FÍSICA BÁSICA II

Newton B. de Oliveira

EDUFBA
Salvador, 2015

Documento preparado com o sistema LaTeX.

Sumário

Apresentação

Esse texto versa sobre o conteúdo da disciplina Física Básica II e é baseado nas aulas que ministrei ao longo dos anos.

Trata-se de um texto introdutório onde são apresentados e sintetizados alguns conceitos básicos e necessários aos estudantes dos cursos de Física. Os tópicos são apresentados de maneira direta e objetiva enfatizando a conceituação.

O capítulo 1 inicia com os conceitos básicos sobre as oscilações em um oscilador massa-mola com ênfase na conservação da energia mecânica. Discutem-se também outros tipos de osciladores.

Em seguida, no capítulo 2, introduz-se a noção do fenômeno ondulatório com as características gerais de uma onda e descreve-se a função matemática que a representa. Apresentam-se a onda em uma corda, o conceito de onda estacionária e sua aplicação nos instrumentos musicais.

No capítulo 3 é abordado o conceito de fluido e escoamento bem como situações relacionadas à hidrostática e à hidrodinâmica. Apresenta-se um exemplo interessante das forças aerodinâmicas nas asas de um avião.

O capítulo 4 é dedicado à física do calor. Explora-se a noção do equilíbrio térmico, do conceito de temperatura, da termometria, da dilatação dos corpos e da conceituação do calor. Discutem-se as três leis da termodinâmica e as aplicações nas máquinas térmicas.

Todas as críticas e sugestões serão bem vindas e analisadas com a finalidade de corrigir erros e omissões para que as futuras versões possam vir melhoradas.

Salvador, julho de 2015

Newton Barros de Oliveira.

(newton@ufba.br)

Capítulo 1

Oscilações

1.1 Definição

Definimos a oscilação como um fenômeno físico onde ocorrem trocas de duas ou mais formas de energias reversíveis de modo alternado mantendo constante a energia do sistema.

Exemplos:

- Um balanço ou um pêndulo simples sem atrito. Existe troca entre a energia cinética e a energia potencial gravitacional.
- Um oscilador massa-mola linear, horizontal e sem atrito. Existe troca entre a energia cinética e a energia potencial elástica.
- Um oscilador massa-mola linear, vertical, no campo gravitacional e sem atrito. Existe troca entre a energia cinética, a energia potencial elástica e a energia potencial gravitacional.
- Um oscilador composto por um pistão de massa m que comprime um gás e é puxado por uma mola no interior de um cilindro termicamente isolado do exterior. O pistão também é isolante, está sob efeito do campo gravitacional e desliza sem atrito (Fig. 1.1). Energias envolvidas: energia cinética da massa, energia potencial elástica,

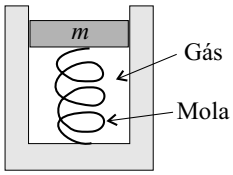

Figura 1.1: Oscilador de compressão de um gás por um pistão de massa m no campo gravitacional e puxado por uma mola em um cilindro termicamente isolado.

energia potencial gravitacional e energia interna do gás.

- Oscilador LC (indutor-capacitor). Nesse oscilador, oscilam as cargas elétricas em um capacitor e em um indutor e oscila a corrente elétrica ($i = dq/dt$). Existe troca entre a energia armazenada no campo elétrico e a energia armazenada no campo de indução magnética.

Nos sistemas mecânicos, para haver oscilação é necessário existir uma *força restauradora*. Partindo de uma condição de equilíbrio estático onde a resultante das forças que agem no sistema seja nula, se o sistema for retirado dessa situação de equilíbrio por um agente externo, deverá aparecer uma força interna com um sentido tal que tenda a levar o sistema de volta à situação de equilíbrio estático. Essa força é dita restauradora.

Todo sistema deve ser descrito por um conjunto de variáveis que permitam descrever o estado em que o sistema físico se encontra. Tal estado está associado a uma ou mais formas de energias. Por exemplo, em um sistema de uma única partícula de massa m em movimento retilíneo e uniforme, basta a variável velocidade ($v = dx/dt$) para descrever o estado de movimento (energia cinética constante). A variável posição (x) não está associada a nenhuma forma de energia nesse caso. De modo semelhante, uma partícula que gira no plano horizontal em uma trajetória circular com velocidade constante pode ter seu estado de movimento descrito pela frequência angular $\omega = d\theta/dt$ uma vez que a energia cinética está associada a essa variável.

Se considerarmos agora uma mola ideal com constante elástica k, seu estado será descrito pela variável *elongação*, deformação ou mesmo a posição de uma de suas extremidades, se a outra for fixa, uma vez que a energia potencial elástica está associada a apenas essa variável. Como a mola é ideal, sem massa ou massa desprezível, não há energia cinética associada e a variável velocidade não descreve o estado de energia do movimento.

1.2 Oscilador massa-mola

Tomemos agora o oscilador massa-mola sem atrito. Duas variáveis são necessárias para descrever o estado de energia do movimento. Uma variável de posição para descrever a energia potencial elástica e uma variável de velocidade para descrever a energia cinética.

A energia potencial elástica de uma mola é a energia que a mola armazena quando comprimida ou esticada além de sua posição natural ou relaxada. Por definição, essa energia corresponde ao trabalho executado por um agente externo para comprimi-la ou para esticá-la.

Consideremos a variável x para medir a posição do extremo da mola, além do seu estado natural relaxado ($x = 0$). Podemos convencionar x positivo quando a mola for esticada e x negativo quando for comprimida, figura (Fig. 1.2).

Para esticar a mola, o agente externo precisa aplicar uma força $\mathbf{F}_{ext} = k\,x\,\widehat{\mathbf{i}}$, onde k é a constante elástica da mola ($k > 0$). A mola exerce sobre o agente externo uma força contrária $\mathbf{F}_{mola} = -k\,x\,\widehat{\mathbf{i}}$.

O trabalho infinitesimal $d\,W$executado pelo agente externo para esticar a mola em um pequeno intervalo $d\mathbf{l}$ é o produto da projeção da força na direção do deslocamento vezes o deslocamento

$$d\,W = \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{l}$$

que neste caso é

$$d\,W = k\,x\,\widehat{\mathbf{i}} \cdot d\mathbf{x}\widehat{\mathbf{i}} = k\,x\,dx. \tag{1.1}$$

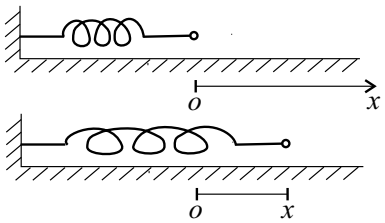

Figura 1.2: Mola relaxada e mola esticada.

Para deslocar o extremo da mola de zero a uma posição $x = x_1$, teremos que somar todos esses trabalhos infinitesimais,

$$W = \int_{x=0}^{x=x_1} k\,x\,dx = k\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{x_1} = k\left(\frac{x_1^2}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}k\,x_1^2.$$

De modo geral, para esticar a mola de 0 a um x qualquer podemos escrever

$$W = \frac{1}{2}k\,x^2, \tag{1.2}$$

ou seja, a energia potencial elástica vale

$$E_P = \frac{1}{2}k\,x^2. \tag{1.3}$$

Observe que essa energia independe do sinal de x, quer dizer, independe se a mola é esticada ou comprimida do mesmo valor $|x|$.

Agora, consideremos que essa mola esteja conectada uma massa m. Se essa massa estiver em movimento sob o efeito da mola, por exemplo, se você esticou a mola presa à massa e soltou o conjunto, ou mesmo, se você deu uma pancada na massa, ou ainda, se a massa vinha em movimento e ligou-se à mola, haverá também energia cinética associada à massa,

$$E_C = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Essa energia também não depende do sinal da velocidade, a massa pode estar indo ou vindo.

Se admitirmos a hipótese de que a energia mecânica (E_T, energia total) se conserva (é constante)

$$E_P + E_C = E_T = cte,$$

que pode ser a própria energia inicial, teremos

$$\frac{1}{2}k\,x^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E_T. \tag{1.4}$$

Observe, de imediato, que se a energia total for zero, a massa estará obrigatoriamente parada e na origem, pois a soma de dois números reais positivos só é zero se ambos forem zero.

Então, para uma energia total não nula, perguntamos: Que tipo de movimento é compatível com essa equação? Como deve ser $x(t)$?

Observe ainda que algumas conclusões podem ser tiradas mesmo se não soubermos $x(t)$.

Veja que, da equação (1.4), temos

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E_T - k\,x^2}{m}}. \tag{1.5}$$

Portanto,

1. A velocidade é nula em

$$x = \pm\sqrt{\frac{2E_T}{k}} \tag{1.6}$$

   e como a velocidade é um número real, pois é uma grandeza física, esses são os valores extremos de x.

2. O máximo valor da velocidade ocorre em $x = 0$, podendo ser positiva ou negativa (indo ou vindo) e vale

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{max} = \pm\sqrt{\frac{2E_T}{m}}.$$

Exercício:

Dê valores para E_T, k, m e faça o gráfico de $v \times x$.

Tentemos agora determinar $x(t)$ compatível com a equação (1.4). Se derivarmos essa equação com relação ao tempo teremos:

$$kx\frac{dx}{dt} + m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

ou

$$kx + m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \therefore m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Em outras palavras, a força resultante é igual à força aplicada pela mola. Ou ainda

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x. \tag{1.7}$$

Estamos perguntando que tipo de função $x(t)$ tem a segunda derivada com relação ao tempo proporcional à própria função com o sinal trocado? Somente a função senoidal ou cossenoidal tem esse tipo de comportamento!

Se t fosse uma variável adimensional, $x = \text{sen}(t)$ (ou $x = \cos(t)$) seria coerente com a troca de sinal mas só satisfaria a equação (1.7) se $k/m = 1$, vejamos;

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\text{sen}\ t$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x,$$

que é a equação (1.7) com $k/m = 1$.

Contudo, t tem dimensão de tempo e só se pode calcular seno de um ângulo que é um número puro, além do fato de k/m nem sempre ser igual à unidade.

Vamos então multiplicar t por uma constante que tenha unidade de ângulo/tempo, chamemos essa constante de ω_0.

Ficaremos com

$$x = \text{sen}(\omega_0\, t), \qquad \therefore \frac{dx}{dt} = \omega_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{e} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 \text{sen}(\omega_0 t) = -\omega_0^2\, x.$$

Se compararmos com a equação (1.7) veremos que ω_0^2 deve ser igual à k/m. Portanto

$$\omega_0 = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{1.8}$$

Na verdade, se adicionarmos uma constante ϕ à $\omega_0 t$, a função $x = \text{sen}(\omega_0 t + \phi)$ continua a satisfazer à equação (1.7) com o mesmo valor de $\omega_0 = \pm\sqrt{k/m}$. Isso permite ajustar o valor de $x(t)$ em $t = 0$, ou seja, deslocar a função $\text{sen}(\omega_0 t)$ para a esquerda ou para a direita (ϕ positivo ou negativo, respectivamente). Por exemplo, se $\phi = \pi/2$, teremos

$$x = \text{sen}(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega_0 t).$$

A figura (Fig. 1.3) mostra a função senoidal deslocada de ϕ.

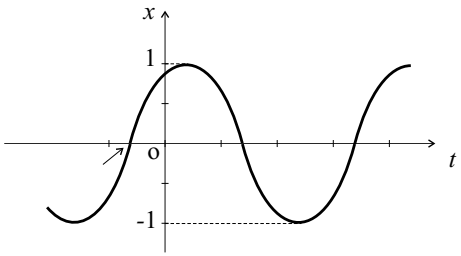

Figura 1.3: Função senoidal deslocada.

Resta ainda um problema, a solução $x = \text{sen}(\omega_0 t + \phi)$ está limitada entre -1 e 1 e a equação (1.6) nos indica que o valor máximo de x é $\sqrt{2E_T/k}$. Acontece que uma constante multiplicativa A tal que $x = A\,\text{sen}(\omega_0 t + \phi)$ ainda faz com que a equação (1.7) seja satisfeita com o mesmo valor de ω_0. Vejamos:

$$\frac{dx}{dt} = A\,\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{e} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -A\,\omega_0^2\,\text{sen}(\omega_0 t + \phi).$$

Mas, pela equação (1.7), fica

$$-A\,\omega_0^2\,\text{sen}(\omega_0 t + \phi) = -\frac{k}{m}\,A\,\text{sen}(\omega_0 t + \phi)$$

$$\therefore \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Como A é o valor máximo que x pode ter, deveremos ter

$$A = \sqrt{\frac{2E_T}{k}},.$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{2E_T}{k}}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{1.9}$$

Perguntamos ainda, qual deve ser o valor de ϕ? O que é que determina seu valor? Observe que ϕ pode ser determinado pela expressão (1.9) se conhecermos o valor de x em algum instante de tempo t, normalmente em $t = 0$ (início do movimento).

$$x(0) = \sqrt{\frac{2E_T}{k}}\,\mathrm{sen}(\phi) \qquad \therefore \phi = \mathrm{arcsen}\left(\sqrt{\frac{k}{2E_T}}\,x(0)\right).$$

Em resumo:

$$x = A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \phi),$$

A = amplitude do movimento, ω = frequência angular em rad/s, $\omega_0\, t + \phi$ = fase em rad, ϕ = fase inicial em rad.

Podemos agora verificar de que forma ocorrem as variações de energia potencial e cinética.

$$E_p = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}k\,A^2\,\mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \phi) \tag{1.10}$$

$$E_c = \frac{1}{2}m\,v^2, \quad v = \frac{dx}{dt} = A\,\omega_0\cos(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\,A^2\,k\cos^2(\omega_0 t + \phi). \tag{1.11}$$

Observe que a energia mecânica total $E_T = E_c + E_p$ vale

$$E_T = \frac{1}{2}\,k\,A^2\,[\cos(\omega_0 t + \phi) + \mathrm{sen}^2(\omega_0 t + \phi)] = \frac{1}{2}\,k\,A^2$$

$$\therefore A = \sqrt{\frac{2E_T}{k}},$$

que coincide com o resultado anterior.

Os gráficos das energias em função do tempo estão mostrados na figura (Fig. 1.4).

1.2.1 Oscilador com atrito

Consideremos agora um oscilador cujo comportamento é mais próximo do que ocorre na realidade. Vamos levar em conta a presença do atrito.

O atrito pode ocorrer nas mais diversas formas, pode ser o atrito entre as superfícies sólidas em contato ou mesmo o atrito entre o objeto oscilante e o ar que o circunda (ou um fluido qualquer).

O atrito entre as superfícies sólidas produz uma força de atrito praticamente constante em módulo ($F_a = \mu\,N$) independente da posição e da velocidade do movimento. Já o

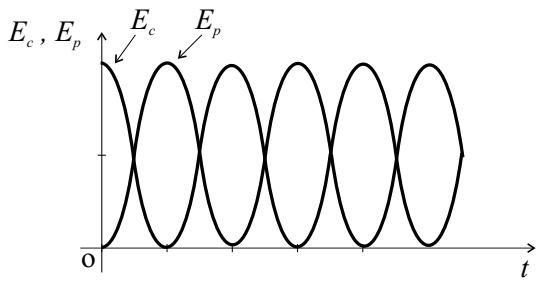

Figura 1.4: Energias cinética e potencial do oscilador massa-mola.

atrito entre um corpo e um fluido produz uma força de atrito que depende da velocidade, tipicamente proporcional à v ou à v^2. Por exemplo, v no caso de uma pequena gota de água no ar e v^2 no caso de um foguete ou avião. Em qualquer caso, a força de atrito é sempre oposta ao sentido do movimento e o atrito produz calor, energia perdida, não reversível. Como consequência, teremos uma redução gradual da energia mecânica se não houver reposição, por um agente externo, dessa energia perdida. Podemos afirmar que a energia mecânica deverá decrescer ao longo do tempo

$$E_c + E_p = E_T(t)$$

de acordo com uma função $E_T(t)$ que dependerá da forma do atrito.

Baseando-se na experiência e na intuição, um oscilador massa-mola ou mesmo um pêndulo deverá oscilar com uma amplitude que decai ao longo do tempo, se as condições do atrito permitirem o sistema oscilar, como é normalmente observado. Contudo, o atrito pode ser tão intenso que o sistema nem chegue a oscilar e ocorra apenas uma relaxação para a condição de equilíbrio estático como às vezes observamos. Não trataremos desse caso.

A forma com que a amplitude decai no tempo só pode ser determinada pela resolução da equação diferencial do movimento. No caso do atrito viscoso proporcional à velocidade $\mathbf{F}_a = -\gamma\,\mathbf{v}$, com um coeficiente de atrito γ pequeno, a amplitude da oscilação decai exponencialmente no tempo produzindo uma oscilação amortecida da forma

$$x = A\,e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\mathrm{sen}^2(\omega' t + \phi), \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}.$$

cujo gráfico pode ser visto na figura (Fig. 1.5).

A frequência angular ω' da oscilação é menor do que a frequência angular do oscilador livre, ou seja, o atrito também faz com que o sistema oscile mais lentamente além de contribuir para o decaimento da amplitude da oscilação. Essa solução é conhecida como solução transitória ou transiente.

Quando a constante de atrito é pequena,

$$\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 << \frac{k}{m}$$

a frequência angular da oscilação é praticamente igual à frequência angular da oscilação livre e o decaimento da amplitude se dá muito lentamente. Esse é o caso dos osciladores

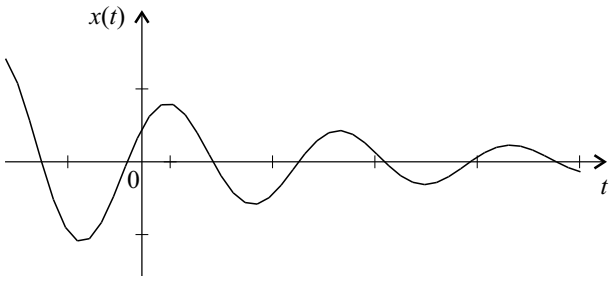

Figura 1.5: Oscilação amortecida do oscilador massa-mola.

utilizados na marcação do tempo (pêndulos, volante de inércia, osciladores de quartzo dos relógios de pulso modernos, etc.).

As energias instantâneas (em função do tempo) dos osciladores amortecidos são funções relativamente complexas para analisar. Contudo, no caso do baixo amortecimento, a energia mecânica média em uma oscilação toma uma forma simples:

$$< E_T >= e^{-\frac{\gamma}{m}\,t}\, E_{inicial}$$

representada no gráfico da figura (Fig. 1.6). A energia média em cada oscilação vai diminuindo com o passar do tempo.

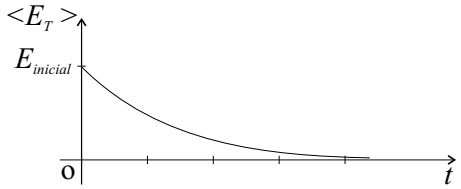

Figura 1.6: Decaimento da energia média do oscilador massa-mola com baixo amortecimento.

A "qualidade" de um oscilador é medida por um número, o coeficiente de qualidade Q que compara a energia média com a energia perdida durante uma oscilação.

$$Q = 2\,\pi\,\frac{\text{energia média}}{\text{energia perdida em uma oscilação}}$$

Um pêndulo de relógio, por exemplo, tem $Q > 15$, um oscilador a quartzo tem $Q > 500$ enquanto que um automóvel novo tem $Q < 1$ (não deve oscilar!).

1.2.2 Oscilador forçado

Vimos que a tendência de um oscilador com atrito é diminuir a amplitude da oscilação com o passar do tempo, com uma frequência angular própria que depende dos valores dos parâmetros k, m, e γ. Consideremos agora que um agente externo aplique uma força periódica de intensidade e frequência conhecidas ao objeto oscilante sob o efeito do atrito.

