição delas poderá produzir efeitos interessantes como o reforço ou o aniquilamento. Vejamos com mais detalhes:

Tomemos, inicialmente, uma película plana com índice de refração n , espessura h uniforme e imersa no ar ou no vácuo. Nessa película incidiremos onda plana monocromática sob incidência praticamente normal e um observador verá a luz “refletida” com um ângulo de reflexão idêntico ao ângulo de incidência (razoavelmente pequeno, digamos até uns 20 graus). Veja a figura (Fig. 4.33).

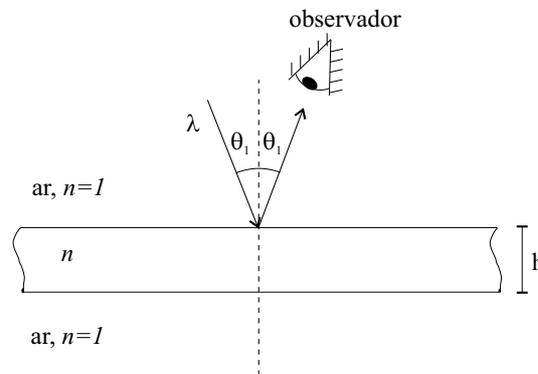


Figura 4.33: Película sob incidência praticamente normal e observador.

Estamos representando um único raio de luz incidente e refletido na película mas não nos esqueçamos que, na verdade, esse raio representa a normal à frente de onda plana que incide sobre toda a extensão infinita da película, ou seja poderíamos ter desenhado tantos raios paralelos quanto desejássemos. Essa representação está mostrando apenas a luz que foi refletida na superfície superior da película. Outra parte da luz penetra na película onde é refratada, contudo, o ângulo de refração é muito pequeno como prevê a lei de Snell para pequenos ângulos de incidência. Essa luz refratada atinge a superfície inferior da película sendo parcialmente refletida para cima e parcialmente transmitida para o ar que está abaixo (Fig. 4.34).

A luz que foi refletida pela superfície inferior volta à superfície superior onde será também parcialmente refletida para baixo e parcialmente transmitida para o ar que está acima e também chegará ao observador. Esse processo continua indefinidamente mas só precisamos analisar os dois raios de luz que chegam ao observador (Fig. 4.35).

Analisemos mais detalhadamente os caminhos percorridos pelas luzes que chegam ao observador (Fig. 4.36). Se traçarmos uma perpendicular aos raios 1 e 2 que intercepte o ponto de saída do raio 2 na primeira superfície, teremos caminhos idênticos dessa perpendicular até o observador. As diferenças entre os caminhos ocorrem antes dessa perpendicular. O primeiro raio refletido percorre o caminho geométrico l_1 no ar com velocidade praticamente igual à c . O segundo raio percorre o caminho geométrico $2l_2$ (uma descida e uma subida)

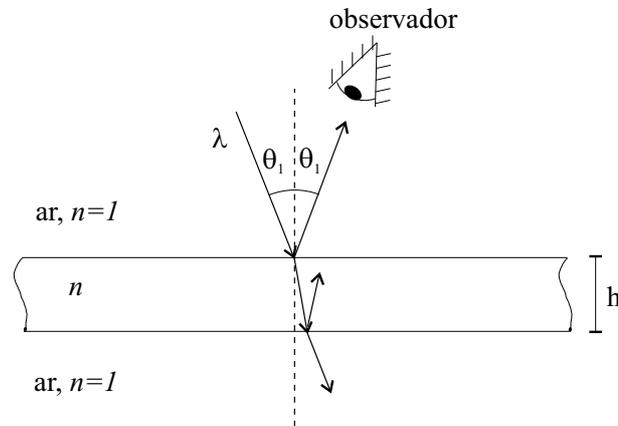


Figura 4.34: Luzes refletida, refratada e transmitida pela película.

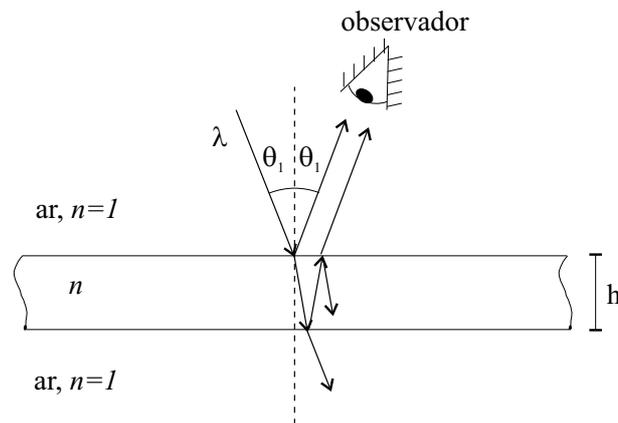


Figura 4.35: Luzes refletidas pela película que chegam ao observador.

dentro da película com velocidade de propagação c/n . A diferença entre os caminhos ópticos é $n 2 l_2 - l_1$. Além disso, no processo de reflexão que resulta no raio 1 ocorre uma inversão na onda (defasagem de π) uma vez que a onda é refletida na interface com índices de refração crescentes (do menor para o maior, de 1 para $n > 1$) enquanto que a reflexão que origina o raio 2 ocorre normalmente, sem inversão uma vez que a onda é refletida na interface com índices de refração decrescentes (do maior para o menor, de $n > 1$ para 1).

Se fosse levado em conta apenas a diferença entre caminhos ópticos, uma diferença igual a um múltiplo de um comprimento de onda ocasionaria uma interferência construtiva entre os dois raios que chegam ao observador. Contudo, existe a inversão da onda na primeira reflexão que torna essa interferência uma interferência destrutiva. Assim, a condição para interferência destrutiva será

$$n 2 l_2 - l_1 = m \lambda, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

e a condição para interferência construtiva será quando a diferença entre os caminhos ópticos

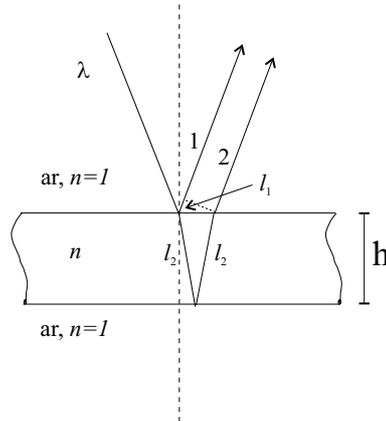


Figura 4.36: Caminhos geométricos das luzes refletidas pela película que chegam ao observador.

for um múltiplo ímpar de meio comprimento de onda

$$n 2 l_2 - l_1 = (2m - 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Se considerarmos a incidência praticamente normal, o caminho l_1 se anula e o caminho $2l_2$ é aproximadamente o dobro da espessura da película. Fica

$$2 n h = m \lambda, \quad m = 1, 2, 3... \quad (\text{para destrutiva}) \quad (4.12)$$

e

$$2 n h = (2m - 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3... \quad (\text{para construtiva}). \quad (4.13)$$