Para simplificar o raciocínio, vamos considerar uma força externa senoidal

$$F_{ext} = F_0 \,\mathrm{sen}(\omega\, t),$$

com F_0 e ω conhecidos, que será aplicada ao oscilador a partir de um certo tempo, digamos, a partir de $t = 0$. Nesse momento é possível que o oscilador já se encontre em movimento ou mesmo que esteja em repouso.

Caso o oscilador já esteja em movimento, com sua frequência própria, a aplicação da força externa pode atrapalhar, inicialmente, a oscilação devido ao fato de sua frequência e fase não coincidirem com a frequência natural da oscilação. Durante um certo intervalo de tempo o movimento será um tanto complicado até que o sistema venha a oscilar com a frequência da força externa.

Caso o oscilador esteja em repouso no instante que a força externa começa a atuar, o sistema começa a oscilar com uma frequência não muito bem definida, pois esse tende a oscilar com sua frequência natural enquanto que a força externa tem uma frequência diferente. Novamente, um certo intervalo de tempo ocorrerá até que o sistema oscile com a frequência da força externa.

Em qualquer caso, o deslocamento da massa oscilante pode ser obtido como a superposição de dois deslocamentos. Um devido à oscilação própria amortecida (na ausência de força externa) e outro deslocamento forçado imposto pela força externa.

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t).$$

O primeiro, $x_1(t)$ já foi determinado anteriormente,

$$x_1(t) = A\, e^{-\frac{\gamma}{2m}\, t} \,\mathrm{sen}(\omega' t + \phi), \quad \omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2}.$$

o segundo, $x_2(t)$, normalmente é do mesmo tipo da excitação externa,

$$x_2(t) = x_0 \,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha)$$

com amplitude x_0 e possivelmente defasado por α. Tanto a amplitude como a fase inicial devem depender da frequência da força externa pois o sistema quer oscilar com sua frequência própria e a força externa pode estar atrapalhando a oscilação natural.

Com o passar do tempo, a primeira parte da solução, $x_1(t)$, tende a desaparecer (solução transitória) e a segunda, $x_2(t)$, permanece (solução permanente) de forma que, para tempos longos $t >> T' = 2\pi/\omega'$, podemos considerar que

$$x(t) = x_0 \,\mathrm{sen}(\omega t + \alpha).$$

Quando a frequência da força externa é muito diferente da frequência própria, esperamos obter uma amplitude de oscilação pequena uma vez que a força externa atrapalha a oscilação natural. Quando a frequência da força externa é próxima da frequência própria, a força externa ajuda o sistema a oscilar e a amplitude da oscilação é grande. Esse fenômeno é denominado "ressonância".

A máxima potência média transferida para o oscilador (e dissipada pelo atrito) ocorre quando a frequência da força externa é igual à frequência natural. Em termos da frequência angular

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Em geral, a máxima amplitude da oscilação ocorre quando ω é próximo de ω_0, mas, no caso de pouco atrito, ocorre quando $\omega = \omega_0$.

Na prática, a ressonância mecânica pode ser um fenômeno perigoso pois pode destruir um sistema mecânico (máquina, por exemplo) rapidamente. Veja o caso da ponte de Tacoma. Em helicópteros, determinadas frequências de rotação do motor devem ser evitadas para não excitar oscilações ressonantes da estrutura. Você já deve ter presenciado a ressonância induzida por vibrações de baixa frequência de um motor em um ônibus urbano quando o motor está em muito baixa rotação, a estrutura do ônibus vibra bastante. Felizmente, essa vibração é de baixa frequência e desaparece assim que o motor é acelerado.

Aplicações dos osciladores:

1. Marcação do tempo (baixo amortecimento), pêndulo simples, volante com mola espiral, oscilador a quartzo, etc.

2. Geração de ondas de rádio, televisão e sintonia das estações.

3. Oscilação mecânica para solda de plásticos por produção de calor localizado (ultrasom e radio frequências) e limpeza de peças.

4. Automóvel como um oscilador com alto amortecimento.

Vejamos outras situações envolvendo osciladores.

1.3 Pêndulo simples em pequenas oscilações

O pêndulo simples (massa concentrada no extremo de um fio flexível e inextensível) é um exemplo de um oscilador não harmônico quando oscila em grandes oscilações mas que pode ser aproximado por um oscilador harmônico simples para pequenas oscilações.

A força restauradora em um pêndulo simples é tangencial ao círculo descrito pela massa em oscilação e aponta no sentido oposto ao crescimento do ângulo θ como mostra a figura (Fig. 1.7).

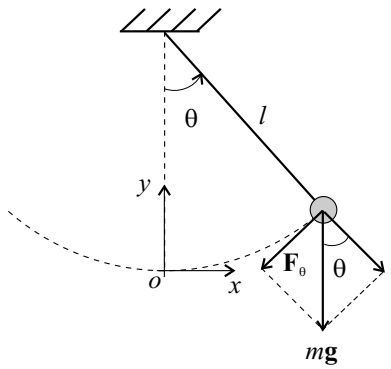

Figura 1.7: Pêndulo simples em oscilação.

$$F_\theta = -m\,g\,\mathrm{sen}(\theta)$$

Se a oscilação for pequena ($\theta << 1$ rad) a força estará praticamente na horizontal, paralela ao eixo ox e podemos aproximar $F_\theta \approx F_x$. Além disso, nessa mesma condição,

$$\text{sen}(\theta) = \frac{x}{l}.$$

Teremos então

$$F_x = -m\,g\,\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x$$

e comparando com o oscilador massa-mola onde $F_x = -k\,x$ vemos que k é equivalente a mg/l. Sendo assim, a frequência angular da oscilação ω_0 será

$$w_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

e

$$x = \sqrt{\frac{2E_T\,l}{m\,g}}\text{sen}(\omega_0 t + \phi), \qquad \phi = \text{arcsen}\left[\sqrt{\frac{m\,g}{2E_T\,l}}\,x(0)\right]. \tag{1.12}$$

Exemplo:

Um pêndulo com massa $m = 100$ g e comprimento $l = 1$ m é largado de uma posição $x = 5$ cm, veja a figura (Fig.1.8). Escreva a equação da posição $x(t)$ baseando-se em considerações das energias potencial e cinética.

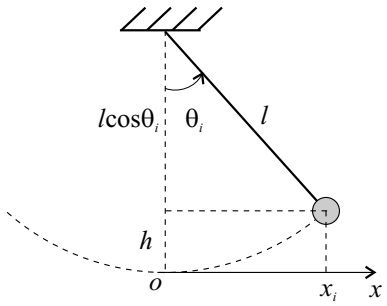

Figura 1.8: Posição inicial de um pêndulo simples em oscilação.

Como o pêndulo é largado em sua posição inicial, a energia total é a própria energia potencial gravitacional inicial. Com os dados do pêndulo podemos calcular o ângulo inicial θ_i:

$$\text{sen}\,\theta_i = \frac{x_i}{l} = \frac{0,05}{1} = 0,05 \qquad \therefore \theta_i = \text{arcsen}\,0,05 \approx 0,05 \text{ rad} << 1 \text{ rad}.$$

A energia total será

$$E_T = m\,g\,h, \qquad h = l - l\,\cos\theta_i = l(1 - \cos\theta_i).$$

Mas para ângulos pequenos podemos escrever

$$\cos\theta \approx= 1 - \frac{1}{2}\theta^2.$$

Portanto

$$E_T = m\,g\,l\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\theta_i^2\right)\right], \qquad \theta_i \approx \frac{x_i}{l}$$

ou

$$E_T = m\,g\,l\,\frac{1}{2}\left(\frac{x_i}{l}\right)^2 = \frac{m\,g}{l}\frac{1}{2}\,x_i^2.$$

Comparando com a energia potencial do oscilador massa-mola vemos novamente que

$$k = \frac{m\,g}{l}\frac{1}{2}.$$

De acordo com a equação (1.12) a posição será descrita por

$$x = \sqrt{\frac{2\frac{m\,g}{l}\frac{1}{2}\,x_i^2\,l}{m\,g}}\,\mathrm{sen}(\omega_0 t+\phi), \qquad \phi = \mathrm{arcsen}\left[\sqrt{\frac{m\,g}{2\frac{m\,g}{l}\frac{1}{2}\,x_i^2\,l}}\;x_i\right] = \mathrm{arcsen}(1)$$

ou

$$x = x_i\,\mathrm{sen}(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}) = x_i\,\cos(\omega_0 t) = 0,05\,\cos(\sqrt{10}t) = 0,05\,\cos(3,16t)\ \mathrm{m}.$$

1.4 Pêndulo físico

Nesse tipo de pêndulo a massa não está concentrada na extremidade e sim distribuída ao longo do pêndulo. Por exemplo, uma régua de madeira pendurada por um furo próximo de uma extremidade e posta para oscilar. Como a massa está distribuída ao longo do corpo, não podemos atribuir uma força gravitacional agindo no extremo do pêndulo pois essa força age em cada pequeno elemento de massa do corpo. Contudo, é possível encontrar um ponto médio e considerar que a força gravitacional está unicamente aplicada nesse ponto como se toda a massa estivesse ali concentrada. Esse ponto é chamado de *centro de gravidade*. A figura (Fig. 1.9) representa essa situação e a distância l é a distância do centro de rotação ao centro de gravidade (C.G.).

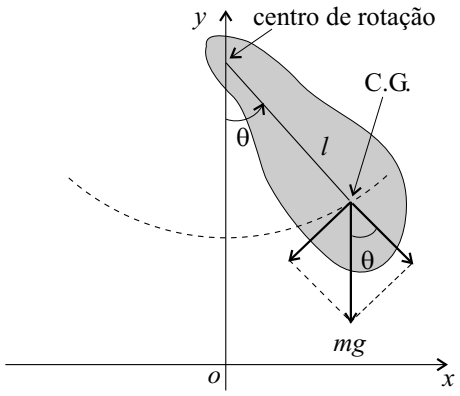

Figura 1.9: Pêndulo físico em oscilação.

A força restauradora vale

$$F_\theta = -m\,g\,\mathrm{sen}(\theta)$$

e essa força produz um torque restaurador

$$\tau = -m\,g\,\mathrm{sen}(\theta)\,l$$

que não é linear em θ. Portanto, a oscilação não é harmônica simples. Contudo, para pequenas oscilações, $\mathrm{sen}(\theta) \approx \theta$ e o torque será

$$\tau = -m\,g\,l\,\theta.$$

Como a massa do corpo está distribuída, cada pedaço do corpo estará executando uma oscilação e descrevendo um arco de círculo. Cada pedaço do corpo se comporta como um pêndulo simples sujeito à condição de que todos os pedaços são obrigados a oscilar com a mesma frequência angular, pois o corpo é rígido.

Pode-se mostrar que para um corpo rígido sujeito a um torque resultante τ vale a expressão

$$\tau = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

onde I é o momento de inércia com relação ao centro de rotação.

Sendo assim, teremos para o pêndulo físico em pequenas oscilações

$$-m\,g\,l\,\theta = I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \therefore\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{m\,g\,l}{I}\,\theta.$$

Comparando com com a equação do movimento do oscilador massa mola

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2\,x,$$

vemos que a frequência angular de oscilação para o pêndulo físico será

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,l}{I}}.$$

1.5 Osciladores acoplados

É possível ter um sistema oscilante composto por várias massas interligadas por molas, não necessariamente iguais, como na figura (Fig. 1.10).

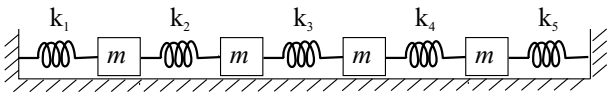

Figura 1.10: Osciladores massa-mola acoplados.

Ou mesmo um conjunto de pêndulos com comprimentos diferentes e interligados como na figura (Fig. 1.11).

Esses sistemas são chamados de osciladores acoplados e existem muitas formas possíveis de oscilação (modos de vibração) com diferentes frequências e a energia é constantemente redistribuída entre os diversos elementos oscilantes na maioria dos casos. Um exemplo simples (Fig. 1.12) com duas massas e três molas idênticas ilustra alguns desses modos de vibração.

Modos de vibração:

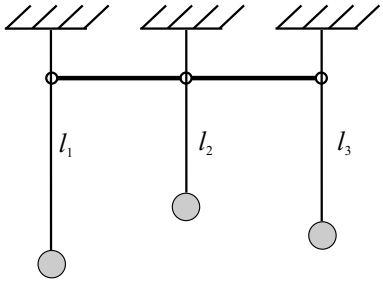

Figura 1.11: Pêndulos acoplados.

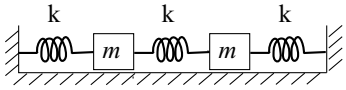

Figura 1.12: Dois osciladores massa-mola acoplados.

1. As duas massas oscilam em fase com a mesma amplitude mantendo a mola central relaxada. Para cada massa a frequência angular de oscilação é $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

2. As duas massas oscilam em oposição de fase, com a mesma amplitude, esticando e comprimindo a mola central e mantendo o centro desta mola em repouso. Para cada massa $\omega_0 = \sqrt{3k/m}$.

3. Caso geral: As duas massas oscilam com amplitude variável no tempo e a energia é constantemente redistribuída entre as massas.

Capítulo 2

Ondas

2.1 Definição

Perturbação de uma propriedade de um meio material ou não (vácuo) que propaga de um ponto a outro do espaço durante um certo intervalo de tempo.

Exemplos

- Onda na corda, na mola ou no mar. A propriedade é o deslocamento de um ponto material do meio.
- Onda sonora ou som. A propriedade é o deslocamento de uma partícula do meio ou então uma variação da pressão no caso do meio ser um gás.
- Onda de calor. A propriedade pode ser a temperatura do meio ou mesmo uma perturbação na energia interna.
- Onda eletromagnética no vácuo. As propriedades são os vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ do campo elétrico e do campo de indução magnética. Os dois vetores são acoplados.

Os três primeiros exemplos referem-se a ondas que necessitam de um meio material para a propagação. São chamadas de ondas mecânicas. O último exemplo (onda eletromagnética) não precisa de meio material para propagar, propaga no vácuo e por isso não é uma onda mecânica.

Em uma onda mecânica não existe transporte de matéria de um ponto a outro do espaço. Existe apenas uma oscilação da matéria.

As ondas podem ser do tipo transversal, longitudinal ou mista. Na onda transversal, o deslocamento ou variação da propriedade ocorre em direção perpendicular (transversa) quando comparada com a direção de propagação da perturbação. Por exemplo, onda na corda e onda eletromagnética no vácuo. Na onda longitudinal, o deslocamento do ponto do meio material ou variação da propriedade, ocorre em uma direção paralela à direção de propagação da perturbação. Por exemplo, onda acústica (som) em um gás ou em um sólido elástico e onda de compressão em uma mola. Na onda mista os modos transversal e longitudinal ocorrem simultaneamente e uma partícula do meio descreve, em geral, um

movimento elíptico enquanto a perturbação propaga. Um exemplo clássico é o de uma onda sísmica que propaga na interface (superfície) solo-ar.

Em alguns meios é possível propagar ondas dos tipos descritos de modo simultâneo, por exemplo, as ondas sísmicas na terra podem ocorrer nas três formas citadas.

Normalmente, as diversas formas de ondas propagam com velocidades distintas no mesmo meio, sendo a onda longitudinal a mais veloz. Nas ondas mecânicas, a velocidade de propagação depende das propriedades do meio como, densidade, propriedades elásticas, tração, etc. e muitas dessas propriedades variam com a temperatura. No caso da onda eletromagnética no vácuo, não existem propriedades materiais, porém existem propriedades associadas aos campos elétrico e magnético que são intrínsecas do vácuo e que estabelecem a velocidade de propagação. Essa propriedades são a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética respectivamente.

Em uma onda eletromagnética em um meio, no ar, num plástico, num vidro ou mesmo na água, essas propriedades elétricas e magnéticas estão associadas ao meio em questão, contudo, não se conhece nenhum meio material que propague uma onda eletromagnética com velocidade superior á velocidade de propagação no vácuo.

As ondas podem ser ou não ser periódicas no tempo e no espaço. Dizemos que uma onda é periódica quando a perturbação se reproduz em intervalos constantes (período) tanto no tempo quanto no espaço. A onda é não periódica ou solitária em caso contrário.

O conceito de propagação ondulatória envolve a dimensão espacial e temporal. A onda deve ser visualizada nessas duas dimensões. A representação matemática de uma onda envolve uma função de, pelo menos, duas variáveis, uma espacial e uma temporal. A variável espacial pode ser escrita em qualquer sistema de coordenadas: cartesiano, cilíndrico, esférico etc. e, no espaço tridimensional, utilizamos três coordenadas para localizar um ponto. Por simplicidade consideraremos apenas uma onda unidimensional na variável espacial, por exemplo, uma onda que propague na direção do eixo ox com o passar do tempo. Essa onda será descrita por uma função $f(x, t)$.

É possível "congelar" uma das variáveis deixando a outra livre para variar. Por exemplo, quando tiramos uma fotografia de uma onda que propaga no sentido crescente do eixo ox, estamos congelando a variável tempo, pois a fotografia representa a onda naquele determinado instante de tempo, $t = cte$ (constante). Portanto, a onda nessa foto será descrita pela função $f(x, cte)$ cuja variação dependerá apenas da variável espacial x. Uma outra fotografia tirada em um tempo posterior mostrará essa perturbação deslocada para a direita como representado na figura (Fig. 2.1).

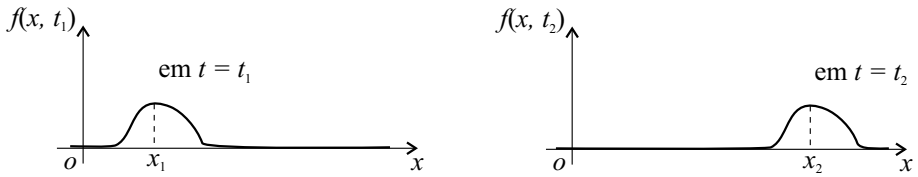

Figura 2.1: Um pulso em uma corda em dois instantes de tempo.

Suponha que a onda propague com velocidade constante v e que mantenha sua forma durante a propagação. Para que a forma da onda seja a mesma para todos os valores de x em $t = t_2$ é necessário que as variáveis x e t estejam relacionadas entre si. Um determinado ponto da onda, digamos seu pico, percorreu uma distância $x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$ e o argumento

da função $f(x, t)$ deve ter permanecido o mesmo para que a função tenha o mesmo valor, ou seja, $f(x_2, t_2) = f(x_1, t_1) = f(cte.)$. Como x e t cresceram durante a propagação, a forma de fazer com que o argumento fique constante para que observemos o mesmo valor da perturbação é impor que o argumento da função seja $x - v\,t$. Dessa forma a onda será descrita por $f(x - v\,t)$.

Normalmente é necessário utilizar uma constante multiplicativa para adequar o argumento da função ao tipo de de função. Por exemplo, em uma onda senoidal $f(x - v\,t) = \text{sen}[k(x - v\,t)]$ onde k deve ter unidade de ângulo por comprimento sendo x expresso em unidades de comprimento.

A forma de uma onda depende de como ela foi gerada. Se tomarmos o extremo de uma corda esticada, podemos sacudir a corda transversalmente de uma forma adequada e produzir um pulso com uma forma desejada (degrau, triangular, quadrado, gaussiano, etc.). É possível que durante a propagação de uma onda ela mude de forma. Existem meios capazes de atenuar a onda mantendo sua forma ou até mesmo alterar completamente sua forma (meios dispersivos). Por exemplo, um pulso pode ter sido gerado com forma retangular e progressivamente se transformar em um pulso gaussiano (Fig. 2.2).

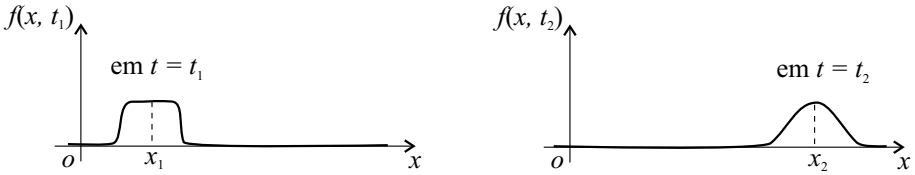

Figura 2.2: Um pulso em uma corda em dois instantes de tempo.

É possível também, em determinados meios,que a velocidade de propagação seja alterada durante a propagação. Por exemplo, uma corda pesada pendurada no teto e sob efeito do campo gravitacional propaga pulsos com velocidade crescente a medida que se aproxima do extremo preso ao teto.

Nos restringiremos às ondas que propagam com velocidade constante e que mantenham sua forma durante a propagação. Isso ocorre nos meios ditos lineares, homogêneos e isotrópicos.

Para melhor compreendermos como se dá a propagação de uma perturbação, tomemos um exemplo simples de uma cadeia finita de N massas iguais interligadas por $N - 1$ molas iguais e ideais (Fig. 2.3).

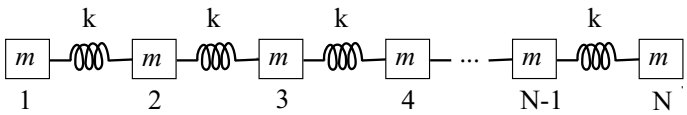

Figura 2.3: Uma cadeia de N massas iguais e $N - 1$ molas ideais idênticas.

Se a massa 1 for subitamente deslocada de sua posição inicial por um agente externo, um pequeno deslocamento para a direita, a primeira mola será momentaneamente comprimida devido à inércia da massa 2 que se encontra em repouso, acumulando energia potencial elástica na mola que será posteriormente transferida para a massa 2 na forma de energia cinética pois essa massa será empurrada para a direita adquirindo velocidade. Essa mesma

massa, por sua vez, comprimirá a segunda mola e assim por diante até que a energia inicial da massa 1 seja transferida à massa N.

Esse processo de transferência de energia não é instantâneo devido às características das molas acopladas às massas (depende dos valores de k e m) e uma velocidade de propagação para a perturbação é estabelecida. Como regra geral, a velocidade de propagação é definida pelas propriedades do meio. Por exemplo, em uma corda que possua uma densidade linear de massa μ (massa / comprimento) e que esteja tracionada com uma tração T, a velocidade de propagação vale

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

É importante distinguir a velocidade com que uma partícula do meio se movimenta da velocidade com que a perturbação propaga. A primeira é variável (oscilatória) enquanto a segunda é constante (para meios uniformes). Além disso, em uma onda transversal as duas velocidades são perpendiculares entre si. A velocidade com que a partícula se movimenta depende do agente externo que produziu a perturbação enquanto que a velocidade de propagação depende das propriedades do meio.

2.2 Superposição ou interferência de ondas

As ondas que propagam em meios simples, uniformes, como uma corda, uma mola ou o ar apresentam uma característica interessante, vale a superposição das perturbações. Considere, por exemplo, dois pulsos transversais com amplitudes A_1 e A_2 propagando em sentidos opostos em uma corda longa (Fig. 2.4).

Figura 2.4: Dois pulsos transversais propagando em sentidos opostos.

Quando os dois pulsos se aproximam, para cada valor de x e t que seja comum às duas funções, obtemos um deslocamento transversal $y = y_1 + y_2 = f_1(x - v\,t) + f_2(x + v\,t)$. Quando os pulsos "passam" um pelo outro, haverá um momento em uma certa posição em que a amplitude do pulso resultante vale $A_1 + A_2$. Após a superposição os pulsos continuam a propagar como se nada tivesse ocorrido (Fig. 2.5).

A superposição dos pulsos é um fato experimental e corresponde à superposição das soluções da equação diferencial linear que rege a propagação das ondas em um meio uniforme.

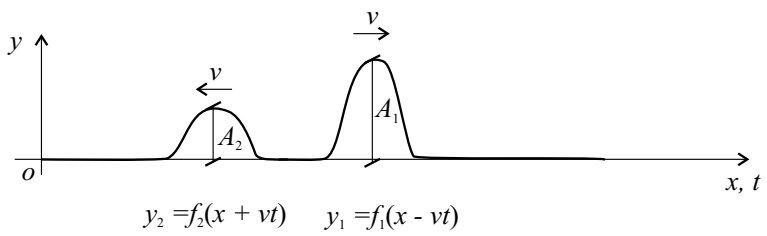

Figura 2.5: Dois pulsos transversais após a superposição continuando a propagar em sentidos opostos.

2.3 Reflexão das ondas

Existe a situação física em que uma onda propagando em um meio eventualmente alcance o extremo do meio ou mesmo um ponto de descontinuidade ou de mudança de propriedade do meio. Nesses pontos aparecem reflexões da onda incidente. Como exemplo da primeira situação consideremos uma corda na qual um dos extremos pode estar preso a uma parede (extremo fixo) ou a uma argola deslizante na direção transversal (extremo livre). Tomemos um pulso transversal propagando em direção ao extremo (Fig. 2.6).

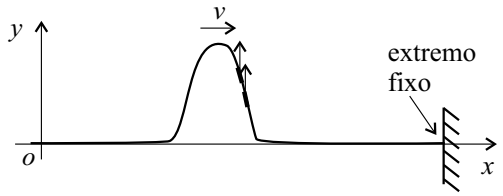

Figura 2.6: Pulso transversal propagando em direção ao extremo fixo de uma corda em um determinado instante de tempo.

Na parte frontal do pulso, cada elemento da corda em seu deslocamento transversal para cima puxa para cima o elemento posterior que, por sua vez, puxa para cima o próximo elemento e assim por diante. Ao chegar no extremo fixo, o elemento subsequente não pode ser deslocado uma vez que está fixo na parede. O último elemento puxa a parede imóvel para cima e essa parede reage sobre o último elemento puxando-o para baixo. Isso produz um pulso invertido que propaga em sentido contrário ao pulso incidente (Fig. 2.7). Diz-se que a reflexão ocorreu com inversão nesse caso.

Outro modo de descrever o ponto fixo é imaginar que a parede é "transparente" e que na posição simétrica exista, em uma corda imaginária, um pulso invertido propagando para a esquerda (Fig. 2.8).

A superposição dos pulsos na posição da parede produzirá um ponto fixo (sem movimento transversal) e, após a superposição, o pulso normal (para cima) prossegue para a direita na corda imaginária enquanto que o pulso invertido prossegue para a esquerda na corda real.

Esse mesmo tipo de reflexão também ocorre na transição de uma corda pouco densa (μ) para uma corda muito densa (μ') que tenham sido emendadas, quando um pulso propaga na primeira corda em direção à segunda corda. A corda mais densa se comporta como uma

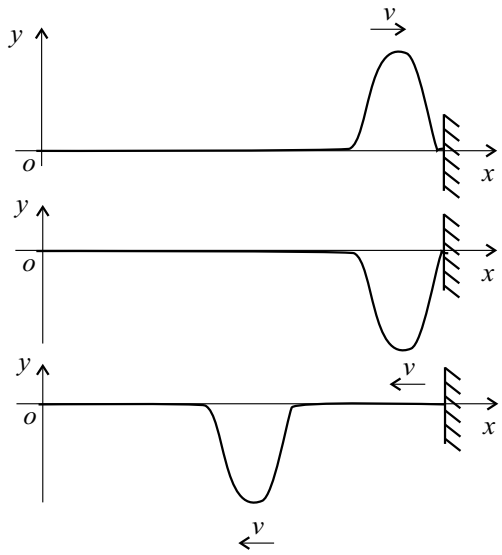

Figura 2.7: Pulso transversal refletindo no extremo fixo de uma corda. Reflexão com inversão.

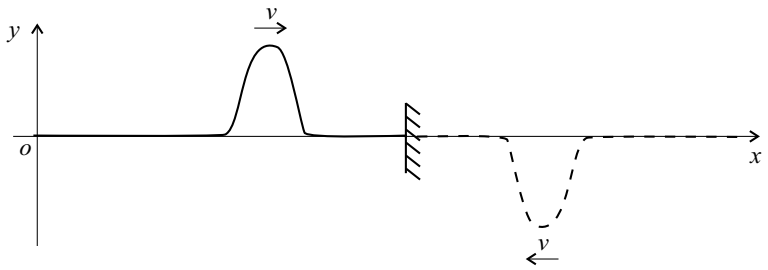

Figura 2.8: Pulso virtual invertido propagando para a esquerda a medida que o pulso real propaga para a direita.

parede para o pulso que provém da corda menos densa. Como essa "parede" não é fixa, parte do pulso prossegue adiante com menor amplitude e outra parte reflete invertida (Fig. 2.9).

As razões entre as amplitudes dos pulsos refletido e incidente A_r/A_i e entre as amplitudes dos pulsos transmitido e incidente A_t/A_i depende apenas das densidades lineares μ e μ'. Se a densidade da segunda corda for igual à densidade da primeira corda, não haverá onda refletida, só haverá onda transmitida. Se a densidade da segunda corda for muito maior que a densidade da primeira corda, só haverá onda refletida.

Consideremos agora a situação em que o extremo da corda é livre para realizar movimentos transversais (Fig. 2.10).

Quando o pulso chega ao extremo, não há mais nenhum elemento da corda para ser puxado pelo elemento anterior, ele está livre para se deslocar transversalmente. Esse movimento transversal produz um pulso para cima, com a mesma amplitude do pulso incidente

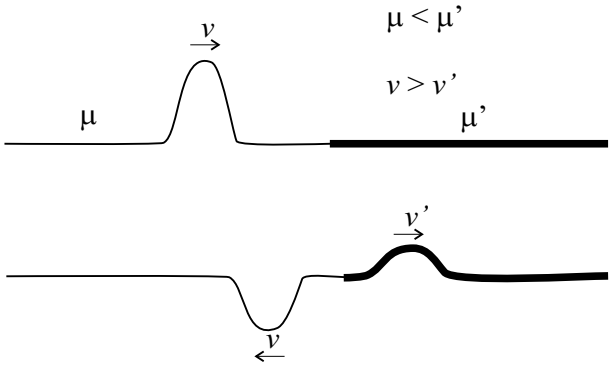

Figura 2.9: Transmissão e reflexão de um pulso em uma corda pouco densa que aproxima-se da emenda com uma corda muito densa.

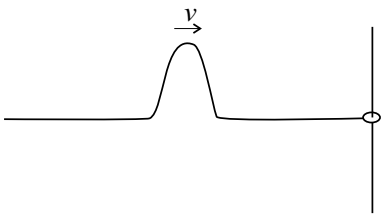

Figura 2.10: Pulso em uma corda com extremo livre.

e propagando em sentido oposto, ou seja, uma reflexão sem inversão (Fig. 2.11).

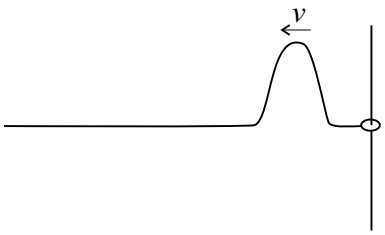

Figura 2.11: Reflexão de um pulso em uma corda com extremo livre.

Outra maneira de descrever essa reflexão normal é considerar uma corda imaginária, depois da argola, com um pulso normal propagando no sentido oposto numa posição simétrica com relação à argola (Fig. 2.12). Ao se cruzarem na argola, a mesma se deslocará transversalmente atingindo o dobro da amplitude individual. O pulso da direita passará para o lado esquerdo e o pulso da esquerda passará para o lado direito simulando o processo de reflexão.

Esse mesmo tipo de reflexão ocorre na propagação de um pulso em uma corda muito densa na transição para uma corda pouco densa. A corda pouco densa se comporta como um extremo livre para um pulso que venha da corda muito densa (Fig. 2.13).

Ao chegar à região de transição, parte do pulso incidente será transmitido para a segunda

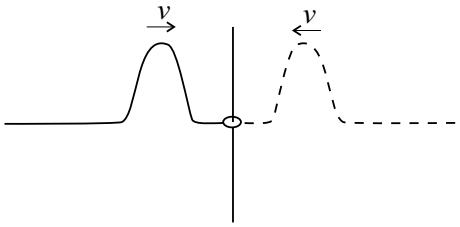

Figura 2.12: Reflexão de um pulso em uma corda com extremo livre simulada por um pulso virtual propagando em sentido oposto em uma corda imaginária emendada no extremo livre.

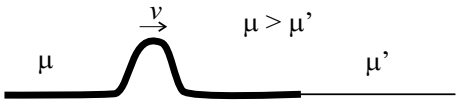

Figura 2.13: Pulso propagando em uma corda muito densa aproximando-se da emenda com uma corda pouco densa.

corda na forma de um pulso normal com uma amplitude maior que a do pulso incidente. Outra parte do pulso incidente é refletida de volta para a primeira corda com sentido normal e amplitude um pouco reduzida (Fig. 2.14).

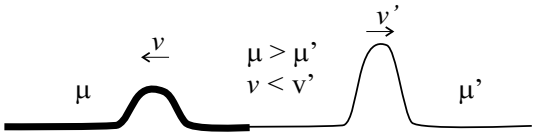

Figura 2.14: Reflexão na transição de uma corda muito densa para uma corda pouco densa.

Novamente, a razão entre as amplitudes depende apenas das densidades. Se a densidade da segunda corda for desprezível, o pulso reflete praticamente com a mesma amplitude do pulso incidente.

2.4 Transmissão de energia por uma onda

Um pulso produzido em um meio é capaz de transportar energia do ponto onde foi produzido ao ponto onde ele chega.

Para produzir um pulso é necessário armazenar uma certa quantidade de energia no meio. Ao sacudir o extremo de uma corda, uma certa quantidade de energia cinética é acumulada nos diversos elementos da corda que se deslocam transversalmente e essa energia é passada de elemento para elemento durante a propagação do pulso. Se essa corda estiver presa a algum objeto no seu final, essa energia será transferida a esse objeto uma vez que o mesmo entrará em movimento e algum trabalho poderá ser realizado por esse objeto.

A energia transportada por um pulso está distribuída continuamente no pulso, no seu intervalo de duração espaço-temporal.

Em um pulso com duração finita (que ocupa uma região finita no espaço-tempo) pode-se até falar na energia do pulso uma vez que toda essa energia encontra-se confinada nessa região. Contudo, em um pulso periódico (que não tem início nem fim) teremos energia distribuída em todo o espaço-tempo. Prefere-se então falar em energia por unidade de tempo por unidade de área que atravessa uma determinada área perpendicular à direção de propagação da onda, ou seja, a *intensidade da onda*.

$$I = \frac{\text{energia}}{\text{área . tempo}}.$$

Muitas vezes a frequência de uma onda é muito elevada, como nas ondas sonoras audíveis e na onda eletromagnética (principalmente) e a energia que atravessa uma determinada área oscila com alta frequência fazendo com que a intensidade instantânea não tenha muita utilidade (pense, por exemplo, nos efeitos de aquecimento). Prefere-se então utilizar a intensidade média em um período temporal de oscilação. Por exemplo, quando uma onda eletromagnética incide em uma superfície absorvedora, aquecendo-a, o calor transferido é proporcional à intensidade média da onda. Devido à inércia térmica não percebemos a temperatura oscilar com o mesmo valor da frequência da onda (2,45 Ghz, por exemplo, em um forno de micro-ondas). De fato, a temperatura não oscila, o que percebemos é um efeito médio que corresponde a um aumento contínuo e suave da temperatura.

Pode-se mostrar que a intensidade média de uma onda é proporcional ao quadrado da amplitude da grandeza oscilante. Por exemplo, em uma onda senoidal que propague em uma corda com um deslocamento transversal dado por

$$h(x,\, t) = A\,\mathrm{sen}[k(x - v\,t)],$$

a intensidade I da onda é proporcional à $A^2\,\mathrm{sen}^2[k(x - v\,t)]$ sendo x constante. A intensidade média é proporcional à $A^2/2$ uma vez que o valor médio do seno ao quadrado vale $1/2$.

2.5 Período espacial e período temporal

Consideremos uma onda senoidal $f(x,\, t) = A\,\mathrm{sen}[k(x - v\,t)]$, onde v é a velocidade de propagação da onda como já foi discutido anteriormente.

Se tomarmos uma fotografia da onda, isto é, se fizermos $t = cte$, teremos uma função senoidal dependente apenas da posição, $f(x,\, cte) = A\,\mathrm{sen}(kx - cte)$, (Fig. 2.15).

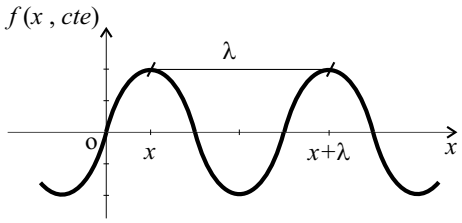

Figura 2.15: Fotografia de uma onda. A função depende apenas da variável espacial.

Definimos o período espacial λ como a distância entre dois picos sucessivos (ou entre dois pontos equivalentes), ou seja, o intervalo ao longo do eixo ox em que a função repete

seu valor. Em outras palavras,

$$f(x+\lambda,\, cte) = f(x,\, cte),$$

ou

$$A\,\mathrm{sen}[k(x+\lambda) - cte)] = A\,\mathrm{sen}(k\,x - cte).$$

Mas o seno repete seu valor quando seu argumento varia de $2\,\pi$ rad, ou seja,

$$k\,(x+\lambda) - cte = k\,x - cte + 2\,\pi, \qquad \therefore k\,\lambda = 2\,\pi$$

$$\therefore k = \frac{2\,\pi}{\lambda}. \tag{2.1}$$

A constante k é chamada de *número de ondas* e sua unidade é rad/m.

Na expressão $f(x,\, t) = A\,\mathrm{sen}[k(x - v\,t)] = A\,\mathrm{sen}(k\,x - k\,v\,t)$, observamos que $k\,v$ tem dimensão de inverso de tempo e é medido em radianos por segundo ($rad/m.m/s = rad/s$) que é a mesma unidade da frequência angular ω. Chamemos então $k\,v = \omega$ de modo que

$$f(x,\, t) = A\,\mathrm{sen}(k\,x - \omega\,t). \tag{2.2}$$

Se tomarmos agora, nessa função, um ponto fixo no espaço, $x = cte$, teremos uma função só do tempo $f(cte,\, t) = A\,\mathrm{sen}(cte - \omega\,t)$ (Fig. 2.16).

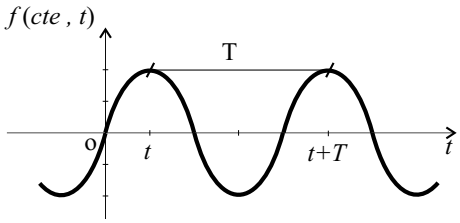

Figura 2.16: Oscilação de uma onda em um ponto fixo do espaço. A função depende apenas da variável temporal.

Definimos então o período temporal T como o intervalo de tempo entre dois picos sucessivos ou dois pontos equivalentes, ou seja,

$$f(cte,\, t+T) = f(cte,\, t),$$

ou

$$A\,\mathrm{sen}[cte - \omega(t+T)] = A\,\mathrm{sen}(cte - \omega t).$$

Mas o seno deve ter decrescido de $2\,\pi$ rad ao passar de t para $t+T$ ou seja

$$cte - \omega(t+T) = cte - \omega\,t - 2\,\pi, \qquad \therefore \omega\,T = 2\,\pi$$

$$\therefore \omega = \frac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\,f \tag{2.3}$$

onde f é frequência medida em oscilações por segundo ou Hz.