Outra situação interessante ocorre quando a película está entre dois meios diferentes e os índices de refração são crescentes, por exemplo, uma película de óleo ($n=1,2$) sobre a água do mar ($n=1,3$) ou mesmo uma película de óleo ou de água sobre uma placa espessa de vidro ($n=1,5$). Nesses casos temos o primeiro meio que é o ar ($n=1$), o segundo meio que é a película e o terceiro meio que é o substrato de apoio (água do mar ou a placa espessa de vidro nos exemplos). A situação é semelhante ao caso anterior com uma pequena diferença: ocorrem inversões nas ondas nos dois processos de reflexão nas duas superfícies ou interfaces da película com os outros meios. Os efeitos dessas duas inversões se cancelam e resta apenas a diferença entre os caminhos ópticos. Nesse caso, as condições para a ocorrência das interferências construtivas e destrutivas são inversas com relação ao caso anterior.

$$2 n h = m \lambda, \quad m = 1, 2, 3... \quad (\text{para construtiva}) \quad (4.14)$$

e

$$2 n h = (2m - 1) \frac{\lambda}{2}, \quad m = 1, 2, 3... \quad (\text{para destrutiva}). \quad (4.15)$$

As películas tem sido utilizadas com diversas finalidades práticas. Lentes de máquinas fotográficas podem ser revestidas com películas (MgF_2 por exemplo) para corrigir a transparência da lente para uma faixa de comprimentos de ondas, os refletores parabólicos das

lâmpadas dicróicas possuem uma película para reduzir a reflexão da radiação infravermelha fazendo com que essa faixa do espectro atravesse o refletor em direção ao fundo da caixa da lâmpada e não seja refletida para o objeto que está sendo iluminado, reduzindo o aquecimento sobre o objeto. Lentes plásticas (orgânicas, policarbonatos) de óculos são revestidas com películas para reduzir o reflexo da luz pela lente ou mesmo para obter o efeito inverso nos óculos para o Sol (refletir a luz azul e ultravioleta). Uma aplicação recente é a película metálica refletora que existe no CD, essa película tem espessura variável na forma de degrau cujo altura é da ordem do comprimento de onda de modo que dois raios de um laser que sejam refletidos pela película podem interferir construtivamente ou destrutivamente codificando os números binários zero ou um.

Exemplo:

Uma película de água com sabão ($n = 1,33$) com 320 nm de espessura, no ar, é iluminada por luz branca em incidência quase normal e a luz refletida é vista por um observador.

a) Determine o comprimento de onda visível que satisfará à condição de interferência construtiva. Que cor parecerá ter a luz refletida?

b) Determine o comprimento de onda visível que satisfará à condição de interferência destrutiva. Olhando-se pelo outro lado da película que cor parecerá ter a luz transmitida?

Determinemos os comprimentos de onda que satisfazem à condição de interferência construtiva, equação (4.13):

$$\lambda_c = 2 \frac{2 n h}{2 m - 1} = 2 \frac{2 \times 1,33 \times 3200}{2 m - 1}, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

$$m = 1 \Rightarrow \lambda = 1700 \text{ nm}, \quad \text{IV, não visível}$$

$$m = 2 \Rightarrow \lambda = 570 \text{ nm}, \quad \text{amarela, visível}$$

$$m = 3 \Rightarrow \lambda = 340 \text{ nm}, \quad \text{UV, não visível}$$

$$m = 4 \Rightarrow \lambda < 300 \text{ nm}, \quad \text{UV, não visível}$$

não é necessário prosseguir, as luzes não são mais visíveis. A luz refletida terá aparência de amarelo (predominante).

Determinemos os comprimentos de onda que satisfazem à condição de interferência destrutiva, equação (4.12):

$$\lambda_d = \frac{2 n h}{m} = \frac{2 \times 1,33 \times 3200}{m}, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

$$m = 1 \Rightarrow \lambda = 850 \text{ nm}, \quad \text{IV, não visível}$$

$$m = 2 \Rightarrow \lambda = 426 \text{ nm}, \quad \text{azul}$$

$$m = 3 \Rightarrow \lambda < 400 \text{ nm}, \quad \text{UV, não visível}$$

não é necessário prosseguir. Observe que a luz azul é completamente destruída na reflexão e, como a energia se conserva, essa mesma luz aparece do outro lado da película como luz transmitida. O observador, do outro lado da película, enxergará uma luz com aparência de azul (predominante).

Capítulo 5

Física Moderna

5.1 As fontes de luz

É um fato conhecido que todo corpo aquecido emite radiação eletromagnética que ocupa uma ampla faixa contínua do espectro eletromagnético. Quando a temperatura é baixa, da ordem da temperatura ambiente, a radiação emitida tem comprimento de onda predominantemente na região do infravermelho distante enquanto que para temperaturas elevadas, da ordem de alguns milhares de kelvins a radiação predominante está na região visível. Para temperaturas muito elevadas a radiação predominante é azul tendendo ao ultravioleta. Em qualquer caso, o espectro é contínuo.

Por outro lado, a luz emitida por uma descarga elétrica em um gás, vapor de mercúrio por exemplo, tem uma coloração própria e, quando analisada em um espectroscópio, mostra apenas alguns comprimentos de onda discretos (linhas) com intensidade variável de linha para linha sem nenhuma relação aparente entre o comprimento de onda e a intensidade. O mesmo fenômeno pode ser observado ao vaporizar uma substância sólida em uma chama. O sal ordinário (cloreto de sódio) emite luz amarela ao cair na chama de um fogão que, quando analisada, mostra dois comprimentos de onda muito próximos e intensos na região correspondente ao amarelo/laranja.

Essas duas formas de produção de luz tem causas distintas e forneceram as primeiras pistas que levaram ao que conhecemos hoje como a física moderna.

5.2 Radiação de um corpo aquecido

No final do século XIX, um problema industrial na siderurgia do aço, a medição da temperatura dos autofornos siderúrgicos, teve consequências surpreendentes. Devido à impossibilidade de se introduzir um termômetro no metal derretido para medir a temperatura e melhor controlar o processo de fabricação, surgiu a ideia de determinar a temperatura a partir da intensidade da radiação emitida em um pequeno orifício na parede do forno. O forno com paredes isolantes e o metal derretido formam um sistema termodinâmico em equilíbrio e a intensidade do espectro da luz emitida deveria corresponder à temperatura do forno. A intensidade da luz emitida depende tanto da temperatura quanto do comprimento de onda (ou da frequência da radiação) e uma grandeza representativa para cada valor de

temperatura é a radiância espectral, R , definida como a intensidade por comprimento de onda da radiação.

As curvas de radiância espectral observadas tem o aspecto seguinte (Fig. 5.1).