Podemos então escrever a equação da onda em função dos dois períodos

$$f(x,\, t) = A\,\mathrm{sen}\left[2\,\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]. \tag{2.4}$$

2.6 Ondas estacionárias

Consideremos a superposição de duas ondas senoidais propagando em sentidos opostos no mesmo meio, numa corda infinita por exemplo.

$$y_1 = f_1(x,\, t) = A\,\mathrm{sen}\,(k\,x - \omega\,t)\,, \qquad y_2 = f_2(x,\, t) = A\,\mathrm{sen}\,(k\,x + \omega\,t)\,.$$

A superposição será

$$y = y_1 + y_2 = f_1(x,\, t) + f_2(x,\, t) = A\,\left[\mathrm{sen}\,(k\,x - \omega\,t) + \mathrm{sen}\,(k\,x + \omega\,t)\right].$$

Mas

$$\mathrm{sen}(a) + \mathrm{sen}(b) = 2\left[\mathrm{sen}\frac{a+b}{2}\,\cos\frac{a-b}{2}\right]$$

com

$$a = k\,x - \omega\,t \qquad \text{e} \qquad b = k\,x + \omega\,t.$$

Portanto

$$\frac{a+b}{2} = \frac{k\,x - \omega\,t + k\,x + \omega\,t}{2} = k\,x$$

e

$$\frac{a-b}{2} = \frac{k\,x - \omega\,t - (k\,x + \omega\,t)}{2} = -\omega\,t.$$

Então

$$y = 2A\,\cos(\omega\,t)\mathrm{sen}(k\,x). \tag{2.5}$$

Uma vez que o cosseno é uma função par.

Podemos encarar o termo $2A\,\cos(\omega\,t)$ como sendo a amplitude de $\mathrm{sen}(k\,x)$, uma amplitude variável com o tempo.

Façamos o gráfico em função da coordenada x para cada instante de tempo t (Fig. 2.17).

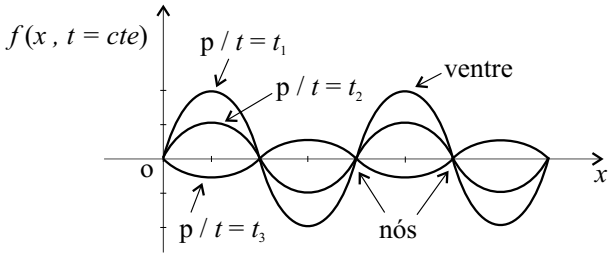

Figura 2.17: Gráfico de uma onda estacionária em função da variável x para cada instante de tempo t.

Observe que existem pontos fixos (nós) que não se movimentam com o passar do tempo e também existem pontos que se movimentam com máxima amplitude (ventre).

Os nós ocorrem nas posições em que $\mathrm{sen}(k\,x) = 0$, ou seja,

$$k\,x = 0,\ \pm 1\,\pi,\ \pm 2\,\pi,\ \pm 3\,\pi ... \quad = (\pm n\,\pi)$$

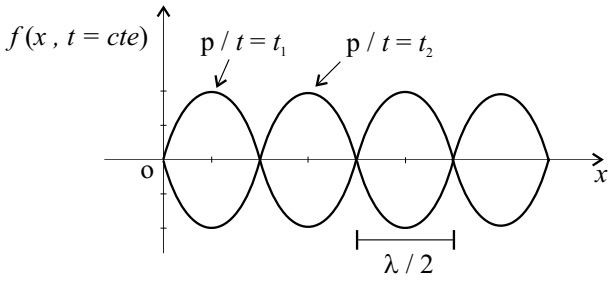

Figura 2.18: Distância entre nós consecutivos em uma onda estacionária em função da variável x para dois instante de tempo t.

$$\therefore x = \pm\,\frac{n\,\pi}{k} = \frac{n\,\pi\,\lambda}{2\,\pi} = \frac{n\,\lambda}{2}.$$

Veja (Fig. 2.18).

Os ventres ocorrem nas posições em que $\text{sen}(k\,x) = \pm\,1$, ou seja,

$$k\,x = \pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\,\pi}{2},\ \pm\frac{5\,\pi}{2}... \quad = \left(\pm(2\,n+1)\,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = (2\,n+1)\,\frac{\pi}{2\,k} = (2\,n+1)\,\frac{\pi\,\lambda}{4\,\pi} = (2\,n+1)\,\frac{\lambda}{4}.$$

A distância entre dois ventres também vale $\lambda\,/\,2$.

A onda é dita estacionária devido ao fato de não haver transporte líquido de energia.

2.6.1 Ondas estacionárias em instrumentos de cordas e tubos acústicos

Considere uma corda entre dois pontos separados por uma distância L (uma corda de violão ou de piano, por exemplo) e mantida tracionada com uma tração aproximadamente constante T. Ao se tocar na corda, deformando-a e soltando-a, produz-se um pulso que propaga ao longo da corda com uma velocidade $v = \sqrt{T/\mu}$. Esse pulso tem uma forma geométrica definida pela maneira de como a corda foi tocada e pode ser decomposto em uma soma de ondas senoidais através de um processo matemático e essas ondas propagam ao longo da corda. Se a corda fosse infinita, essas ondas propagariam indefinidamente em um determinado sentido. Contudo, a corda é finita e está presa nos extremos. Suponha que os extremos sejam fixos. As ondas chegarão aos extremos, refletirão invertidas e haverá superposição das ondas incidentes com as ondas refletidas formando ondas estacionárias. Essas ondas estacionárias devem possuir um nó em cada extremo da corda uma vez que os extremos são fixos. Portanto, nem todas as ondas estacionárias são possíveis de existir. Sendo L a distância entre os extremos, somente aquelas em que

$$L = n\,\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1,\,2,\,3,...$$

satisfarão a condição de extremos fixos. Os comprimentos de onda permitidos são

$$\lambda_n = \frac{2\,L}{n}$$

e as frequências correspondentes são

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2\,L}\,n.$$

Veja a figura (Fig. 2.19) para os valores correspondentes a $n = 1$, modo fundamental ou primeiro harmônico e $n = 2$, segundo harmônico.

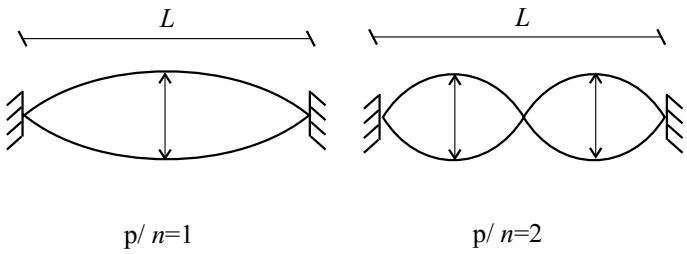

Figura 2.19: Modos de vibração para extremos fixos correspondentes a $n = 1$ e $n = 2$.

Se a corda tiver os dois extremos livres (corda presa em duas argolas livres para deslisar em duas hastes paralelas) deverá haver um ventre em cada extremidade e a mesma condição também deve ser satisfeita pois, a distância entre dois ventres consecutivos também vale $\lambda/2$ (Fig. 2.20).

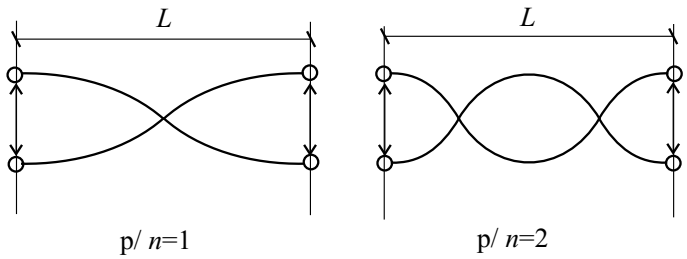

Figura 2.20: Modos de vibração para extremos livres correspondentes a $n = 1$ e $n = 2$.

Se a corda tiver um extremo fixo e o outro extremo livre, deverá haver um nó no extremo fixo e um ventre no extremo livre. A distância entre os extremos deverá ser um número impar de um quarto de comprimento de onda.

$$L = (2\,n - 1)\,\frac{\lambda}{4}, \quad n = 1,\, 2,\, 3, ...$$

e as frequências correspondentes são

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{4\,L}\,(2\,n - 1).$$

.

Outros instrumentos musicais são baseados na formação de ondas estacionárias sonoras (ondas de pressão no ar) no interior de um tubo como na flauta, na corneta, no clarinete, no trombone, no oboé, no órgão tradicional e outros. Os tubos acústicos, como são conhecidos,

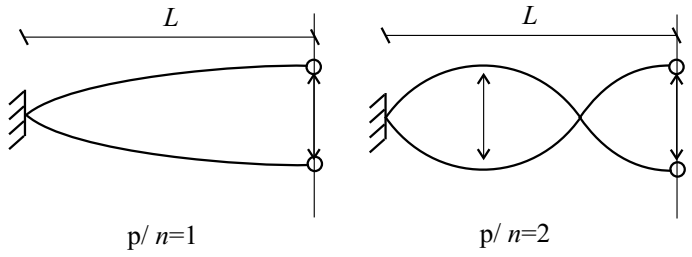

Figura 2.21: Modos de vibração para extremos fixo e livre correspondentes a $n = 1$ e $n = 2$.

devem possuir pelo menos uma extremidade aberta para permitir a saída do som. Alguns instrumentos podem ser modelados como um tubo acústico aberto em um extremo e fechado em outro enquanto outros podem ser modelados por um tubo acústico aberto nos dois extremos. Essencialmente, uma onda sonora é produzida em um dos extremos ou próximo dele por uma vibração mecânica e acústica em uma palheta ou pela complexa turbulência do ar soprado em uma fenda. Essa onda sonora propaga pelo tubo até atingir o extremo aberto onde parte da onda é refletida e parte é transmitida para o meio exterior. A onda refletida soma-se à onda incidente produzindo uma onda estacionária (quase estacionária para ser mais exato, pois as amplitudes das duas ondas são diferentes). O quanto reflete e o quanto transmite depende da forma de como o tubo se abre para o meio exterior. Se o tubo termina abruptamente, sem variação no seu diâmetro, como na flauta, a maior parte da onda sonora que propaga no interior do tubo é refletida de volta para o interior e uma pequena parte é transmitida para o exterior. Se o tubo termina suavemente, a boca do tubo vai abrindo aos poucos como em um clarinete, a maior parte da onda sonora é transmitida para o exterior e uma menor parte é refletida para o interior para formar a onda quase estacionária. Isso tem implicações importantes tanto na intensidade sonora quanto na qualidade (tipo) do som produzido.

Em termos de produção da onda estacionária, os resultados são semelhantes à corda vibrante. O extremo fechado produz um nó de deslocamento do ar e um ventre de pressão (pois a pressão pode variar bastante) enquanto que o extremo aberto produz um ventre de deslocamento (pois o ar pode se deslocar) e um nó de pressão. Desse modo, sendo L o comprimento do tubo, temos para um tubo aberto no dois extremos

$$L = n\,\frac{\lambda}{2}, \quad n = 1,\, 2,\, 3, ...$$

e as frequências correspondentes são

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2\,L}\,n.$$

Para um tubo aberto em um extremo e fechado no outro temos

$$L = (2\,n - 1)\,\frac{\lambda}{4}, \quad n = 1,\, 2,\, 3, ...$$

e as frequências correspondentes são

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{4\,L}\,(2\,n - 1).$$

Em todos os casos em que os nós e os ventre da onda estacionária coincidem com com as condições de nós e ventres nos extremos do meio, as ondas tendem a se perpetuar em um processo de múltiplas reflexões construtivas também conhecido como *situação de ressonância*, ressonância acústica para o som. Caso contrário, as múltiplas reflexões podem ser destrutivas (anti-ressonância) ou produzirem um resultado intermediário entre o reforço e a aniquilação. Se for produzido um som com frequência variável, apenas as frequências que coincidirem com as frequência possíveis para formação de onda estacionária parecerão reforçadas aos nossos ouvidos. As outras serão abafadas.

Nos sistemas reais, nos instrumentos, sempre existe amortecimento relacionado com transformações de energias em calor ou mesmo escape de energia como na produção do som por uma corda vibrante, por exemplo, e as oscilações tendem a desaparecer. As oscilações que satisfazem a condição de ressonância sobressaem com relação às outras e produzem um maior volume sonoro.

A onda estacionária ou oscilação estacionária resultante é, em geral, uma superposição de oscilações com vários comprimentos de onda e frequências permitidos para um determinado comprimento do meio de acordo com as equações acima apresentadas. Cada onda com frequência f_n ocorre com uma amplitude A_n que depende de como a onda foi originalmente produzida (a maneira de tocar na corda, por exemplo) e de como o meio atenua as diversas frequências. Essa superposição pode ser escrita como

$$A = \sum_{1}^{\infty} A_n \,\mathrm{sen}(\omega_n\, t + \phi_n), \quad \omega_n = 2\,\pi\, f_n.$$

No caso do som, as amplitudes A_n dos diversos componentes de frequência f_n definem a composição harmônica do som ou timbre. A frequência de uma nota musical é definida pela frequência fundamental (mais baixa) dessa composição (soma) harmônica. Dois instrumentos distintos podem produzir a mesma nota musical mas com timbres diferentes.

Capítulo 3

Fluidos

3.1 Definição

Quando aplicamos uma força resultante oblíqua e distribuída sobre o topo de um corpo sólido real, preso (colado) a uma superfície como mostra a figura (Fig. 3.1) notamos que o corpo se deforma.

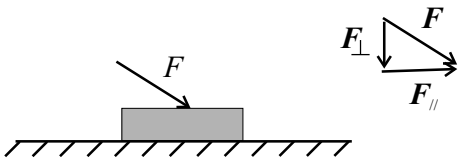

Figura 3.1: Uma força oblíqua aplicada em um corpo sólido fixo.

A força oblíqua pode ser decomposta em um componente perpendicular à superfície do corpo e outro componente paralelo a essa mesma superfície. O componente perpendicular comprime o corpo deformando-o no sentido de aproximar a face superior da face inferior, uma deformação *normal*. O componente paralelo deforma o corpo fazendo com que a superfície superior se desloque paralelamente à superfície inferior, uma deformação *cisalhante*.

Raciocinando com um pequeno elemento de volume cúbico, cujas faces possuam áreas Δa, a aplicação da força $\Delta\mathbf{F}$ nos permitirá definir duas novas grandezas: a tensão normal e a tensão de cisalhamento

$$\sigma_n = \frac{\Delta F_\perp}{\Delta a}, \qquad \sigma_c = \frac{\Delta F_{//}}{\Delta a}.$$

Nos sólidos, as forças internas de atração entre átomos, moléculas ou mesmo íons são suficientemente fortes para suportar essas tensões, dentro de certos limites, para que o corpo se deforme de modo reversível, isto é, retirando-se a tensão acaba-se a deformação (deformação elástica).

Um corpo fluido é, por definição, aquele que não suporta tensões de cisalhamento. A tentativa de aplicar uma tensão cisalhante faz com que o fluido se deforme indefinidamente.

Um fluido ideal é aquele que ao se deformar, é incapaz de transmitir a tensão de cisalhamento para suas vizinhanças ou para outro corpo. Um fluido ideal é uma abstração mas é útil, pois alguns fluidos reais tem características próximas do fluido ideal sob condições apropriadas.

Em um fluido ideal, só pode existir tensão normal que comummente chamamos de pressão e somente ela pode ser transmitida de um ponto a outro no fluido.

Em um fluido, as ligações internas entre os átomos e moléculas são muito fracas de modo que eles podem se mover com muita facilidade. Um fluido só fica confinado por causa do recipiente que o contém. Quando um fluido contido em um recipiente fechado é comprimido, por um pistão em um cilindro por exemplo, a pressão exercida pelo pistão é a mesma em todos os pontos do fluido que estejam em contato com as paredes do recipiente e, por extensão, em todos os pontos no interior do fluido (Lei de Pascal). Mas o que significa pressão no interior de um fluido? Significa que, se tomarmos um pequeno corpo ou volume imaginário no interior do fluido, uma pequena superfície Δa desse corpo estará sujeita a uma força normal $\Delta F_\perp$ tal que

$$P = \frac{\Delta F_\perp}{\Delta a}, \quad \Delta a \to 0 \qquad \text{ou} \qquad P = \frac{dF_\perp}{da}$$

qualquer que seja a superfície escolhida (Fig. 3.2).

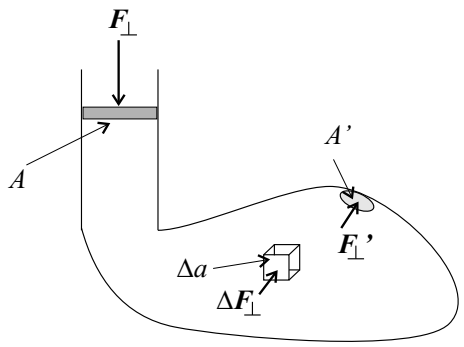

Figura 3.2: Fluido comprimido no interior de um recipiente.

$$P = \frac{F_\perp}{A} = \frac{F'_\perp}{A'} = \frac{\Delta F_\perp}{\Delta a}$$

Fluido viscoso é aquele que ao se deformar sob o efeito da tensão de cisalhamento também transmite essa tensão para outros pontos do fluido e para as superfícies que estejam em contato com ele. O ar é pouco viscoso porém o mel é muito viscoso. Por enquanto, consideraremos apenas fluidos não viscosos (ideais) e situações onde o fluido esteja em repouso, situações hidrostáticas.

O exemplo de maior aplicação da transmissão da pressão hidrostática é o "macaco hidráulico", onde um pequeno pistão de área A_1 submetido a uma força F_1 estabelece uma pressão P que é transmitida a um grande pistão de área A_2 submetido a uma força F_2 (Fig. 3.2).

No equilíbrio hidrostático temos

$$\frac{F_1}{A_1} = P = \frac{F_2}{A_2} \quad \therefore F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1,$$

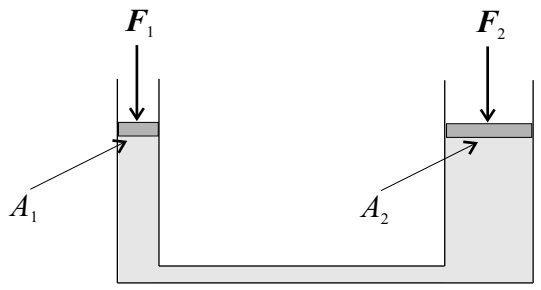

Figura 3.3: Princípio do macaco hidráulico.

ou seja, a força será multiplicada pela relação entre as áreas.

Um eventual deslocamento l_1 do pistão com área A_1 devido à força F_1 movimentará um volume $l_1\,A_1$ do fluido, que por sua vez movimentará o pistão com área A_2 de um deslocamento l_2 deslocando o mesmo volume (Fig. 3.4) tal que

$$A_1\,l_1 = A_2\,l_2 \quad \therefore l_2 = \frac{A_1}{A_2}\,l_1.$$

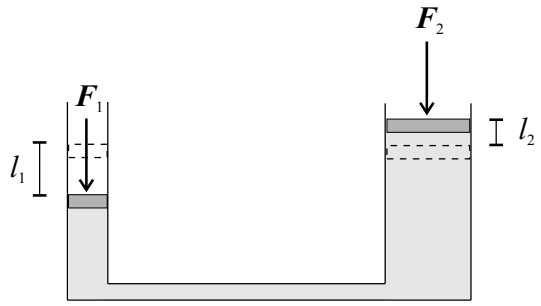

Figura 3.4: Deslocamentos dos pistões no macaco hidráulico.