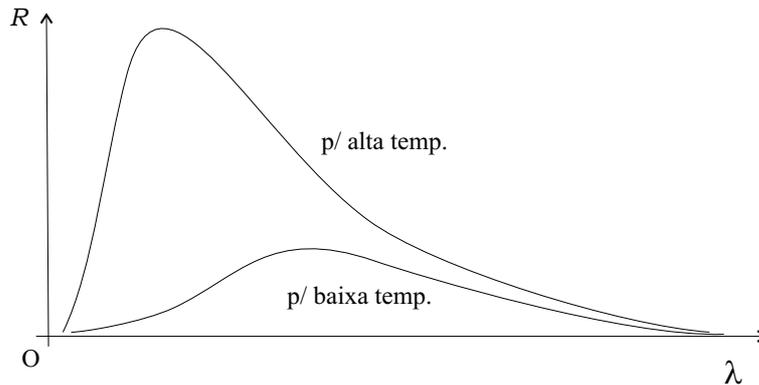


Figura 5.1: Curva de radiância espectral em um auto forno.

As tentativas de explicação da curva de radiância baseadas no eletromagnetismo clássico falharam. Duas teorias ficaram famosas, a teoria de Wien e a teoria de Rayleigh-Jeans válidas respectivamente para grandes e pequenos comprimentos de onda com boa aproximação. Contudo, nenhuma das teorias conseguia explicar a curva de radiância completamente. Max Planck, em 1900, percebeu, do ponto de vista matemático, que a teoria de Wien poderia ser modificada para que se ajustasse aos dados experimentais. No modelo que era utilizado para representar o forno (ou uma cavidade aquecida) foi feita a hipótese de que as energias possíveis para os osciladores que representam as paredes do forno tivessem valores discretos, múltiplos de um valor fundamental dependente da frequência de oscilação de acordo com a expressão

$$E = n h \nu \quad (5.1)$$

onde n é um número inteiro, h é uma constante, ν é a frequência da oscilação e que a radiação só fosse emitida ou absorvida pelo oscilador quando houvesse uma variação no valor de n .

A expressão obtida por Planck reproduziu a curva experimental e o ajuste aos valores experimentais produziu o valor da constante $h = 6,6 \times 10^{-34}$ J.s. conhecida como constante de Planck.

Posteriormente verificou-se que a expressão correta para a energia dos osciladores é

$$E = \left(n + \frac{1}{2}\right) h \nu \quad (5.2)$$

sem alteração nas conclusões obtidas.

Essa foi a primeira evidência experimental de que a energia tem variação discreta ao invés de contínua. Pergunta-se: por que não percebemos isso no mundo macroscópico? Os experimentos mecânicos e elétricos parecem produzir resultados coerentes com uma energia que varia continuamente. Tomemos um exemplo típico de um oscilador massa-mola, um automóvel com massa igual a 500 kg que oscila com uma amplitude de 5 cm e uma frequência

de 1 Hz (ao passar por um buraco na rua por exemplo). A energia mecânica desse oscilador harmônico vale

$$E = \frac{1}{2} m (2\pi f)^2 A^2 = \frac{1}{2} \times 500 \times (2 \times \pi)^2 \times 0,05^2 \approx 24,7 \text{ J.}$$

Pela hipótese de Planck devemos ter

$$E = n h \nu, \quad \therefore 24,7 = n \times 6,6 \times 10^{-34}$$

ou seja,

$$n \approx 4 \times 10^{34}$$

que é um número absurdamente grande. Como n é um número inteiro, sua variação ou incremento vale uma unidade. Portanto, a variação relativa da energia é extremamente pequena, da ordem de 10^{-34} . Isso é completamente imperceptível do ponto de vista de qualquer instrumento de medida. Por essa razão não percebemos a natureza discreta da energia.

Contudo, se formos para o mundo microscópico, no domínio atômico, um elétron oscilando e emitindo luz por exemplo, a massa é muito pequenas, (a massa do elétron vale $9,1 \times 10^{-31}$ kg) e a frequência de oscilação para emitir luz visível (verde) é da ordem de 6×10^{16} Hz com amplitudes da ordem do diâmetro atômico (10^{-10} m). Com esses dados obtemos um valor para n de algumas dezenas de unidade. Portanto, uma variação de uma unidade em n é comparável ao próprio valor de n , sendo bastante significativa. A natureza discreta da energia torna-se, então, perfeitamente perceptível.

5.3 O efeito fotoelétrico

Esse efeito consiste na emissão de elétrons por uma superfície metálica quando submetida à incidência de luz. Já era conhecido que corpos metálicos eletrostaticamente carregados se descarregavam naturalmente mais rapidamente em ambientes iluminados do que em ambientes escuros, principalmente quando submetidos à luz solar. Em seus experimentos com os primeiros transmissores e receptores de ondas eletromagnéticas de rádio, Hertz percebeu que a emissão de faísca elétrica em seus equipamentos ocorria com maior facilidade quando iluminados por radiação ultravioleta do que com iluminação normal.

Verifica-se, experimentalmente, que a incidência de uma onda eletromagnética de alta frequência sobre uma superfície metálica arranca alguns elétrons do metal com uma energia cinética que depende da frequência da onda. Verifica-se também que abaixo de uma certa frequência, que depende do metal utilizado, não ocorre o efeito fotoelétrico. Por exemplo, a luz vermelha (670 nm) não arranca elétrons do alumínio mas arranca no caso do sódio. Outra observação importante é que o efeito é instantâneo, não decorre nenhum lapso de tempo mensurável entre a incidência da luz e a saída do elétron. Nenhum desses fatos pode ser explicado pela teoria eletromagnética clássica.

Para melhor estudar o efeito fotoelétrico utiliza-se um arranjo experimental constituído por uma ampola de vidro com dois eletrodos metálicos e uma janela de quartzo transparente à radiação. É feito vácuo no interior da ampola e a radiação só incide em um dos eletrodos. Externamente à ampola é formado um circuito elétrico contendo um microamperímetro em série com uma fonte de tensão variável tanto em módulo quanto em polaridade (Fig. 5.2).

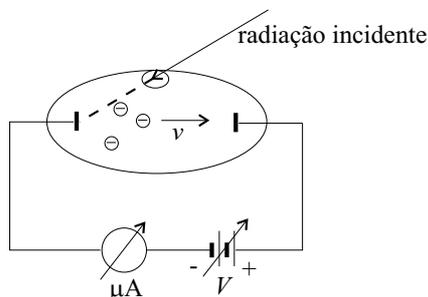


Figura 5.2: Arranjo experimental para investigar o efeito fotoelétrico.