O módulo do trabalho executado pelo pistão 2 será

$$W_2 = F_2\,l_2 = \frac{A_2}{A_1}F_1\,l_2 = \frac{A_2}{A_1}F_1\,\frac{A_1}{A_2}\,l_1 = F_1\,l_1 = W_1$$

que retrata a conservação da energia, $W_2 = W_1$.

3.2 Densidade de um fluido

Assim como em um sólido, um fluido também pode ser caracterizado pela densidade ou massa específica definida pela razão entre a massa e o volume $\rho = \Delta m/\Delta v$, quando $\Delta v \to 0$ ($\rho = dm/dv$). Um fluido homogêneo é aquele que possui a mesma densidade em todos os pontos.

Uma característica importante nos fluidos é que sua densidade pode variar com fatores como a temperatura e a pressão muito mais que nos sólidos. Os fluidos que apresentam grande variação da densidade com a pressão são chamados de fluidos compressíveis. Os gases são fluidos muito compressíveis e os líquidos são praticamente incompressíveis para as pressões usuais.

Os gases e os líquidos expandem com o aumento da temperatura quando a pressão é mantida constante e essa expansão pode ser utilizada para definir a variação da temperatura (termômetro de mercúrio ou de álcool). A expansão dos gases e líquidos ocasiona uma diminuição na densidade. De modo semelhante, quando o volume é mantido constante, o aumento da temperatura produz elevação na pressão e essa elevação de pressão também pode ser utilizada para definir uma escala de temperatura (termômetro a gás).

Um mesmo líquido, pode possuir densidades distintas se seus pontos estiverem em temperaturas diferentes. É comum encontrar nos oceanos correntes marítimas (água em movimento dentro da própria água) com densidades diferentes (e temperaturas diferentes) que se mantém imiscíveis por grandes distâncias, da ordem de centenas a milhares de quilômetros.

Para fins de comparação, a densidade do ar ao nível do mar à 20° C vale $\rho_{\text{ar}} = 1,2$ kg/m^3 e a da água $\rho_{\text{água}} = 10^3$ kg/m^3.

3.3 Pressão em um fluido no campo gravitacional

Conforme vimos anteriormente, a pressão no interior de um fluido em repouso na ausência de campo gravitacional *não* varia com a posição no interior do fluido, é constante. Contudo, na presença da gravidade, a pressão varia com a altura ou com a profundidade. Tomemos um elemento de volume dV na forma de um paralelepípedo de área A e altura dy no interior do fluido (Fig. 3.5).

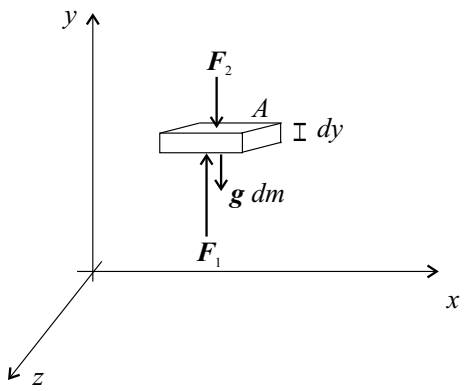

Figura 3.5: Deslocamentos dos pistões no macaco hidráulico.

Nesse volume temos uma massa $dm = \rho\, dV = \rho\, A\, dy$ que possui um peso $g\, dm$. Se esse elemento de volume encontra-se em repouso, a resultante das forças que agem nele deve ser nula. Portanto, a força F_1 devido à pressão P_1 do fluido na face inferior deve ser maior que a força F_2 devido à pressão P_2 do fluido na parte superior pelo valor $g\, dm$.

$$F_1 = F_2 + g\, dm$$

ou

$$F(y) = F(y + d\,y) + g\;d\,m,$$

dividindo pela área A temos

$$P(y) = P(y + d\,y) + \frac{g\;d\,m}{A} = P(y + d\,y) + \frac{g\;\rho\;A\;d\,y}{A} = P(y + d\,y) + g\;\rho\;d\,y,$$

ou

$$d\,P = P(y + d\,y) - P(y) = -\,\rho\;g\;d\,y. \tag{3.1}$$

Ou seja, a pressão diminui com o aumento da altura (ou aumenta com o aumento da profundidade). Se a densidade do fluido for constante (além do fato de que g é suposto ter variação desprezível) a pressão decrescerá linearmente com a altura

$$P(y) = P(0) -\;\rho\;g\;y.$$

Isso ocorre com muito boa precisão nos líquidos e aproximadamente no ar na baixa atmosfera; aproximadamente por causa da diminuição da densidade do ar com a altitude uma vez que a densidade depende da própria pressão e da temperatura.

A medida da pressão atmosférica (pressão absoluta) pode ser realizada com um barômetro que consiste em uma câmara evacuada (pressão zero) ligada a um tubo em forma de **U** preenchido com um líquido denso que não evapore com facilidade nas condições ambientes. Normalmente utiliza-se o mercúrio (Hg) mas pode-se também utilizar óleo. Veja (Fig. 3.6).

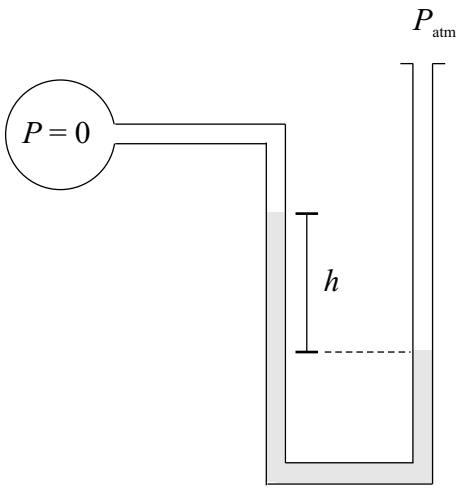

Figura 3.6: Barômetro de coluna de Hg.

Como a pressão acima da coluna esquerda de mercúrio é zero e a pressão acima da coluna direta é a própria pressão atmosférica temos

$$P_{\rm atm} = \rho_{\rm Hg}\,g\,h.$$

Medidas executadas ao nível do mar mostram que, em média, a altura $h = 76$ mm quando o fluido do barômetro é o mercúrio. Outros valores equivalentes em outras unidades são $1,01325 \times 10^5$ Pa, 1 atm e 1013,25 mbar.

A atmosfera é uma mistura de gases (78% N_2+ 20% O_2 + CO_2 +Ar) a baixa pressão e obedece razoavelmente bem a equação dos gases perfeitos $P\,V = n\,R\,T$ onde n é o número de moles (massa/massa molar). Ou seja,

$$P = \frac{m\,R\,T}{Mol\,V} = \rho\,\frac{R\,T}{Mol} \qquad \therefore\ \rho = \frac{P}{T}\,\frac{Mol}{R}\ , \quad \rho = \rho(P,\,T).$$

Substituindo na equação (3.1) fica

$$d\,P = -\frac{P}{T}\frac{Mol}{R}\,g\,d\,y \quad \therefore\ \frac{d\,p}{P} = -\frac{Mol}{R}\,g\,\frac{d\,y}{T}.$$

Se soubermos como a temperatura varia com a altitude essa equação pode ser resolvida. Medidas de temperatura na baixa atmosfera (até $\approx$ 11 km) mostram que a temperatura cai linearmente com a altitude

$$T = T_0 - \alpha\,y, \quad \alpha = 0,0065\ \mathrm{K\,/\,m}$$

ou

$$T = 288 - 0,0065\,y.$$

De forma que a resolução da equação diferencial fornece a solução

$$\frac{P}{P_0} = (1 - 22,557 \times 10^{-6})^{5,256}\ , \quad y \text{ em metros até 11 km.}$$

Sendo P_0 a pressão ao nível do mar (altura zero).

3.4 Empuxo

Quando um objeto é imerso em um fluido na presença da gravidade, existe uma diferença entre as pressões no topo e na base do objeto, $P_1 - P_2 = \rho\,g\,l$ sendo l a diferença de alturas entre o topo e a base (Fig. 3.7).

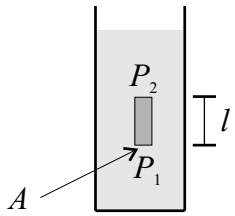

Figura 3.7: Diferença entre as pressões no topo e na base de um objeto em um fluido.

Essa diferença entre as pressões produz uma força que empurra o objeto para cima chamada de empuxo, **E**. Se o peso do objeto for igual ao empuxo, o objeto fica imóvel em qualquer lugar no interior do fluido. Se o peso for menor que o empuxo, o objeto sobe acelerado (se desprezarmos o atrito) e se for maior, desce acelerado.

O empuxo também pode ser interpretado como sendo devido ao peso do fluido deslocado pelo objeto

$$E = \rho\,g\,l\,A = \rho\,g\,V = m_{\text{fluido}}\,g.$$

3.5 Tensão superficial

Apesar da atração entre as moléculas que formam um fluido ser pequena, ela tem um papel importante na explicação de diversos efeitos interessantes como a produção de películas de líquidos e a capilaridade.

Se tomarmos um recipiente com um pouco de água exposta ao ar, teremos uma interface ar-água. Longe das bordas essa interface é praticamente plana. Perguntamos por que não é curva? Se tomarmos uma gota de água muito pequena e apoiada em uma superfície, essa gota tem uma forma praticamente esférica. Se a gota for um pouco maior, ela torna-se um pouco achatada. Nesses fenômenos participam forças de interação entre as próprias moléculas do fluido e entre as moléculas do fluido e o meio que o contém. Quando o fluido está sozinho, sem entrar em contato com outros corpos, ele tende a tomar uma forma esférica que é a forma que minimiza a área superficial.

Admite-se a existência de forças tangenciais agindo em um ponto qualquer do fluido na superfície interfacial de tal forma que um ponto é "esticado" em todos os sentidos paralelos à superfície. O seguinte experimento permite verificar a existência de tais forças: Considere uma armação de arame na forma de um U fechado por uma barra deslizante com uma pequena argola em cada extremo como mostra a figura (Fig. 3.8). Essa armação é

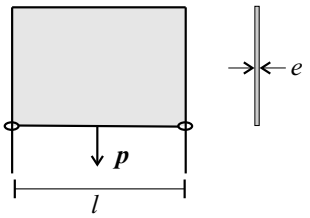

Figura 3.8: Arranjo em forma de U para mostrar e existência de forças tangenciais em uma película.

mergulhada verticalmente em um fluido (água com sabão por exemplo) e retirada de modo a formar uma película.

A barra deslizante com massa m tem peso $p = m\ g$ e estica a película para baixo até que o equilíbrio é atingido. No equilíbrio, somos obrigados a admitir que a película exerce uma força para cima igual ao peso da barra, $F = p$. A película tem uma espessura e e, se aumentarmos o peso da barra, observamos que a película estica e sua espessura diminui, mantendo o volume constante, indicando que o material no interior da película deslocou-se para a superfície. Esse processo pode continuar até a película tornar-se bastante fina a ponto de romper-se. Chamamos atenção que o modo com que a película "estica" é diferente do modo com que um um meio elástico (lençol de borracha por exemplo) estica. No meio elástico existe afastamento entre os componentes do meio intermediado por forças elásticas enquanto que na película de fluido existe movimentação dos componentes do interior para o exterior sem haver afastamento relativo entre dois componentes próximos. No meio elástico existe variação de volume enquanto que na película o volume se mantém constante.

Admite-se que a força F tenha origem nas duas faces da película, $F/2$ em cada face já que são idênticas. Esse argumento baseia-se no fato de que, se a película for bastante fina, as duas faces tendem a se encontrar não havendo a possibilidade de existência de uma força interna à película. Suponhamos então que a película seja esticada até o limite de seu

rompimento, define-se então a tensão superficial γ de um material fluido como a relação entre a força em uma face e o comprimento da barra deslizante.

$$\gamma = \frac{F/2}{l} = \frac{F}{2\,l} \tag{3.2}$$

Concordamos que o termo "tensão superficial" é um tanto quanto infeliz pois, a palavra tensão no estudo da deformação dos corpos é utilizada para a relação entre a força e a área onde a força está sendo aplicada e não força por unidade de comprimento como definida na tensão superficial.

A tensão superficial da água a 20° C vale $72,8 \times 10^{-3}$ N/m e uma solução de sabão em água na mesma temperatura tem um valor $25,0 \times 10^{-3}$ N/m. Por essa razão, é mais fácil passar água com sabão pelas fibras de um tecido do que a água pura.

Exemplo

Em uma bolha de sabão esférica, na ausência de campo gravitacional, o ar aprisionado interior da bolha tem maior pressão que no exterior pois, devido à tensão superficial na película, a bolha tende a contrair comprimindo o ar no seu interior. No equilíbrio, a força exercida na superfície interna da bolha devido à diferença entre as pressões deve ser compensada pelo efeito produzido pela tensão superficial. Para compreender melhor, cortemos a bolha no plano equatorial e analisemos as forças (Fig. 3.9). A película esférica tem raio R e uma pequena espessura e. O ar aprisionado no interior tende a empurrar a semi-casca esférica inferior para baixo com uma força F.

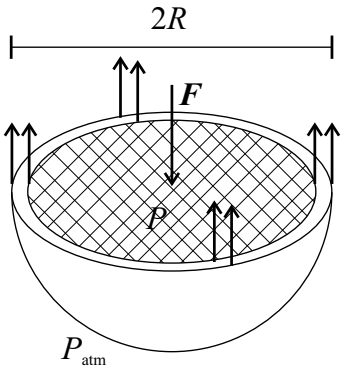

Figura 3.9: Corte de uma bolha de sabão esférica.

$$F = (P - P_{\text{atm}})\,\pi\,R^2$$

Mas, no equilíbrio,

$$F = 2\,L\,\gamma, \quad L = 2\,\pi\,R$$

$$\therefore (P - P_{\text{atm}})\,\pi\,R^2 = 2 \times 2\,\pi\,R\,\gamma$$

$$\therefore P - P_{\text{atm}} = \frac{4\,\gamma}{R}.$$

Se ao invés da bolha tivéssemos uma gota, não haveria a face interna e $F = L\,\gamma = 2\,\pi\,R\,\gamma$. Então, para uma gota temos

$$P - P_{\text{atm}} = \frac{2\,\gamma}{R}$$

onde P é a pressão interna no líquido.

3.6 Capilaridade

Quando um líquido entra em contato com um sólido, existe uma força de interação atrativa entre as moléculas do líquido e do sólido além da força entre as próprias moléculas do líquido. Quando a força entre as moléculas do líquido e do sólido é maior do que a força entre entre as moléculas do líquido, o líquido "molha" a superfície do sólido espalhando-se indefinidamente, formando uma película cada vez mais fina.

Quando o oposto acontece, o líquido toma a forma de gotas esféricas ou quase esféricas (esferas achatadas) e não se espalha na superfície.

Quando o contato acontece em superfícies cilíndricas, tubos, e o líquido molha a superfície, este tende a subir pelas paredes originando o efeito de capilaridade. O líquido não sobe indefinidamente pelas paredes na presença do campo gravitacional pois, ao subir, as moléculas do líquido puxam outras moléculas que estão abaixo aumentando o peso da coluna que subiu além da superfície horizontal. O equilíbrio se estabelece quando a força de atração entre as moléculas e a superfície se igualam ao peso da coluna, $F = p$ (Fig. 3.10).

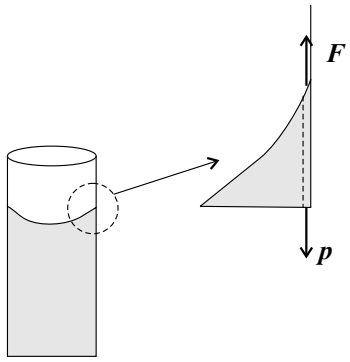

Figura 3.10: Capilaridade de um líquido em um tubo.

A capilaridade é um fenômeno importante na retenção de água e petróleo nos poros das rochas, na distribuição da seiva pelos caules das plantas, na distribuição do sangue nos vasos sanguíneos capilares, etc.

3.7 Dinâmica dos Fluidos

Três aspectos importantes devem ser destacados no que se refere ao movimento dos fluidos:

O primeiro deve-se à descoberta feita por Prandtl, L. (1904) de que, quando um fluido se movimenta ou escoa sobre uma superfície, a camada molecular próxima à superfície permanece aderida à ela, a velocidade é zero. As camadas adjacentes do fluido deslizam

sobre as próprias camadas e um gradiente de velocidade de escoamento se estabelece a partir do valor de velocidade zero.

O segundo, é que os fluidos quase ideais (baixíssima viscosidade) escoam com pouca perda de energia enquanto que os fluidos viscosos produzem calor ao escoar, ou seja, o escoamento só é possível acontecer às custas de alguma forma de energia que está sendo transformada em calor.

O terceiro, o escoamento de um fluido pode-se dar de forma previsível (escoamento laminar, onde é possível prever a velocidade do fluido em cada posição) ou de forma caótica ou turbulenta onde não é possível prever a velocidade e a trajetória de uma partícula do fluido. Em um fluido real, o escoamento torna-se turbulento com o aumento da velocidade de escoamento.

3.7.1 Conservação da massa

Quando um fluido escoa, quer seja ideal ou real, a massa se conserva. Se um fluido escoa através de um tubo com uma entrada e uma saída, a vazão mássica (massa por unidade de tempo) na entrada é igual à vazão mássica na saída. Ou seja, a quantidade de massa por unidade de tempo que atravessa qualquer seção reta do tubo é constante.

O que denominamos de tubo pode ser um tubo real ou um tubo virtual. No tubo real, as paredes do tubo obrigam o fluido a escoar ao longo do comprimento deste tubo. No tubo virtual, as paredes do tubo se devem ao próprio fluido. As "partículas"do fluido em movimento descrevem uma trajetória que chamamos de linha de fluxo e um conjunto de linhas de fluxo definem um tubo de escoamento, figura (Fig. 3.11).

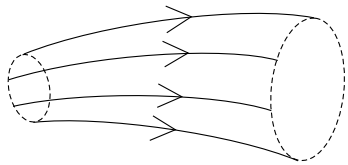

Figura 3.11: Tubo de escoamento.

Nos líquidos em geral e nos gases em baixas velocidades de escoamento, podemos considerar esses fluidos como incompressíveis, ou seja, a densidade permanece constante ao longo do escoamento. A separação das linhas de fluxo *não* se deve à variação de volume do fluido mas sim de mudança de trajetória e velocidade mantendo a densidade constante.

Em um escoamento genérico a altas velocidades é possível haver mudanças na densidade do fluido devido, inclusive, a variações na temperatura ou na pressão. Nesses casos, se tomarmos duas seções do tubo com áreas A_1 e A_2 onde as velocidades e densidades são v_1, ρ_1 e v_2, ρ_2, teremos que a quantidade de massa dm que atravessa uma seção A no intervalo de tempo dt pode ser escrita como

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\rho dV}{dt} = \frac{\rho A dl}{dt} = \rho A v$$

e como a massa se conserva (vazão mássica constante) temos

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2. \tag{3.3}$$

Que é a equação da continuidade para fluidos compressíveis.

No caso particular dos fluidos incompressíveis, a equação simplifica para

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante}. \tag{3.4}$$

Ou seja, um aumento na área é acompanhado por uma diminuição na velocidade e vice-versa. Isso é o que percebemos ao estrangular a saída de uma mangueira de água. A diminuição da área de saída faz com que o jato de água tenha maior velocidade.

3.7.2 Equação de Bernoulli

Consideremos agora o movimento de um fluido ideal, incompressível, no campo gravitacional. Um elemento de massa dm desloca-se ao longo de um tubo de escoamento com variação da altura com relação ao solo como mostra a figura (Fig. 3.12).