Sob a incidência da luz alguns elétrons são arrancados do eletrodo metálico da esquerda com uma certa velocidade inicial e alguns deles atingem a outra placa percorrendo o circuito na forma de uma corrente elétrica que é registrada pelo micro amperímetro. Ajustando-se a polaridade da fonte de tensão é possível capturar ou repelir alguns dos elétrons ejetados. Para uma tensão positiva (placa da direita positiva com relação à placa da esquerda) é criado um campo elétrico entre os eletrodos que acelera o elétron ejetado em direção ao eletrodo da direita. Para uma tensão negativa, o campo elétrico desacelera o elétron ejetado no sentido de impedir que alcance o eletrodo da direita.

O gráfico experimental da corrente de fotoelétrons em função da tensão V tem o aspecto mostrado na figura (Fig. 5.3) para duas intensidades distintas de luz monocromática.

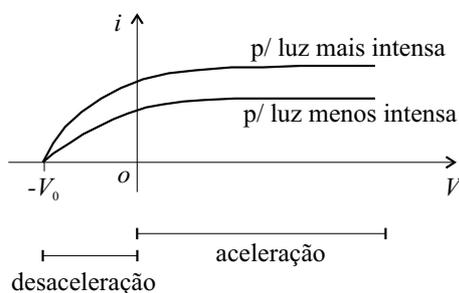


Figura 5.3: Corrente fotoelétrica em função da tensão para duas luzes de mesma frequência e intensidades diferentes.

Para tensões muito positivas as curvas tendem a se horizontalizar ou saturar numa região conhecida como “plateau” significando que todos os elétrons emitidos estão sendo capturados. O aumento do potencial não faz mais efeito na captura dos elétrons. Para tensões negativas as curvas tendem a se encontrar em um único ponto cuja tensão é conhecida como potencial de parada (V_0). Nesse ponto a corrente é nula significando que o mais veloz dos elétrons emitidos não consegue alcançar o eletrodo da direita. O elétron é emitido com uma certa velocidade e vai desacelerando em sua trajetória para a direita até parar a uma distância infinitesimal do eletrodo sem penetrá-lo sendo então atraído de volta para o eletrodo da esquerda de onde foi ejetado. Observe que o potencial de parada não depende da intensidade da luz. A intensidade da luz só influencia na quantidade de elétrons arrancados por unidade de tempo para cada valor de tensão aplicada

Para esse potencial de parada podemos determinar a energia cinética do mais veloz elétron emitido. Pela igualdade entre a energia cinética e a energia potencial elétrica temos $E_{c \text{ max}} = e V_0$.

Outra observação experimental importante é que o potencial de parada depende da frequência da radiação incidente. Realizando a experiência com duas luzes de mesma intensidade e cores distintas que ainda produzam o efeito temos o comportamento mostrado na figura (Fig. 5.4). Observe que o potencial de parada para a luz azul é maior que o da luz vermelha.

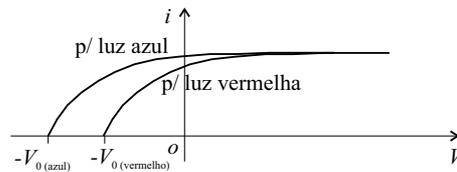


Figura 5.4: Corrente fotoelétrica em função da tensão para duas luzes de mesma intensidades e frequências diferentes.

Esse experimento pode ser repetido para luzes de diversas cores com a mesma intensidade e o potencial de parada pode ser determinado para cada cor. Encontra-se uma relação linear entre o potencial de parada e a frequência (Fig. 5.5).

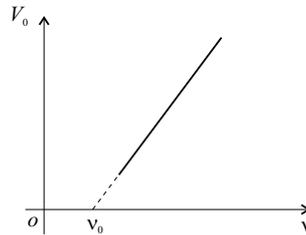


Figura 5.5: Dependência linear entre o potencial de parada e a frequência no efeito fotoelétrico.

No ponto em que o potencial de parada é nulo ($V_0 = 0$) o elétron simplesmente não é arrancado do metal (pois não é necessário nenhum potencial para frear o elétron) e a frequência da radiação correspondente é chamada de frequência de corte (ν_0). Para valores de frequências menores que a frequência de corte não ocorre o efeito fotoelétrico. Essa frequência pode ser determinada por extrapolação da reta do gráfico experimental até o ponto de cruzamento com o eixo das frequências. Para o sódio metálico a frequência de corte vale $4,39 \times 10^{14}$ Hz e corresponde a uma luz na região do vermelho.

Einstein propôs uma teoria que consegue dar conta de todos esses resultados experimentais. Ele propôs que a energia transportada e transferida ao metal pela onda eletromagnética está concentrada em pequenos “pacotes” de energia, posteriormente chamados de fótons, cujo valor de energia vale $E = h\nu$, onde h é a constante de Planck.

Quando a luz incide em um metal, parte da energia $h\nu$ é utilizada para arrancar o elétron de dentro do metal até a superfície e o que sobra aparece na forma de energia

cinética do elétron.

$$h\nu = W + E_c$$

A menor energia necessária para arrancar o elétron de dentro do metal (aqueles elétrons que estão mais soltos, mais próximos da superfície) é atualmente conhecida como “função trabalho” W_0 e seu valor varia de substância para substância. Como essa energia é a mínima, sobra a máxima energia cinética possível.

$$h\nu = W_0 + E_{c \max}$$

Contudo, a energia cinética máxima está relacionada ao potencial de parada como foi anteriormente mencionado, portanto,

$$h\nu = W_0 + eV_0, \quad \therefore V_0 = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_0}{e}.$$

Ou seja, existe uma relação linear entre o potencial de parada e a frequência cujo coeficiente angular está relacionado com a constante de Planck e a carga do elétron. Tanto o coeficiente angular quanto o coeficiente linear podem ser obtidos do gráfico experimental (Fig. 5.5). O valor da constante de Planck obtido por esse método coincide com o valor obtido pelo ajuste da curva de radiância espectral.

A teoria do efeito fotoelétrico de Einstein contradiz a teoria eletromagnética clássica ao afirmar que a troca de energia se dá de forma instantânea e que a energia do fóton é dependente da frequência da onda. Segundo a teoria eletromagnética, a quantidade de energia transferida da onda para o metal depende do produto da intensidade da onda (que é proporcional ao quadrado da amplitude do campo elétrico) pelo intervalo de tempo de exposição de forma que o efeito não poderia ser instantâneo nem depender da frequência. A teoria eletromagnética funciona bem para frequências abaixo da frequência de corte e é amplamente utilizada nesse domínio de validade. Contudo, quando a radiação interage com a matéria a nível microscópico essa teoria perde a validade. De certa forma isso não deve surpreender uma vez que a teoria eletromagnética foi construída com base nos experimentos do mundo macroscópico admitindo-se a condição de continuidade dos meios e da matéria. Não há nenhuma garantia que essa teoria também tenha validade a nível atômico. Outros fatos experimentais que relataremos a seguir confirmam esse pensamento. A teoria do efeito fotoelétrico é um marco no modo de pensar a interação entre a radiação e a matéria.

5.4 O efeito Compton

Quando a radiação eletromagnética de alta frequência, tipicamente raios-X, incide sobre elétrons praticamente em repouso em um alvo de grafite verifica-se, experimentalmente, que parte da radiação é espalhada ocorrendo uma mudança no comprimento de onda dessa radiação. Essa mudança depende do ângulo em que se observa a radiação com relação à direção de incidência. Além disso, o elétron originalmente em repouso relativo é ejetado para fora do material em muito alta velocidade instantaneamente. A teoria eletromagnética clássica não prevê a alteração no comprimento de onda nem a ejeção instantânea do elétron. Contudo, se considerarmos que a radiação é composta por corpúsculos com energia $h\nu$ que se chocam com o elétron segundo as leis da mecânica relativística, a conservação da quantidade de movimento e da energia com correção relativística da massa, o efeito Compton é

totalmente explicado. A correção relativística da massa é necessária devido à alta velocidade de ejeção do elétron.

O efeito Compton é mais um argumento em favor da teoria corpuscular da radiação nos processos de interação com a matéria.

5.5 Espectro de raias

A observação com um espectrômetro da luz emitida por substâncias quando submetidas a altas temperaturas ou a uma descarga elétrica evidencia que essa luz é composta por cores, raias ou linhas discretas. A nomenclatura de raias ou linhas vem do fato de tais aparelhos utilizarem uma óptica que contém fendas finas para melhor identificação dos diversos comprimentos de onda. É o que observamos na luz emitida por um sal em uma chama (por exemplo, o cloreto de sódio na chama de um fogão emite luz amarela) ou em uma lâmpada de vapor de mercúrio ou sódio utilizada na iluminação pública. A cada linha espectral está associado um único comprimento de onda. Esse espectro difere do espectro contínuo que normalmente observamos na luz emitida por uma lâmpada incandescente comum (lâmpada de filamento de tungstênio aquecido).

Utilizando o conceito de fótons proposto por Einstein, podemos associar valores discretos de energias correspondentes às diversas raias espectrais.

O hidrogênio é o elemento mais simples e suas linhas espectrais foram inicialmente observadas por A. J. Angstrom em 1853. Apresenta linhas espectrais que vão do infravermelho ao ultravioleta e essas linhas aparecem na forma de grupos ou séries onde podemos perceber um espaçamento crescente entre as linhas dentro de um determinado grupo (Fig. 5.6). O primeiro grupo estudado foi a série de Balmer (J.J. Balmer - 1885) na região visível seguido por outras séries não visíveis mas que podiam ser registradas em películas fotográficas. Balmer era um professor de matemática e conseguiu, empiricamente, expressar os comprimentos de onda visíveis em uma série matemática

$$\lambda = 3645,6 \times \frac{n^2}{n^2 - 4} \times 10^{-10} \text{ m}, \quad n = 3, 4, 5, 6.$$

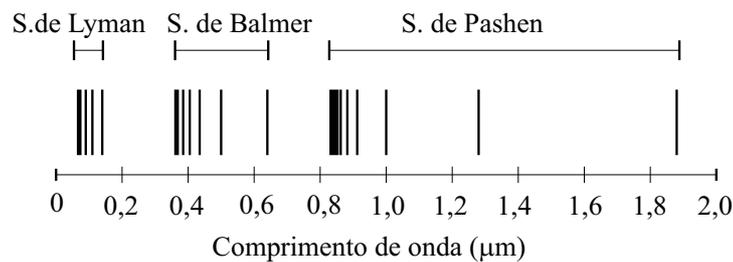


Figura 5.6: Algumas séries de linhas espectrais do hidrogênio.

Posteriormente, em 1888, J. R. Rydberg reescreveu a fórmula de Balmer expressando o inverso do comprimento de onda ($1/\lambda$) como

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

onde $R_H = 1,09737 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ é chamada de *constante de Rydberg* para o hidrogênio.

A fórmula de Rydberg foi generalizada por W. Ritz para representar as outras séries de linhas espectrais do hidrogênio

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

onde $m = 1$ e $n = 2, 3, \dots$ para a série de Lyman, $m = 2$ e $n = 3, 4, \dots$ para a série de Balmer, $m = 3$ e $n = 4, 5, \dots$ para a série de Paschen, $m = 4$ e $n = 5, 6, \dots$ para a série de Brackett e $m = 5$ e $n = 6, 7, \dots$ para a série de Pfund.

A teoria eletromagnética clássica não tem como explicar os espectros de linhas característicos dos elementos químicos. Além disso, os modelos atômicos de Thomson e Rutherford daquela época também não eram compatíveis com o espectro de linhas. Foi Bohr quem primeiro conseguiu construir um modelo para o átomo de hidrogênio capaz de produzir resultados compatíveis com o espectro de linhas observado. Bohr baseou-se no modelo das órbitas de Rutherford e na fórmula de Rydberg mas introduziu duas hipóteses revolucionárias:

1. Postulou que, das órbitas previstas pelo modelo de Rutherford, somente aquelas correspondentes aos *estados estacionários* com determinadas energias $\{E_1, E_2, E_3, E_4, \dots\}$ podiam existir. Nos estados estacionários os elétrons em suas órbitas ao redor do núcleo não irradiavam energia eletromagnética.
2. Postulou também que a emissão ou absorção de radiação eletromagnética só ocorria quando havia uma transição de um estado estacionário para outro sendo que a diferença entre as energias dos estados é que definiria a frequência da radiação emitida ou absorvida de acordo com a fórmula de Einstein. A frequência da radiação emitida vale

$$\nu = \frac{|E_i - E_j|}{h}$$

onde E_i e E_j são as energias dos respectivos estados estacionários e h é a constante de Planck.

Para satisfazer a fórmula de Rydberg, as energias das órbitas possíveis de acordo com o modelo de Rutherford foram calculadas como valendo

$$E_n = -\frac{m e^4}{8 \varepsilon^2 h^2} \frac{1}{n^2} \text{ (joules)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Posteriormente, verificou-se que a quantificação da energia (cinética mais potencial elétrica) da órbita era equivalente à quantificação do momento angular dessa órbita

$$L = n \frac{h}{2\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Atualmente, podemos colocar essa afirmação como um postulado equivalente na construção do modelo de Bohr. Procederemos dessa forma, não histórica, para desenvolver as previsões desse modelo de forma simplificada.