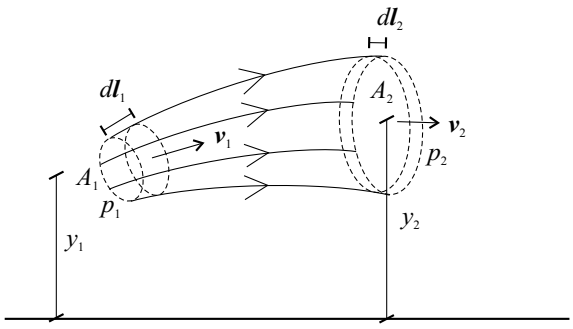

Figura 3.12: Deslocamento de um elemento de massa dm ao longo de tubo de escoamento com variação da altura no campo gravitacional.

O elemento de massa dm, de forma cilíndrica com área da base A e altura dl, se deformará ao longo do tubo de escoamento mantendo seu volume constante, pois estamos assumindo que o fluido seja incompressível. Na posição 1 o elemento de massa dm está a uma altura y_1 com velocidade v_1 e submetido a uma pressão p_1,

$$dm = \rho A_1 dl_1.$$

Na posição 2 o elemento de massa dm está a uma altura y_2 com velocidade v_2 e submetido a uma pressão p_2,

$$dm = \rho A_2 dl_2.$$

Entre os dois extremos, o elemento de massa dm está a uma altura y, com uma velocidade v e submetido a uma diferença de pressões $p(y + \Delta y) - p(y)$ (Fig. 3.13).

A diferença de pressões, $p(y) - p(y + \Delta y) = -dp$ entre as duas faces do elemento de massa, produz um trabalho

$$dW = [F(y) - F(y + dy)]dl = -dp\, A\, dl = -dp\, dV$$

para desloca-lo de dl ao longo da linha de fluxo durante o intervalo de tempo dt.

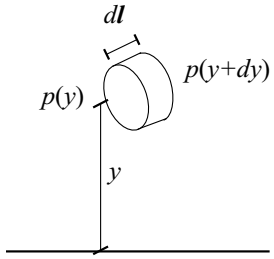

Figura 3.13: Elemento de massa dm em um ponto no tubo de escoamento.

Esse trabalho deve ser igual à variação da energia mecânica (energia cinética mais energia potencial) do elemento de massa dm,

$$dW = dE_c + dE_p = dm\frac{2\,v\,dv}{2} + dm\,g\,dy,$$

ou

$$-dp\,dV = dm\,v\,dv + dm\,g\,dy.$$

Mas $\rho = dm/dV$,

$$\therefore -dp = \rho\,v\,dv + \rho\,g\,dy.$$

Integrando do ponto 1 ao ponto 2 fica

$$-(p_2 - p_1) = \rho\frac{v_2^2}{2} - \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho\,g\,y_2 - \rho\,g\,y_1$$

ou

$$p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho\,g\,y_1 = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} + \rho\,g\,y_2 = \text{cte}, \tag{3.5}$$

conhecida como a equação de Bernoulli.

Essa equação mostra que, para uma altura constante (ou na ausência de gravidade)

$$p + \rho\frac{v^2}{2}$$

é constante.

Um aumento da pressão está associado a uma diminuição da velocidade e vice-versa. O termo $\rho\,v^2\,/\,2$ é chamado de "pressão dinâmica".

O tubo de Venturi evidencia o resultado previsto pela equação de Bernoulli. Considere um fluido ideal e incompressível escoando por um tubo onde existe um estreitamento como na figura (Fig. 3.14).

A velocidade média na seção A_2 é maior que a velocidade média na seção A_1 como mostrado na equação da continuidade,

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2}v_1$$

e pela equação de Bernoulli (3.5), com altura constante ou $g = 0$, temos

$$p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2},$$

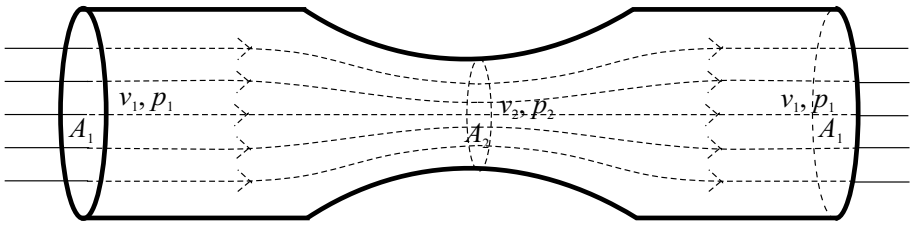

Figura 3.14: Escoamento em um tubo de Venturi.

$$\therefore p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = p_1 + \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - \frac{A_1^2}{A_2^2}v_1^2\right),$$

$$\therefore p_2 = p_1 - \frac{\rho\, v_1^2}{2}\left(\frac{A_1^2 - A_2^2}{A_2^2}\right).$$

Como $A_2 < A_1$, temos que $p_2 < p_1$. Ou seja, no estreitamento existe um aumento da velocidade e uma diminuição da pressão do fluido.

O tubo de Venturi é muito utilizado para a medida da velocidade de um fluido a partir da medida da diferença entre as pressões. É utilizado também como instrumento para reduzir a pressão (bomba de vácuo) e para succionar outros fluidos (combustível líquido em um carburador de um motor a gás, gasolina ou álcool por exemplo).

Na dedução da equação de Bernoulli foi considerado que o fluido era ideal. Para um fluido viscoso, o trabalho realizado pela pressão também é convertido em calor e esse termo deve ser acrescentado à equação. A diferença entre as pressões, $p_1 - p_2$, tem que ser corrigida para levar em conta as perdas de energia na forma de calor. Esse termo de correção da energia por unidade de massa é denominado de "perda de carga"e normalmente é determinado empiricamente e representado na forma de ábacos ou de gráficos em função da vazão do fluido e parametrizado pela viscosidade, pela rugosidade da tubulação ou por outro parâmetro conveniente. A expressão corrigida fica:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + g(y_2 - y_1) + \text{perda de carga}.$$

Observe bem que a perda de carga tem dimensão de energia por unidade de massa.

3.7.3 Forças produzidas por fluidos

Vejamos agora as forças associadas à variação da quantidade de movimento em um fluido.

Considere uma situação física em que um fluido em movimento no interior de um tubo real tem a sua trajetória modificada devido a uma curvatura no tubo (Fig. 3.15). Uma certa quantidade de massa Δm do fluido no interior do tubo possui uma velocidade $\mathbf{v}_1$ e uma correspondente quantidade de movimento $\Delta m\, \mathbf{v}_1$. Após a curva, essa mesma quantidade de massa possui uma velocidade $\mathbf{v}_2$ e uma nova quantidade de movimento $\Delta m\, \mathbf{v}_2$.

A variação da quantidade de movimento correspondente, causada pela curvatura do tubo e alteração da seção, vale $\Delta m\, (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$. Supondo que essa alteração da quantidade de movimento tenha ocorrido em um intervalo de tempo Δt, as paredes do tubo devem ter

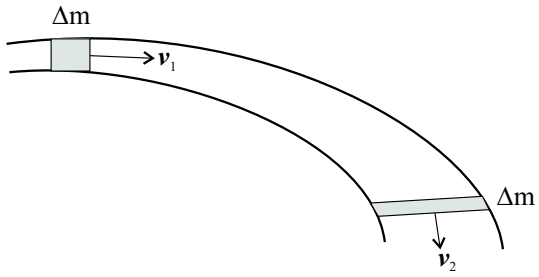

Figura 3.15: Escoamento em um tubo real curvo.

exercido uma força $\Delta\mathbf{F}$ sobre o elemento de massa Δm igual à taxa de variação temporal da quantidade de movimento,

$$\Delta\mathbf{F} = \Delta m \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \Delta m\, \mathbf{a}.$$

A força total que o tubo exercerá sobre todos os elementos de massa será a soma de todas essas forças quando $\Delta m \to 0$,

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{a}\, dm, \tag{3.6}$$

ou então,

$$\mathbf{F} = \int_{\text{Volume}} \frac{d\mathbf{v}}{dt}\, \rho\, dV = \int_{\text{Velocidades}} \frac{dV}{dt}\, \rho\, d\mathbf{v} = \int_{\text{Velocidades}} Q\, \rho\, d\mathbf{v}, \tag{3.7}$$

onde Q é a vazão volumétrica, $Q = dV/dt$.

A força que o fluido exercerá sobre as paredes do fluido terá o mesmo módulo e sentido oposto, $\mathbf{F}_f = -\mathbf{F}$.

Vejamos dois exemplos simples:

Exemplo 1

Considere uma mangueira reta com 1,0 cm de diâmetro por onde escoa água ($\rho = 1,0$ g/cm^3) com uma vazão de 12,0 litros por minuto. No extremo da mangueira existe um estreitamento e o diâmetro reduz para 0,3 cm, sendo esse o diâmetro do jato de água que sai da mangueira. Determine a força necessária para segurar e manter a mangueira em repouso enquanto esguincha a água (Fig. 3.16).

Como existe um estreitamento na mangueira, existe variação na velocidade e a força que o tubo exerce no fluido pode ser calculada pela equação (3.7) onde a densidade e a vazão são constantes.

$$\mathbf{F} = \int_{\text{Velocidades}} Q\, \rho\, d\mathbf{v} = Q\, \rho \int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d\mathbf{v} = Q\, \rho\, (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = Q\, \rho\, (v_2 - v_1)\, \widehat{\mathbf{i}}.$$

De acordo com a equação da continuidade para densidade constante (3.4) temos

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

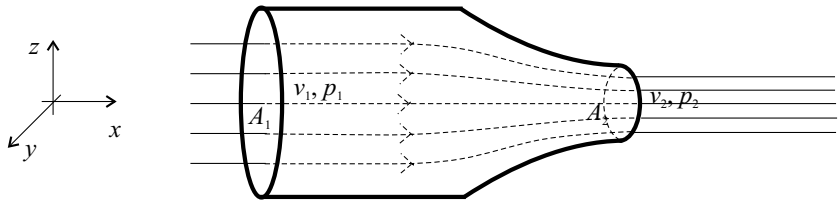

Figura 3.16: Mangueira esguinchando água.

e $v_1 = Q/A_1$,

$$\therefore \mathbf{F} = Q\,\rho\,(\frac{A_1}{A_2} - 1)v_1\,\widehat{\mathbf{i}} = Q\,\rho\,(\frac{A_1}{A_2} - 1)\frac{Q}{A_1}\,\widehat{\mathbf{i}} = Q^2\,\rho\,(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1})\,\widehat{\mathbf{i}}.$$

Como $\rho = 10^3$ kg/m^3, $Q = 12,0$ l/min $= 12000/60$ cm^3/s $= 200$ cm^3/s e $A = \pi\,d^2/4$ fica

$$\mathbf{F} = 10^3 \times (200 \times 10^{-6})^2 \times \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{(0,3 \times 10^{-2})^2} - \frac{1}{(10^{-2})^2}\right)\,\widehat{\mathbf{i}} = 5,1\,\widehat{\mathbf{i}}\,\mathrm{N}.$$

Que é a mesma força necessária para segurar a mangueira.

Exemplo 2

Um jato de água de 1,0 cm de diâmetro e uma vazão de 60 litros por minuto é dirigido para um tubo em forma de U com o mesmo diâmetro de modo a retornar o jato (Fig. 3.17). Determine a força necessária para segurar o tubo mantendo-o em repouso.

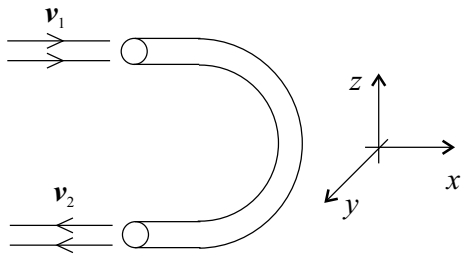

Figura 3.17: Inversão de um jato de água por um tubo em forma de U.

Nesse caso, só existe inversão no sentido da velocidade do jato sem haver alteração no módulo da velocidade, $\mathbf{v_2} = -\mathbf{v_1}$.

$$\mathbf{F} = \rho\,Q\,(-\mathbf{v_1} - \mathbf{v_1}) = -\rho\,Q\,2\,v_1\widehat{\mathbf{i}},$$

mas $v_1 = Q/A_1$

$$\therefore \mathbf{F} = \rho\,\frac{Q^2}{A_1}\,\widehat{\mathbf{i}} = -\frac{2 \times 10^3 \times (10^{-3})^2}{\pi/4\,(10)^{-4}}\widehat{\mathbf{i}} = -25,5\widehat{\mathbf{i}}\,\mathrm{N}.$$

3.7.4 Forças na asa de um avião

Uma asa é um corpo extenso que é submetido ao escoamento de um fluido, o ar. A asa possui uma superfície inferior e uma superfície superior que podem ser simétricas ou não com relação a um plano intermediário (Fig. 3.18).

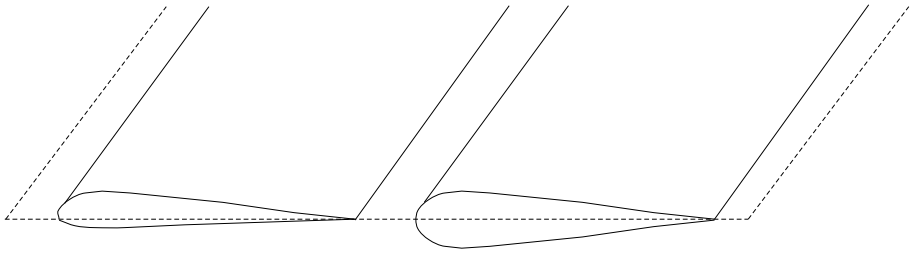

Figura 3.18: Asas assimétrica e simétrica.

Quando o ar escoa pela asa, ele tende a acompanhar as curvaturas das superfícies. Em baixas velocidades, a experiência mostra que o escoamento é praticamente laminar, muito pouca turbulência é produzida. Se a asa for muito extensa, seu comprimento (envergadura) muito maior que sua largura (corda) podemos considerá-la como infinita e o escoamento deve ser o mesmo em qualquer seção da asa que esteja distante das suas extremidades. Podemos então representar o escoamento de forma bidimensional em um perfil ou seção da asa (Fig. 3.19).

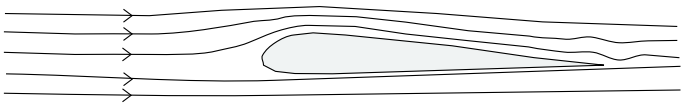

Figura 3.19: Escoamento bidimensional em um perfil de uma asa assimétrica.

O aumento da velocidade do fluido ou o aumento do ângulo de ataque (ângulo formado entre a direção da velocidade do fluido não perturbado e a corda da asa) produzem um aumento na turbulência e destruição do fluxo laminar de modo progressivo (Fig. 3.20).

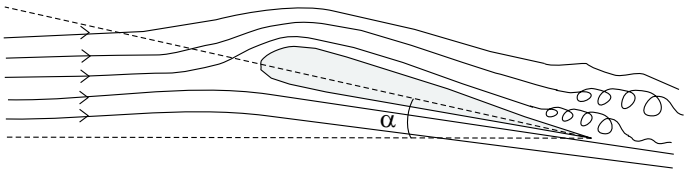

Figura 3.20: Ângulo de ataque em um perfil de uma asa assimétrica.

Dois fenômenos físicos podem ser identificados quando o caminho percorrido pelo fluido na parte superior é diferente do caminho percorrido na parte inferior (isso depende da simetria da asa e do ângulo de ataque): O aumento da velocidade do fluido na região de maior curvatura e a mudança na direção da quantidade de movimento do fluido quando o mesmo é impulsionado para baixo ou para cima durante o escoamento (Fig. 3.21).

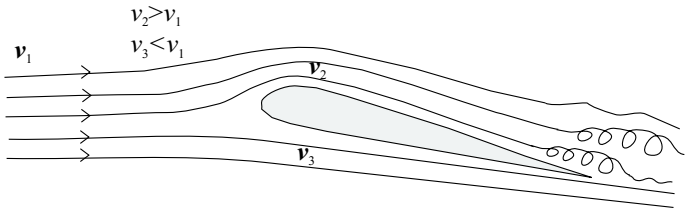

Figura 3.21: Velocidades do fluido escoando em um perfil de uma asa assimétrica.

O aumento da velocidade na parte superior e a diminuição na parte inferior faz com que a pressão na parte superior seja menor que na parte inferior produzindo uma força para cima na asa nessa posição. Além disso, a mudança na direção da quantidade de movimento do fluido também contribui para empurrar a asa para cima.

A superposição de todos os efeitos, inclusive os produzidos pela turbulência, produz uma força oblíqua, para cima e para trás nesse caso, chamada de *Resultante Aerodinâmica*, **RA** (Fig. 3.22).

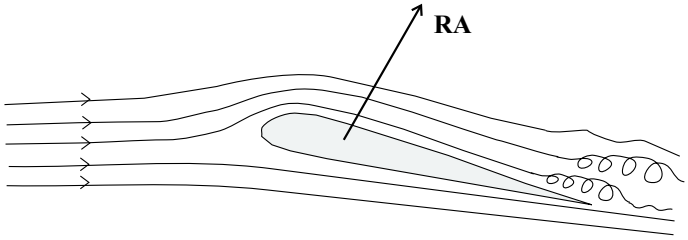

Figura 3.22: A Resultante Aerodinâmica em um perfil de uma asa assimétrica.

O módulo, a direção e o ponto de aplicação dessa força são fortemente dependentes do ângulo de ataque.

A resultante aerodinâmica pode ser convenientemente decomposta em um componente perpendicular à direção do fluido não perturbado (vento relativo) chamado de *Sustentação*, **L** (Lift) e outro componente paralelo à direção do fluido não perturbado chamado de *Arrasto*, **D** (Drag) (Fig. 3.23).

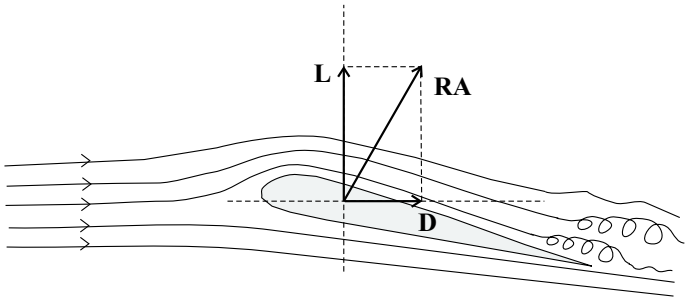

Figura 3.23: A sustentação **L** e o arrasto **D**.

Tanto a sustentação **L** quanto o arrasto **D** são diretamente proporcionais à área da asa e à pressão dinâmica mas variam de modo diferente com o ângulo de ataque. Pode-se escrever

$$L = C_l\, S\, \frac{\rho\, v^2}{2} \qquad \text{e} \qquad D = C_d\, S\, \frac{\rho\, v^2}{2} \tag{3.8}$$

onde S é a área da asa e $\rho\, v^2/2$ é a pressão dinâmica.

Os coeficientes C_l e C_d são característicos da forma geométrica da asa e variam com o ângulo de ataque. Seus valores são determinados experimentalmente para cada asa em um túnel de vento em função do ângulo de ataque e representados graficamente. Os aspectos dos gráficos para uma asa assimétrica típica são os seguintes (Fig. 3.24).

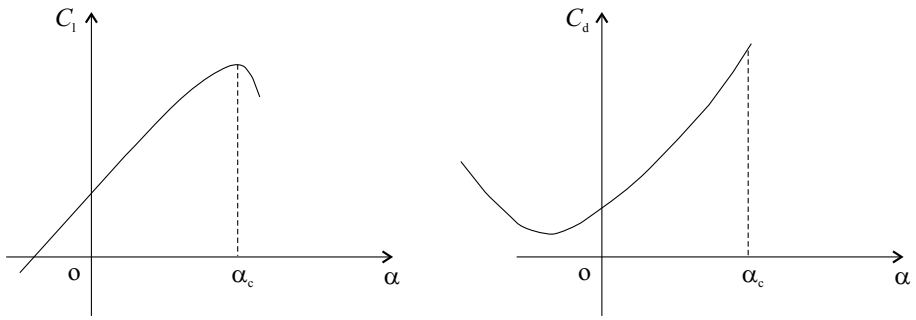

Figura 3.24: Gráficos dos coeficientes de sustentação e arrasto em função do ângulo de ataque para uma asa típica.