Se considerarmos um elétron girando em órbita circular ao redor de um núcleo positivo em repouso (devido à grande diferença entre as massas) submetido à uma força centrípeta igual à atração Coulombiana teremos

$$\frac{m v^2}{r} = \frac{1}{4 \pi \varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad \therefore m^2 v^2 r^2 = \frac{e^2 m r}{4 \pi \varepsilon_0} \quad (5.3)$$

mas

$$L = m v r = n \frac{h}{2 \pi}$$

portanto

$$\left(n \frac{h}{2 \pi} \right)^2 = \frac{e^2 m r}{4 \pi \varepsilon_0}$$

$$\therefore r = n^2 \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m e^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Essa expressão mostra que os raios possíveis para as órbitas são quantizados. Calculemos agora a energia cinética e a energia potencial. Da equação (5.3) temos

$$m v^2 = \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0 r}$$

e a energia cinética será

$$E_c = \frac{m v^2}{2} = \frac{e^2}{8 \pi \varepsilon_0 r}$$

A energia potencial do elétron submetido à força do núcleo considerando o valor zero no infinito vale

$$E_p = -\frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0 r}$$

e a energia total do sistema

$$E = E_c + E_p = \frac{e^2}{8 \pi \varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4 \pi \varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8 \pi \varepsilon_0 r}$$

Substituindo o valor do raio da órbita, equação (5.4) fica

$$E_n = -\frac{m e^4}{8 \varepsilon^2 h^2} \frac{1}{n^2} \text{ (joules)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.5)$$

A diferença de energia correspondente às órbitas i e j é dada por

$$E_i - E_j = -\frac{m e^4}{8 \varepsilon^2 h^2} \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2} \right), \quad j > i.$$

e pela fórmula de Einstein, a frequência da radiação correspondente será

$$\nu_{i,j} = \frac{|E_i - E_j|}{h} = \frac{m e^4}{8 \varepsilon^2 h^3} \left| \frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2} \right|.$$

Os valores de i definem os nomes das séries e os valores de j definem as frequências dentro da série. Por exemplo, $i = 1$ define a série de Lyman, $i = 2$ define a série de Balmer etc.

O estado de mais baixa energia (estado fundamental) do átomo de hidrogênio é aquele correspondente a $n = 1$ na equação (5.5) resultando em $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ ($1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$). O módulo dessa energia, chamado de energia de ionização, é a energia necessária para arrancar o elétron de sua órbita fundamental tornando-o um elétron livre.

5.6 O princípio da correspondência

Como vimos, os níveis de energia no átomo de hidrogênio dependem de $1/n^2$ e podemos observar que esses níveis tornam-se muito próximos para grandes valores de n . É de se esperar que, para $n \rightarrow \infty$, fique difícil de se perceber a natureza discreta dos níveis de energia. Em particular, o problema muda de discreto para contínuo para energias absorvidas maiores que 13,6 eV pois, neste caso, o elétron estará livre da atração do núcleo podendo ter qualquer valor de energia cinética correspondente à diferença entre a energia absorvida e a energia de ionização (13,6 eV).

$$E - 13,6 \text{ eV} = E_{\text{cinética}}$$

onde E é a energia absorvida pelo átomo em eV.

Consideremos, por exemplo, a radiação emitida por um elétron em órbita quantizada de acordo com o que é previsto pela teoria eletromagnética clássica. Por essa teoria, um elétron orbitando ao redor do núcleo com uma frequência ν deveria emitir radiação com essa mesma frequência. Essa frequência pode ser calculada a partir da velocidade do elétron e do raio da órbita. Da equação (5.3) temos que

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m r}}$$

Como o comprimento da órbita vale $2\pi r$, a frequência de giro na órbita vale

$$\nu = \frac{v}{2\pi r} = \frac{e}{\sqrt{16\pi^3\epsilon_0 m r^3}}$$

Porém, se o raio da órbita for quantizado de acordo com Bohr, equação (5.4), fica

$$\nu = \frac{m e^4}{4\epsilon_0^2 h^3} \frac{1}{n^3}$$

e essa deve ser a frequência irradiada classicamente.

Comparemos agora com a previsão do modelo de Bohr para grandes valores de n . De acordo com o modelo, quando ocorre uma transição entre dois níveis consecutivos, n e $n-1$ devemos ter

$$h\nu = \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right],$$

ou seja,

$$\nu = \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \frac{n^2 - (n-1)^2}{(n-1)^2 n^2} = \frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \frac{2n-1}{(n-1)^2 n^2}$$

e para grandes valores de n fica

$$\frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \frac{2}{n^3} = \frac{m e^4}{4\epsilon_0^2 h^3} \frac{1}{n^3}.$$

Vemos, portanto, que para grandes valores de n a frequência da radiação prevista pela teoria eletromagnética clássica para uma órbita quantizada corresponde à frequência correspondente à transição entre dois níveis de acordo com o modelo de Bohr.

Isso leva ao “princípio da correspondência” que afirma que os resultados previstos quanticamente devem corresponder ao que é previsto pela teoria clássica quando o número quântico é muito grande.

5.7 A dualidade onda-partícula

Posteriormente à Bohr, Louis De Broglie em 1924 propõe que uma partícula em movimento com uma quantidade de movimento p deveria possuir um comprimento de onda associado que poderia ser calculado pela fórmula de Einstein para o fóton, $E = h\nu$, e pelo momento associado à radiação eletromagnética $p = E/c$ resultando em

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \quad \text{pois } c = \lambda\nu. \quad (5.6)$$

Por exemplo, se um elétron for acelerado entre dois eletrodos no vácuo submetidos à uma d.d.p. de 100 V, correspondendo a uma energia cinética de 100 eV, qual será o comprimento de onda associado? Temos que

$$E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{m_e^2 v^2}{2 m_e} = \frac{p^2}{2 m_e}, \quad \therefore p = \sqrt{2 m_e E_c}.$$

O comprimento de onda associado será então

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m_e E_c}} = \frac{6,6 \times 10^{-34}}{2 \times 9,1 \times 10^{-31} \times 100 \times 1,6 \times 10^{-19}} \approx 1,2 \times 10^{-10} \text{ m} = 1,2 \text{ \AA}.$$

Esse comprimento de onda é da ordem da distância entre átomos em um cristal simples (NaCl por exemplo). Pergunta-se o que ocorreria se um cristal fosse bombardeado por um elétron com essa energia? Se o elétron tiver um comportamento ondulatório, um efeito semelhante à lei de Bragg para a difração de raios-X deveria ser observado. Tal experimento foi previsto em 1926 por Elsasser e verificado experimentalmente por Davisson e Germer nos EUA e por G. P. Thomson na Escócia, incidindo um feixe de elétrons em um monocristal de Níquel. A figura (Fig. 5.7) mostra o arranjo experimental do experimento de difração de elétrons de Davisson e Germer.

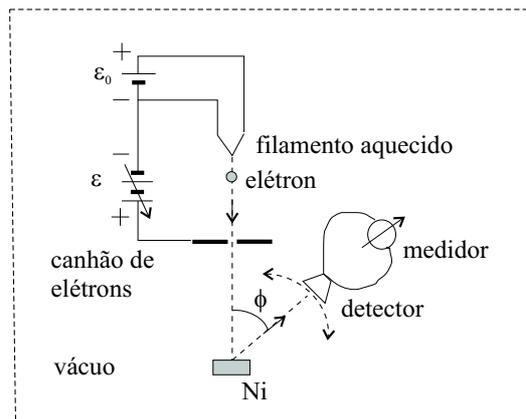


Figura 5.7: Arranjo do experimento de difração de elétrons de Davisson e Germer.