O coeficiente de sustentação cresce aproximadamente linearmente com o aumento do ângulo de ataque até as vizinhanças do ângulo crítico α_c (ângulo de "stall"ou ângulo de perda) e então cai bruscamente. Isso ocorre aproximadamente em torno de 14 a 18 graus. Esse comportamento é decorrente do *descolamento* do fluido da superfície acompanhado por uma grande geração de turbulência que toma conta da superfície superior da asa de modo abrupto.

O coeficiente de arrasto cresce de modo aproximadamente parabólico com o aumento do ângulo de ataque com forte crescimento próximo ao ângulo crítico.

Quando a asa é simétrica, o coeficiente de sustentação é nulo e o coeficiente de arrasto é mínimo quando o ângulo de ataque é nulo. Nas asas assimétricas isso ocorre para ângulos de ataque ligeiramente negativos.

Em algum ângulo de ataque, normalmente pequeno, obtemos a máxima razão C_l/C_d e os aviões são projetados para operar ao redor desse valor com maior eficiência. Alguns valores típicos para a razão C_l/C_d máxima.

- Asa delta: 4 - 6
- Pequenos aviões: 8 - 12
- Boeing 727: $\approx$ 19
- Planadores: $\approx$ 28
- Planadores de alta performance: 30 - 50.

Capítulo 4

Sistemas termodinâmicos

4.1 O equilíbrio térmico

A noção de corpo quente e corpo frio é primitivamente uma noção associada aos sentidos humanos (percepção que podemos diferenciar esses dois estados de um corpo) e expressar esse sentimento por uma linguagem. Os sentidos humanos mostram também que o resultado de colocar água em uma panela sobre o fogo, ou mesmo expor um objeto ao Sol, é uma sensação de aquecimento gradual, ou seja, podemos perceber, ou aprendemos a perceber, situações intermediárias entre o muito frio e o muito quente.

A experiência nos mostra, através de nossa percepção, que ao misturar água fria com água quente resulta em água em uma situação intermediária semelhante ao que ocorre durante o aquecimento gradual da panela sobre o fogo.

Outro resultado experimental cotidiano é que, quando um corpo frio é colocado em contato com um corpo quente do mesmo tipo, segundo os nossos sentidos o corpo frio se aquece enquanto o corpo quente se esfria e após um longo tempo em contato, não conseguimos mais distinguir um corpo do outro através dos nossos sentidos. Dizemos então que os dois corpos atingiram o *equilíbrio térmico*.

Desde a antiguidade sabe-se que certos materiais tem a capacidade de dificultar ou de favorecer a rapidez com se atinge o equilíbrio térmico. Um recipiente com água quente demora mais para esfriar se estiver envolvido com lã ou papel do que se deixado diretamente em contato com o ar. Contudo o equilíbrio térmico sempre será alcançado, basta esperar o tempo suficiente.

Todos esses fatos e resultados favoreceram a ideia de que algo é transmitido de um corpo para o outro no processo de atingir o equilíbrio térmico. De início, pensou-se durante muito tempo que algum tipo de "fluido" passava de um corpo para o outro e se criou a ideia do "calórico" apesar desse fluido não ser visível. Outra constatação importante é que esse fluido calórico parecia ter um sentido preferencial, pois nunca se observou a separação espontânea em um corpo quente e um corpo frio a partir de um corpo morno.

4.2 A temperatura

O conceito de temperatura foi introduzido para representar a tendência natural da procura pelo equilíbrio térmico. Diz-se que dois corpos que atingiram o equilíbrio térmico estão à mesma temperatura. A ausência do equilíbrio térmico significa que os corpos estão com temperaturas diferentes. Para quantificar a temperatura (dar um valor) utiliza-se alguma propriedade física do corpo que seja variável com o processo de aquecimento e esfriamento de modo reversível. A propriedade mais utilizada é a expansão térmica (linear, superficial ou volumétrica) devido à facilidade com que a medida pode ser executada. Outra propriedade utilizada é a variação da pressão de um gás a volume constante, método padrão para a medida da temperatura.

Além da propriedade física escolhida, é necessário também impor uma correspondência entre a variação da propriedade e a variação da temperatura. Usualmente impõe-se uma correspondência linear entre as duas variáveis mas nada impede de utilizar uma outra função. Por exemplo, uma correspondência logarítmica poderia ser interessante se uma das variáveis tiver uma faixa de variação muito ampla quando comparada com a faixa de variação da outra variável.

Uma vez escolhida a correspondência linear entre a propriedade física e a temperatura, é necessário estabelecer a escala de temperatura, ou seja, determinar os coeficientes angular e linear (a e b em $y = a\,T + b$) da relação. Para isso é necessário tomar dois pontos experimentais padrões que possam ser reproduzidos com facilidade e repetibilidade. Ao longo da história vários padrões foram utilizados e deram origem a várias escalas termométricas. Possivelmente, os padrões mais interessantes tenham sido o ponto de solidificação e o ponto de ebulição da água ao nível do mar. Na escala Celsius ou Centígrada, atribuiu-se os valores 0° C e 100° C a esses dois pontos e a unidade grau centígrado fica determinada como um centésimo dessa faixa de variação.

É muito comum utilizar a expansão do mercúrio ou do álcool com corante em um tubo capilar conectado a um reservatório (bulbo) e selado, ambos de vidro (Fig. 4.1).

Figura 4.1: Termômetro baseado na expansão de um líquido.

O aquecimento do termômetro como um todo provoca a expansão térmica tanto do recipiente quanto do volume do líquido no seu interior. Contudo, a expansão do volume líquido é maior que a expansão do volume do recipiente e o líquido expande-se ao longo do tubo capilar. O fato do diâmetro do tubo capilar ser pequeno propicia uma grande variação ao longo do comprimento melhorando a sensibilidade do instrumento. É importante que durante o aquecimento o líquido não sofra transição de fase (entre em ebulição).

Os diferentes líquidos expandem de modo diferente quando submetidos ao mesmo aquecimento de forma que, dois termômetros construídos com líquidos diferentes e submetidos ao mesmo processo de calibração (zero grau na mistura água mais gelo e cem graus na água em ebulição) podem indicar temperaturas ligeiramente diferentes fora dos pontos de calibração, nos valores intermediários entre zero e cem graus ou mesmo aquém ou além desses extremos.

Para evitar esse tipo de problema, procurou-se uma propriedade física que fosse independente da substância termométrica. Descobriu-se que todos os gases a baixa pressão tem comportamento semelhante. A medida da pressão de um gás a volume constante passou a ser então o padrão para a medida da temperatura.

Já era conhecido que a pressão de um gás a baixa pressão varia linearmente com a temperatura na escala Celsius, $P \, \alpha \, T_C$, em uma ampla faixa de valores (Fig. 4.2).

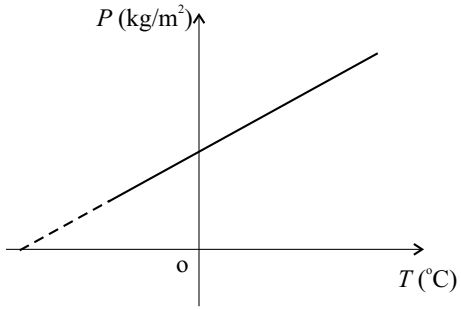

Figura 4.2: Variação da pressão em um gás em função da temperatura na escala Celsius.

A extrapolação do gráfico para valores muito baixos de pressão produz, para $P = 0$ uma temperatura Celsius de -273,15 ° C. Muitos gases não podem ir a temperaturas muito baixas pois podem se liquefazer durante o processo, por isso é necessário extrapolar o gráfico.

Criou-se então a escala de temperatura absoluta baseada no termômetro a gás onde a pressão é diretamente proporcional à temperatura expressa em kelvin (K) sendo que em $T = 0$ a pressão é nula, $P = a\,T$.

Para calibrar a escala escolheu-se utilizar o ponto triplo da água (coexistência da água líquida, sólida e gasosa) como referência, que ocorre na pressão de 610 Pa (0,006 atm) e 0,01 ° C e assumiu-se o valor de temperatura de 273,16 K (para ser coerente com a escala Celsius),

$$P = \frac{610}{273,16}\,T = 2,23312\,T, \qquad P \text{ em Pa, } T \text{ em K e } T = T_C + 273,15.$$

O termômetro a gás é utilizado como padrão de calibração para todos os outros termômetros.

4.3 Expansão térmica nos sólidos

A experiência mostra que, quando um sólido é aquecido, seu comprimento ou qualquer outra dimensão linear aumenta. Se a variação de temperatura $\Delta\,T$ for pequena, a variação de comprimento é proporcional ao próprio comprimento e à variação da temperatura,

$$\Delta\,L = \alpha\,L_o\,\Delta\,T, \qquad \text{ou} \qquad L - L_o = \alpha\,L_o\,(T - T_o),$$

onde L_o é o comprimento na temperatura T_o e α é o coeficiente de dilatação térmica linear. Alguns valores desse coeficiente em ° C^{-1}:

- Alumínio: $2,4 \times 10^{-5}$.

- Cobre: $1,7 \times 10^{-5}$.
- Aço: $1,2 \times 10^{-5}$.
- Vidro: $0,4 - 0,9 \times 10^{-5}$.
- Quartzo: $0,04 \times 10^{-5}$.

Fenômenos semelhantes ocorrem para a expansão da superfície e do volume. Por exemplo, a expansão do volume ΔV é proporcional ao próprio volume e à variação da temperatura $\Delta\, T$,

$$\Delta\, V = \gamma\, V_o\, \Delta\, T, \qquad \text{ou} \qquad V - V_o = \gamma\, V_o\, (T - T_o),$$

onde V_o é o volume na temperatura T_o e γ é o coeficiente de dilatação térmica volumétrico. Alguns valores desse coeficiente em $^\circ$ C^{-1} para sólidos e líquidos:

- Alumínio: $7,2 \times 10^{-5}$.
- Cobre: $5,1 \times 10^{-5}$.
- Aço: $3,6 \times 10^{-5}$.
- Vidro: $1,2 - 2,7 \times 10^{-5}$.
- Quartzo: $0,12 \times 10^{-5}$.
- Etanol: 75×10^{-5}.
- Glicerina: 49×10^{-5}.
- Mercúrio: 18×10^{-5}.

O coeficiente de dilatação volumétrico está relacionado com o coeficiente de dilatação linear. Suponha um volume cúbico com aresta L_o e volume V_o na temperatura T_o. Ao variar a temperatura, o volume $V_o = L_o^3$ variará devido às variações dos comprimentos das arestas,

$$V = (L_o + \Delta\, L)^3 = L_o^3 + 3\, L_o^2\, \Delta\, L + 3\, L_o\, \Delta\, L^2 + \Delta\, L^3.$$

Sendo $\Delta\, L^2$ e $\Delta\, L^3$ muito pequenos e $L_o^3 = V_o$ fica:

$$V - V_o \approx 3\, L_o^2\, \Delta\, L.$$

Mas $\Delta\, L = \alpha\, L_o\, \Delta\, T$, logo

$$V - V_o \approx 3\, L_o^2\, \alpha\, L_o\, \Delta\, T \approx 3\alpha\, L_o^3\, \Delta\, T,$$

ou

$$\Delta V \approx 3\alpha\, V_o\, \Delta\, T.$$

Vemos portanto que $\gamma \approx 3\, \alpha$. Compare os valores apresentados anteriormente.

Exemplo

Estimemos a variação do volume de um frasco de vidro contendo 1 cm^3 de mercúrio (Hg) até a boca e submetido a uma variação $\Delta T = 100^o\text{C}$. Comparemos com a variação do volume do Hg. Considere $\alpha_{\text{vidro}} = 0,6 \times 10^{-5}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$ e $\gamma_{\text{Hg}} = 18 \times 10^{-5}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$.

Temos que

$$\gamma_{\text{vidro}} = 3\,\alpha_{\text{vidro}} = 3 \times 0,6 \times 10^{-5} = 1,8 \times 10^{-5}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$$

$$\therefore \Delta V_{\text{vidro}} = \gamma_{\text{vidro}}\, V_o\, \Delta\text{T} = 1,8 \times 10^{-5} \times 1 \times 100 = 1,8 \times 10^{-3}\,\text{cm}^3.$$

E para o mercúrio

$$\Delta V_{\text{Hg}} = \gamma_{\text{Hg}}\, V_o\, \Delta\text{T} = 18 \times 10^{-5} \times 1 \times 100 = 18 \times 10^{-3}\,\text{cm}^3.$$

Observe que ΔV_{Hg} é dez vezes maior que ΔV_{vidro}.

Considere agora que o excesso de volume do mercúrio preencha um tubo capilar com 0,1 mm de diâmetro na temperatura final. Determinemos o comprimento da coluna de mercúrio nesse tubo.

O excesso de volume vale $(18,0 - 1,8) \times 10^{-3} = 16,2 \times 10^{-3}$ cm.

O comprimento da coluna vale

$$l = V/A = \frac{V}{\frac{\pi\, d^2}{4}} = \frac{4\,V}{\pi\, d^2} = \frac{4 \times 16,2 \times 10^{-3}}{\pi \times (10^{-2})^2} = 206,26\,\text{cm}.$$

4.3.1 Tensões internas devido à dilatação térmica

Quando um corpo é aquecido por uma fonte de calor concentrada, uma chama por exemplo, normalmente isto ocorre de modo desigual. Uma região do corpo é mais aquecida do que outra região e não ocorre o equilíbrio térmico entre as diversas partes do corpo de modo imediato. Isso demora a ocorrer. Em outras palavras, a temperatura do corpo não é uniforme durante um certo intervalo de tempo.

A não uniformidade da temperatura produz dilatações térmicas desiguais nas diversas partes do corpo criando tensões internas. Se essas tensões atingirem a tensão máxima de ruptura característica do material, ocorre a quebra ou fratura. Isso é o que verificamos quando um prato de vidro comum é colocado diretamente sobre a chama do fogão. O vidro é mau condutor de calor e os pontos sobre a chama atingem altas temperaturas enquanto outros pontos ainda estão frios, gerando grandes tensões internas que acabam por quebrar o prato.

Por outro lado, se o aquecimento for gradual e uniforme, em um forno por exemplo, é possível elevar a temperatura até o ponto de fusão sem quebra.

Pode-se adicionar certas substâncias na formulação do vidro para aumentar a condutividade térmica de modo a tornar o vidro mais resistente à variação de temperatura. A temperatura tende a se uniformizar mais rapidamente de modo que as tensões internas não alcancem a tensão crítica.

4.4 Leis da termodinâmica

O comportamento termodinâmico da matéria é convenientemente descrito por três leis *experimentais* conhecidas como a "lei zero", a "primeira lei" e a "segunda lei" que não foram necessariamente descobertas cronologicamente nessa ordem.

4.4.1 A lei zero

Tomemos três corpos, A, B e C. Se o corpo A está em equilíbrio térmico com o corpo B e o corpo B está em equilíbrio térmico com o corpo C, *a experiência mostra* que o corpo A está em equilíbrio térmico com o corpo C. Essa lei pode parecer óbvia mas não tem nada de óbvio nessa afirmação. A natureza poderia ser diferente. Se uma pessoa A gosta da pessoa B e a pessoa B gosta da pessoa C, não podemos afirmar que a pessoa A gosta da pessoa C!

Se o corpo B for um termômetro que está em equilíbrio térmico com A e também está em equilíbrio térmico com C, concluiremos que a temperatura de A, indicada pelo termômetro, é igual à temperatura de C.

4.4.2 A primeira lei

A ideia de que o calor está relacionado a alguma forma de energia evoluiu lentamente nos séculos XVIII e XIX. Uma observação importante foi realizada durante o processo de fabricação de canhões. O processo de perfuração do tubo do canhão produzia um grande aquecimento, uma grande quantidade de calor que parecia não ter fim enquanto perdurasse o processo de perfuração.

A quantificação da transformação da energia mecânica em calor deve-se a Sir James Joule (1818 - 1889) que mediu a elevação da temperatura da água a partir de um processo de agitação mecânica, movimento de palhetas no interior de um recipiente com água e termicamente isolado. Ele verificou que o aumento da temperatura era proporcional ao trabalho mecânico executado para girar as palhetas utilizando corpos em queda na gravidade. O corpo em queda estava amarrado a um cordão que, através de roldanas, transformava o movimento de queda do corpo em movimento de giro de um eixo que movimentava as palhetas imersas na água.

Nessa época utilizava-se a *caloria* como unidade de medida do calor. A caloria é uma das unidades mais antigas empregada para a medida da quantidade de calor e corresponde à quantidade de calor necessária para elevar a temperatura de 1,0 g de água de 14,5 para 15,5 ^{o}C. Joule mostrou experimentalmente que 1 cal = 4,186 N m = 4,186 J.

O conceito atual de calor corresponde à forma de energia que é transferida de um corpo para outro até que o equilíbrio térmico se estabeleça. Uma certa quantidade de água pode ter sua temperatura elevada por contato com outro corpo mais quente (maior temperatura) ou pode também ter sua temperatura elevada da mesma forma se um trabalho mecânico for executado sobre essa mesma quantidade de água. Essencialmente, o que Joule mostrou foi que existe uma equivalência entre esses dois processos, ou seja, o equivalente mecânico do calor.

O trabalho mecânico pode ser executado de diversas formas sobre um sistema. Na forma de agitação mecânica (palhetas girando num líquido), fricção entre as partes e compressão.

Qualquer que seja o processo de transferência de energia para um sistema que resulte na variação da temperatura deste sistema, essa energia ficará armazenada em alguma forma de energia interna. A primeira lei da termodinâmica é a expressão da conservação da energia. Ela diz que a variação da energia interna de um sistema é igual à soma da quantidade de calor que entra no sistema com o trabalho executado sobre o sistema por um agente externo

$$\Delta E_i = Q + W. \tag{4.1}$$

Os processos termodinâmicos podem envolver apenas Q, apenas W ou os dois simultaneamente.

O calor específico

A elevação da temperatura de um corpo para uma determinada quantidade de calor absorvida pelo corpo depende da massa do corpo e das características do material do corpo. Verifica-se experimentalmente que a quantidade de calor necessária para elevar a temperatura do corpo é diretamente proporcional à massa e a à variação de temperatura ΔT desejada, quando essa variação é muito pequena.

$$\Delta Q \, \alpha \, m \, \Delta T \qquad \text{ou} \qquad \Delta Q = c \, m \, \Delta T, \qquad \Delta T \to 0.$$

A constante c

$$c = \frac{1}{m} \frac{d\,Q}{d\,T} \tag{4.2}$$

é chamada de calor específico e não é estritamente constante. Verifica-se experimentalmente uma pequena variação dependente da própria temperatura do corpo. Para a água, por exemplo, varia menos que 1 % de 0 - 100 ^{o}C. Adota-se o valor médio c = 4190 J/(kg K) nessa faixa de temperaturas. O valor padrão a 15 ^{o}C é c = 4186 J/(kg K).

Existem situações em que a entrada de calor em um corpo não produz variação de temperatura. Isso ocorre nos processos de mudança de fase, sólido para líquido e vice-versa, líquido para gás e vice-versa. A experiência mostra que um corpo sólido, ao ser gradualmente aquecido, tem sua temperatura elevada até o ponto em que começa a fundir. Por exemplo, um bloco de gelo retirado de um freezer a -20 ^{o}C e colocado no ambiente a 30 ^{o}C vai se esquentando até atingir 0 ^{o}C quando começa a derreter. Durante o processo de fusão a temperatura permanece constante enquanto o bloco absorve calor até que todo o material transforme-se em líquido. O gelo permanece a 0 ^{o}C enquanto derrete.