O detector detecta os elétrons espalhados pelo cristal e indica o resultado em um medidor que pode ser, por exemplo, um micro amperímetro.

Para uma posição fixa de detector, por exemplo, $\phi = 50^\circ$, obteve-se a seguinte curva experimental (Fig. 5.8) para a corrente no detector versus a energia cinética do elétron. Pode-se observar o pico em aproximadamente 54 eV.

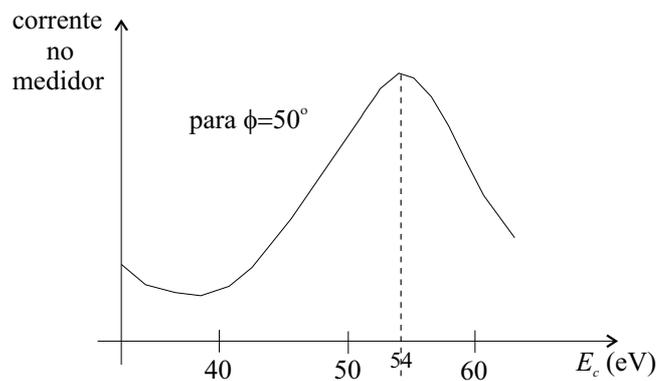


Figura 5.8: Resultado do experimento de difração de elétrons de Davisson e Germer.

Analisemos o experimento como se fosse uma difração de Bragg (Fig. 5.9) num cristal com espaçamento entre planos igual à $0,91 \text{ \AA}$ (valor conhecido para o níquel a partir da difração de raios-X).

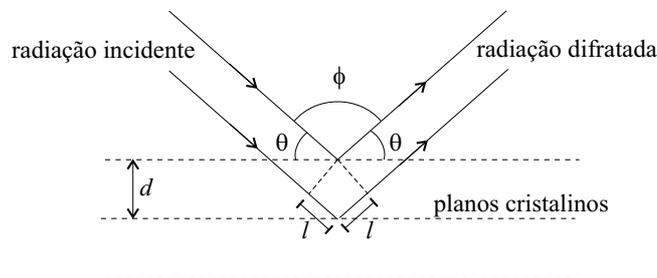


Figura 5.9: Geometria da difração de Bragg pelos planos cristalinos.

Veja que

$$l = d \operatorname{sen}(\theta)$$

e que a diferença de caminhos é igual à $2l$. Portanto, a condição de interferência construtiva será

$$2l = 2d \operatorname{sen}(\theta) = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

De acordo com a figura, os ângulos θ e ϕ estão relacionados por

$$\theta + \phi + \theta = 180^\circ, \quad \therefore \theta = \frac{180 - \phi}{2}$$

e para $\phi = 50^\circ$ teremos $\theta = 65^\circ$.

Calculando λ temos

$$2 \times 0,91 \times \sin(65^\circ) = \lambda, \quad m = 1$$

$$\therefore \lambda = 1,65 \text{ \AA}.$$

Mas, pela hipótese de De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2 m_e E_c}} = \frac{6,6 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times 9,1 \times 10^{-31} \times 54 \times 1,6 \times 10^{-19}}} = 1,66 \text{ \AA}$$

que está em excelente acordo com o comprimento de onda anterior.

Os comprimentos de onda calculados pela difração de Bragg e pela hipótese de De Broglie são muito próximos, justificando a ideia de que existe uma onda associada à partícula com quantidade de movimento p . Contudo, não se sabia a natureza dessa onda, onda de que? Outros experimentos realizados, por exemplo, difração de elétrons por uma fenda microscópica realizada com um feixe de muito baixa intensidade e quantidade de movimento conhecida, uma corrente eletrônica muito pequena, quase elétron por elétron, produziu um resultado surpreendente. No anteparo, que pode ser de um material fosforescente ou um filme fotográfico sensível pode-se observar a chegada do elétron difratado pela fenda. Ao passar pela fenda, o elétron tem sua trajetória desviada e chega ao anteparo produzindo uma marca. Com o passar do tempo as marcas vão se acumulando e pode-se notar uma figura idêntica à figura de difração da luz visível por uma fenda! A diferença é que os elétrons vão chegando ao anteparo *um de cada vez* havendo posições de maior frequência de chegada e posições onde praticamente o elétron não chega. Em outras palavras, existem regiões de maior probabilidade de chegada do que outras e essas regiões mais prováveis são aquelas onde as marcas resultantes são mais escuras no filme (no filme fotográfico a região sensibilizada é a região escurecida).

Não é possível determinar a trajetória do elétron entre a fenda e o anteparo pois, qualquer tentativa de determinação resulta em uma interação com o elétron que destrói a figura de difração.

As posições das regiões mais prováveis para a chegada do elétron são calculadas usando-se a hipótese de De Broglie para o comprimento de onda e a fórmula das posições dos picos (franja central e franjas laterais) de difração para a luz determinadas com esse comprimento de onda. A chegada do elétron no anteparo é um acontecimento probabilístico havendo regiões de maior probabilidade de chegada do que outras regiões. Não há como prever onde um elétron, que passou pela fenda, chegará ao anteparo, apenas a probabilidade de chegar a um determinado ponto pode ser calculada.

De todos os resultados experimentais expostos vemos que a radiação apresenta um comportamento ondulatório em determinados experimentos e outras vezes um comportamento de partícula em outros experimentos. O mesmo ocorre com as partículas.

É importante notar que o resultado de um experimento é único, ou o comportamento é de onda ou é de partícula de modo exclusivo. É desse modo que falamos no comportamento dual onda-partícula.

5.8 O princípio da incerteza de Heisenberg

A descrição clássica do estado de uma partícula ou de um sistema de partículas exige que se conheça as posições e as quantidades de movimento de todas as partículas em um

determinado instante de tempo pois, somente assim, com essas condições iniciais, seríamos capazes de integrar as equações do movimento (lei de Newton) para determinar as posições e momentos em outros instantes de tempo. Essa é a essência da mecânica determinística.

Pergunta-se: com que grau de precisão é possível determinar a posição e a quantidade de movimento de uma partícula simultaneamente? Tomemos, por exemplo, um elétron. Para localizar a posição desse elétron é necessário “enxergá-lo”. Por ser uma partícula de massa muito pequena o processo de visualização tem que ser muito delicado de modo causar a menor perturbação possível. Podemos tentar localizar o elétron incidindo radiação colimada sobre o mesmo e observar a radiação espalhada com o auxílio de um microscópio. Para ter a melhor localização possível devemos minimizar os efeitos de difração no microscópio, reduzindo o comprimento de onda ao máximo para reduzir a largura da figura de difração.

Contudo, esse procedimento tem um efeito secundário, a redução do comprimento de onda só pode ser feita com o aumento da frequência ($\lambda = c/\nu$) e o conseqüente aumento da energia do fóton ($E = h\nu$). Um fóton muito energético arranca o elétron de sua posição transferindo para o mesmo uma grande quantidade de movimento.

Assim, vemos que os dois processos são incompatíveis. Para aumentar a precisão na localização perdemos a precisão na quantidade de movimento original. Existe um limite natural nas precisões dessas duas grandezas (e outras também) que é expresso pelo princípio da incerteza de Heisenberg que diz que:

“O produto das incertezas estatísticas da posição e da quantidade de movimento associada é maior ou igual ao valor da constante de Planck dividida por 4π ”

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (5.7)$$

onde

$$\Delta x = \text{desvio padrão da posição}$$

e

$$\Delta p_x = \text{desvio padrão da coordenada } x \text{ da quantidade de movimento.}$$

É importante frisar que esse limite é uma condição natural que não depende do desenvolvimento tecnológico dos instrumentos de medida.

5.9 A função de estado e a equação de Schrödinger

Em um sistema físico de um ou mais corpos, chamamos de estado do sistema ao conjunto de valores de posição e velocidade de cada corpo. Essa é a definição do estado clássico de um sistema. Por exemplo, em um gás confinado em um volume, seu estado é descrito pela posição e pela velocidade de cada molécula do gás em cada instante de tempo. Com o passar do tempo, o estado evolui, significando que os valores das posições e velocidades mudam com o passar do tempo. Um estado pode ser representado classicamente como um ponto no “espaço de fase”. O espaço de fase é um espaço n -dimensional, onde n corresponde à quantidade de posições e velocidades.

De acordo com a mecânica Newtoniana, que é uma mecânica determinística, em princípio é possível descrever a evolução temporal do estado do sistema de modo preciso. Pois, conhecendo-se as posições, velocidades iniciais e as forças que agem no sistema, bastaria integrar as equações diferenciais do movimento ($F = ma$) para cada partícula para encontrar

o novo estado em um tempo posterior. Em outras palavras, é possível prever a configuração futura a partir das condições iniciais.

A experiência mostra que não é possível descrever um estado microscópico (quântico) com as variáveis posição e velocidade que usamos para o mundo macroscópico. Uma nova concepção para o estado foi introduzida por Schrödinger em 1926 quando ele tentava compreender o significado das ondas de De Broglie. Schrödinger devia apresentar um colóquio sobre a teoria de De Broglie, por solicitação de Debye, para que seus colegas tivessem um melhor entendimento da teoria de De Broglie. Já estavam sendo propostos experimentos para verificar a veracidade do comportamento ondulatório (que foi posteriormente verificado em 1927 por Davisson e Germer) mas a teoria ainda era incipiente.

Fazendo uma analogia com a equação de onda do eletromagnetismo clássico, Schrödinger encontrou uma equação para os estados estacionários da energia (energia constante) que tinha a seguinte forma para uma partícula de massa m e energia cinética E_c .

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E_c\psi \quad (5.8)$$

onde $\psi(x, y, z)$ é a função que descreve o estado da partícula e E_c é a energia cinética da partícula livre não relativística.

Pergunta-se: que função satisfaz a essa equação?

Considere um problema unidimensional, ao longo do eixo ox , e suponha que a solução dessa equação seja do tipo exponencial.

$$\psi = Ce^{\alpha x}.$$

Teremos

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \alpha Ce^{\alpha x}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \alpha^2 Ce^{\alpha x} = \alpha^2\psi.$$

Substituindo na equação diferencial (5.8) com

$$\nabla^2() = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = E_c\psi$$

fica

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\psi = E_c\psi.$$

Mas,

$$E_c = \frac{p^2}{2m}$$

$$\therefore -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\psi = \frac{p^2}{2m}\psi$$

$$\therefore \alpha^2 = -\frac{p^2}{\hbar^2}, \quad \text{ou} \quad \alpha = \pm i\frac{p}{\hbar}.$$

A solução será então a combinação linear de duas funções exponenciais

$$\psi = C_1 e^{i\frac{p}{\hbar}x} + C_2 e^{-i\frac{p}{\hbar}x}, \quad C = \text{constante.} \quad (5.9)$$

Observe que na equação diferencial (5.8) escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{p^2}{2m} \psi$$

podemos dizer que o operador diferencial associado ao momento p é dado por

$$p \leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (5.10)$$

uma vez que a aplicação sucessiva p^2 corresponde a

$$p^2 \leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

ou

$$p^2 \leftrightarrow i^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

5.10 A equação de Schrödinger dependente do tempo

Posteriormente, a equação de Schrödinger foi generalizada para as situações em que a energia cinética da partícula não é mais constante (caso não estacionário), situações envolvendo também a energia potencial devido à um campo de forças variável no espaço e no tempo.

Nesse caso, a função de estado evolui no tempo e no espaço de acordo com a equação diferencial (para problemas unidimensionais) seguinte:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (5.11)$$

onde $V(x, t)$ é a energia potencial da partícula.

É muito importante frisar que essa equação diferencial envolve uma segunda derivada em relação ao espaço e uma primeira derivada em relação ao tempo sendo, portanto, diferente da equação diferencial de onda eletromagnética clássica.

Essa equação pode ser “construída” a partir da energia

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x, t)$$

ou

$$E \psi(x, t) = \frac{p^2}{2m} \psi(x, t) + V(x, t) \psi(x, t)$$

fazendo-se a hipótese que p e E podem ser substituídos pelos operadores diferenciais seguintes:

$$p \leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

e

$$E \leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}.$$

Fica então

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \psi(x, t).$$

A função de estado que satisfaz a equação de Schrödinger acima mencionada não representa nenhuma variável física do sistema apesar dela carregar as informações sobre o sistema.

A interpretação de M. Born para essa função é que o módulo da função elevado ao quadrado representa a densidade de probabilidade (probabilidade por unidade de comprimento) da partícula ser localizada em um ponto do espaço. O produto $|\psi(x, t)|^2 dx$ informa a probabilidade da partícula ser encontrada entre x e $x + dx$. Note que $|\psi(x, t)|^2 = \psi^*(x, t)\psi(x, t)$, onde $\psi^*(x, t)$ é o complexo conjugado de $\psi(x, t)$.

Como a partícula deve ser encontrada em algum lugar entre $-\infty$ e $+\infty$, a soma de todas as probabilidades nesse intervalo deve ser igual à unidade, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1. \quad (5.12)$$

Essa condição é também conhecida como condição de normalização.

O valor médio ou valor esperado, $\langle f(x, t) \rangle$ de uma variável física $f(x, t)$, pode ser determinado a partir das probabilidades como

$$\langle f(x, t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 f(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) f(x, t) \psi(x, t) dx.$$