A quantidade de calor absorvida por unidade de massa nesse processo é denominada de calor latente de fusão L_f. Esse valor depende da substância utilizada. O mesmo ocorre no processo de vaporização e o calor absorvido por unidade de massa chama-se calor latente de vaporização L_v.

- Água: $L_f = 3,33 \times 10^5$ J/kg $\quad L_v = 2,26 \times 10^5$ J/kg
- Chumbo: $L_f = 2,45 \times 10^4$ J/kg $\quad L_v = 8,70 \times 10^5$ J/kg
- Prata: $L_f = 8,82 \times 10^4$ J/kg $\quad L_v = 2,33 \times 10^6$ J/kg
- Helio: $L_f = 5,23 \times 10^3$ J/kg $\quad L_v = 2,09 \times 10^4$ J/kg
- Oxigênio: $L_f = 1,38 \times 10^4$ J/kg $\quad L_v = 2,13 \times 10^5$ J/kg

Durante esses processos, a variação da energia interna está associada à mudança de estado. O calor absorvido é utilizado para transformar a substância de uma fase para outra fase. Nesses casos, a variação da energia interna não está associada à variação da temperatura.

Os processos termodinâmicos

O que chamamos de processo termodinâmico são os processos físicos que envolvem variação da energia interna, entrada ou saída de calor e trabalho executado sobre ou por um sistema físico.

Tomemos um gás ideal, regido pela equação dos gases perfeitos $PV = nRT$. Consideremos que esse gás esteja no interior de um cilindro com um pistão móvel. Se uma força $\mathbf{F}$ aplicada ao pistão o deslocar de modo a comprimir o gás, um trabalho $\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{l} = -PA\Delta l$ será executado sobre o gás. Variando o volume do gás de um valor V_1 a outro valor V_2 teremos um trabalho total

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P\, dV.$$

Considere que o sistema esteja isolado de modo que não exista nem entrada nem saída de calor. Teremos

$$\Delta E_i = -\int_{V_1}^{V_2} P\, dV.$$

O trabalho executado pelo agente externo contra a pressão do gás resulta na variação da energia interna. Para avaliar essa integral é necessário saber como a pressão se comporta durante a variação do volume, ou seja, necessitamos conhecer $P(V)$. Observe que a equação dos gases ideais relaciona P com V e T, $P = n\,R\,T/V$, contudo não sabemos como a temperatura se comporta uma vez que o sistema está isolado. Precisamos de uma informação adicional para reduzir a expressão da pressão apenas à dependência com o volume de modo que a integral possa ser calculada. Por enquanto não temos tal informação.

Em qualquer caso, o estado de um gás está definido pelos valores de P, V e T. Ou seja, um ponto no espaço tridimensional de eixos oP, oV e oT. Uma mudança de um estado 1 para um estado 2 corresponde a uma linha curva ou trajetória ligando os dois pontos correspondentes aos dois estados (Fig. 4.3).

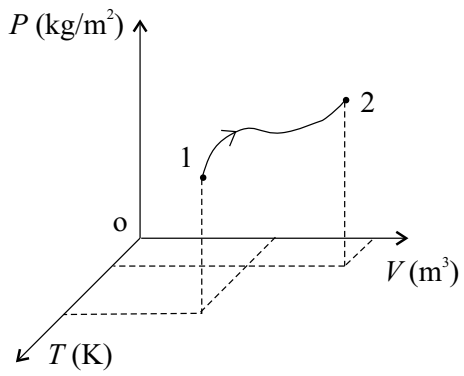

Figura 4.3: Evolução do estado de um gás de um estado 1 para um estado 2.

Essa trajetória nos indica como as variáveis estão mudando para ir de um estado a outro. A trajetória é definida pelo processo termodinâmico que leva um sistema de um estado a outro.

Para determinar o trabalho realizado pelo agente externo, basta utilizar a projeção dos pontos e da trajetória no plano $P\ V$ e calcular a área abaixo da curva (Fig. 4.4).

$$S = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV = -W, \qquad 1 = \text{estado inicial, } 2 = \text{estado final.}$$

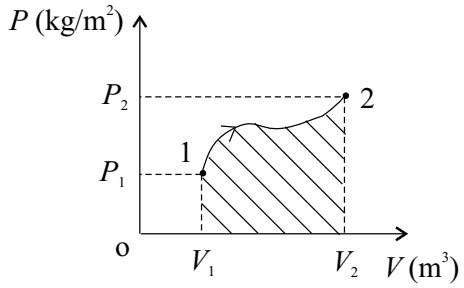

Figura 4.4: Trabalho executado por um gás para ir de um estado 1 para um estado 2. A área sobre a curva representa esse trabalho

Por exemplo, considere que um gás ideal seja comprimido por um pistão mantendo a temperatura constante. Isso pode ser obtido colocando o cilindro e o pistão em contato com um reservatório térmico a uma temperatura T. Um reservatório térmico é um meio tão grande e tão massivo que a entrada ou saída de calor finita nesse meio não altera praticamente sua temperatura (uma piscina de 100 m^3 de água a 25°C não altera praticamente sua temperatura quando entra uma pessoa a 36°C).

Uma vez que a temperatura foi mantida constante, a equação dos gases pode ser usada para avaliar a integral

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{n\,R\,T}{V}\,dV = -n\,R\,T\,\ln\frac{V_2}{V_1} = n\,R\,T\,\ln\frac{V_1}{V_2}.$$

Um outro processo possível seria representado a seguir (Fig. 4.5).

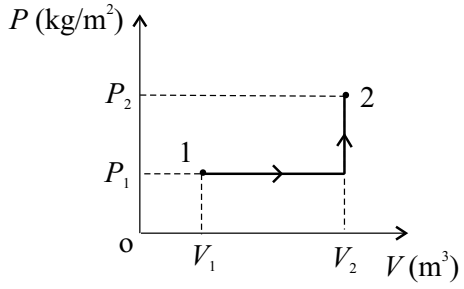

Figura 4.5: Trabalho executado por um gás para ir de um estado 1 para um estado 2 em um processo a pressão constante seguido por um processo a volume constante

Nesse processo temos uma trajetória horizontal com pressão constante (com trabalho diferente de zero) e uma trajetória vertical com volume constante (com trabalho nulo).

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} P\,dV = -P_1\int_{V_1}^{V_2} dV = -P_1(V_2 - V_1).$$

Não estamos, no momento, interessados em discutir as condições que levam a esse tipo de processo mas apenas calculando o trabalho associado a esse processo.

Vemos portanto que o trabalho executado é dependente dos valores inicial e final bem como da trajetória que liga os dois pontos. A trajetória que leva um estado a outro estado depende dos processos termodinâmicos envolvidos. Vejamos alguns deles:

1. Processo adiabático: processo em que não há troca de calor entre o sistema e suas vizinhanças, o sistema está termicamente isolado. Nesse processo $Q = 0$ e $\Delta E_i = W$. Isso pode ocorrer porque o sistema é perfeitamente isolado ou porque, apesar do sistema não ser isolado, o processo é tão rápido que não dá tempo para o calor se propagar antes do processo terminar. Dois exemplos evidenciam essa possibilidade: a produção da onda sonora na faixa audível com frequência mínima de aproximadamente 15 Hz produz uma compressão e rarefação do ar em um período de 1/15 s. O ar não é isolante perfeito mas a compressão e a rarefação ocorrem tão rapidamente que o calor não entra nem sai da massa de ar. A compressão rápida eleva a temperatura local e a rarefação rápida reduz a temperatura local de modo que o valor médio permanece constante. No segundo exemplo, em um motor Diesel o ar é comprimido rapidamente por um pistão em um cilindro e tem seu volume reduzido em até vinte vezes o que provoca um grande aumento da temperatura. A variação da energia interna devido ao trabalho executado é representada pelo aumento da temperatura. O óleo Diesel injetado sob essa condição se inflama e ocorre a queima produzindo gases em alta pressão e temperatura que ao expandir produz o trabalho mecânico desejado.

2. Processo isotérmico: processo em que a temperatura é mantida constante por contato com um reservatório térmico. Nesse caso, não há variação na energia interna, $\Delta E_i = 0$ e consequentemente $W = -Q$. O trabalho realizado sobre o sistema é transformado em calor que sai do sistema. Isso é o que ocorre quando um gás é comprimido lentamente por um pistão em um cilindro condutor (metálico) na temperatura ambiente. O diagrama $P \times V$ para um gás em expansão nessa condição é uma hipérbole $P \, \alpha \, 1/V$ (Fig. 4.6).

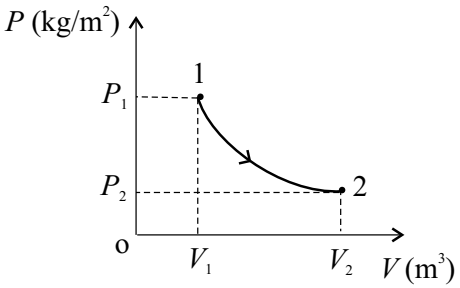

Figura 4.6: Diagrama $P \times V$ do processo de expansão isotérmica.

3. Processo isobárico: processo em que a pressão é mantida constante. Por exemplo, o gás é mantido comprimido pelo peso do próprio pistão. Se o gás for aquecido (entrada de calor) a temperatura e o volume aumentarão mantendo a pressão constante. Um trabalho $P_0 (V_f - V_i)$ será realizado pelo gás e $-P_0 (V_f - V_i)$ pelo agente externo (Fig. 4.7). Nesse processo $\Delta E_i = Q - P_0 (V_f - V_i)$.

4. Processo isocórico: processo em que o volume é mantido constante. Um gás aprisionado dentro de um botijão metálico e submetido ao aquecimento exemplifica esse

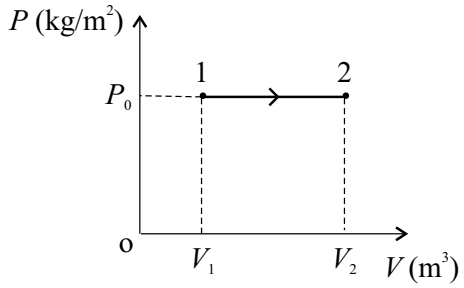

Figura 4.7: Diagrama $P \times V$ do processo isobárico.

processo. Como o volume permanece constante, não existe trabalho executado. Portanto, $\Delta E_i = Q$, ou seja, a variação da energia interna está apenas associada à transferência de calor.

5. Expansão livre: uma situação interessante é a chamada expansão livre de um gás. Considere um gás confinado em um recipiente em um compartimento separado por uma membrana. O recipiente está isolado do meio externo. No compartimento da esquerda, a pressão é P_0 e na direita a pressão é zero (Fig. 4.8). A energia interna está associada ao gás que está no lado esquerdo.

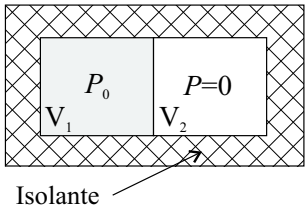

Figura 4.8: Expansão livre de um gás.

De repente, a membrana se rompe e o gás passa a ocupar todo o volume disponível $(V_1 + V_2)$. Nessa expansão não existe realização de trabalho, $W = 0$ e por isso é chamada de expansão livre. Como o sistema está isolado, também não há fluxo de calor, $Q = 0$. Portanto $\Delta E_i = 0$, ou seja, a energia interna permanece constante, não há variação de temperatura. Observe, contudo, que o estado mudou. A pressão diminuiu e o volume aumentou.

4.4.3 A segunda lei

Nossa discussão anterior foi baseada na primeira lei da termodinâmica $\Delta E_i = Q + W$ que é a expressão da conservação da energia. Em alguns processos estudados, o fluxo de calor pôde ocorrer para dentro ou para fora do sistema. Nos processos naturais, o calor flui do corpo quente para o corpo frio e nunca no sentido inverso mesmo que atenda a lei da conservação da energia. Além disso, alguns processos tem um sentido preferencial mesmo que não envolva transferência de calor como no caso da expansão livre de um gás. Em

todos esses casos dizemos que os processos são irreversíveis. Os processos tem um sentido preferencial.

A segunda lei da termodinâmica foi estabelecida por Rudolf Clausius (1822 - 1888) como: "O calor não flui espontaneamente de um corpo frio para um corpo quente".

Em 1885 ele apresentou uma nova variável associada ao estado de um sistema denominada de *entropia* e associou a variação dessa variável à sua formulação da segunda lei afirmando que nos processos naturais a entropia de um sistema tende sempre a aumentar.

Considere um processo físico em um gás e trajetórias que liguem dois estados do sistema, estado 1 e estado 2. Algumas dessas trajetórias podem ocorrer como processos naturais espontâneos, as trajetórias irreversíveis, enquanto outras não ocorrem espontaneamente. A variável entropia, por definição, só deve depender dos estados inicial e final do sistema e não depender da trajetória (processo) que leve o sistema a ir de um estado para o outro. Foi verificado que a integral

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

avaliada através de um processo *reversível* qualquer que ligue os dois estados possui essa propriedade.

A entropia foi então definida em 1865 de tal modo que sua variação correspondesse a essa integral.

$$\Delta S_{1-2} = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \tag{4.3}$$

Os processos naturais correspondem aos valores positivos dessa integral. A entropia final é sempre maior que a entropia inicial.

Posteriormente, verificou-se que a entropia é uma variável de estado associada ao grau de organização do sistema e que o aumento da entropia corresponde a um aumento da desordem. A evolução natural ou espontânea de um sistema corresponde a um aumento da desordem, ou seja, a um aumento da entropia.

A expansão livre de um gás é um bom exemplo de aumento da desordem sem variação da energia interna. Antes da expansão as moléculas do gás que ocupavam o primeiro recipiente estavam mais organizadas, a energia ocupava uma região menor do espaço. Após a expansão, essa mesma quantidade de energia ocupa uma região maior, as moléculas estão mais dispersas, mais desorganizadas. Essa é a tendência natural.

Exemplo

Um tubo cilíndrico, vertical, com a base fechada, possui raio 4,0 cm e 50,0 cm de altura e está cheio de ar a 20 °C e 1,0 atm. Um pistão de 50,0 kg é colocado no cilindro e deixa-se comprimir o ar sob o peso do pistão que desce até atingir uma altura h_1 enquanto a temperatura é mantida constante no valor inicial. Em seguida, aquece-se o ar o suficiente para o pistão retornar à altura inicial $h_0 = 50,0$ cm. Assumindo que o gás se comporta como gás ideal determinemos:

1. A altura h_1.

2. A temperatura que o gás deve atingir para retornar à altura inicial.

3. O calor transferido para dentro do sistema e o trabalho executado pelo agente externo em cada etapa do processo supondo que a energia interna do gás seja diretamente proporcional à temperatura, $E_i = a\,T$ (T expresso em kelvin).

Representemos as diversas etapas do processo (Fig. 4.9):

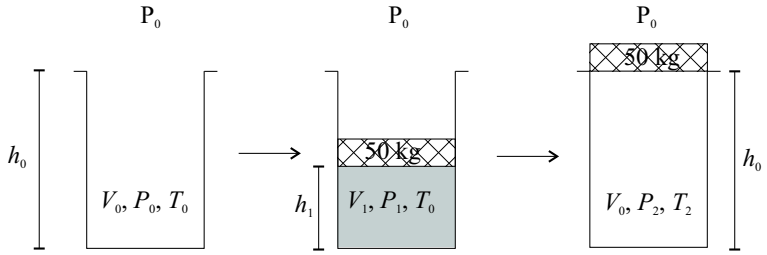

Figura 4.9: Exemplo de processo termodinâmico.

Na primeira etapa do processo o gás é comprimido a temperatura constante e da equação dos gases ideais $P\,V = n\,R\,T$ temos

$$P_0\,V_0 = P_1\,V_1 \qquad \therefore P_0\,h_0\,A = P_1\,h_1\,A \qquad \therefore h_1 = h_0\frac{P_0}{P_1}.$$

Contudo, a pressão P_1 é o resultado da pressão exercida pelo peso do pistão e a pressão atmosférica P_0 que atua em cima do pistão ($P_0 = 1$ atm $= 1,013 \times 10^5$ Pa),

$$P_1 = P_0 + \frac{m\,g}{A} \qquad \therefore P_1 = 1,013 \times 10^5 + \frac{50 \times 9,8}{\pi \times (0,04)^2} = 1,988 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

A altura h_1 vale então,

$$h_1 = 0,5\,\frac{1,013 \times 10^5}{1,988 \times 10^5} = 0,255 \text{ m}.$$

Na segunda etapa do processo, o gás é aquecido em um processo isobárico e da equação dos gases temos

$$\frac{P_1\,V_1}{T_0} = \frac{P_1\,V_0}{T_2} \qquad \therefore T_2 = T_0\,\frac{V_0}{V_1} = T_0\,\frac{h_0\,A}{h_1\,A} = 293,15\,\frac{0,5}{0,255} = 574,80 \text{ K} = 301,65\,^\circ\text{C}.$$

Determinemos a quantidade de calor que entra no sistema em cada etapa. Na primeira etapa, processo isotérmico, não ocorre variação da energia interna já que ela é proporcional à temperatura, $\Delta\,E_i = 0$. Portanto, $Q = -W$. Esse trabalho vale:

$$W = -\int_{V_0}^{V_1} P dV = -\int_{V_0}^{V_1} \frac{n\,R\,T_0}{V} dV = -nRT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{1}{V} dV = -nRT_0 \ln\frac{V_1}{V_0} = -nRT_0 \ln\frac{h_1}{h_0}.$$

Mas sabemos que $P_0\,V_0 = n\,R\,T_0$,

$$\therefore W = -P_0\,V_0\,\ln\frac{h_1}{h_0} = -1,013 \times 10^5 \times \pi \times (0,04)^2 \times 0,5 \times \ln\frac{0,255}{0,5} = 171,43 \text{ J}.$$

Portanto Q = - 171,43 J. O calor sai do gás para o meio ambiente.

Na segunda etapa do processo, processo isobárico, houve variação de temperatura, ou seja, variação na energia interna $\Delta E_i = a(T_2 - T_0)$. O trabalho nesse caso vale

$$W = -\int_{V_1}^{V_0} P_1\, dV = -P_1 \int_{V_1}^{V_0} dV = P_1\,(V_1 - V_0) = P_1\,(h_1 - h_0)\,A$$

O calor que entra no sistema vale

$$Q = -W + \Delta E_i = -P_1\,(h_1 - h_0)\,A + a(T_2 - T_0) =$$

$$Q = 1,988 \times 10^5\,(0,5 - 0,255)\,\pi\,(0,04)^2 + a(547,80 - 293,15) = 244,82 + a \times 254,65 \text{ J}.$$

A determinação final depende do valor da constante a. Em todo o caso, sendo positivo o valor dessa constante, vemos que o calor é positivo. Portanto, o calor entra no gás como é esperado.

4.5 O calor específico de um gás ideal

Se tomarmos um gás no interior de um recipiente fechado e o submetermos a um processo de aquecimento introduzindo uma certa quantidade de calor ΔQ, verificaremos uma elevação da temperatura ΔT. A quantidade de calor necessária para produzir essa elevação de temperatura depende da quantidade de massa especificada pelo número de moles bem como do incremento de temperatura. O calor específico molar a volume constante é definido como a constante de proporcionalidade entre essas grandezas,

$$dQ = C_V\, n\, dT.$$

Observe que na condição de volume constante não existe expansão do gás e o trabalho executado pelo gás é nulo, $W_{\text{gás}} = 0$ bem como o trabalho executado pelo agente externo, $W = -W_{\text{gás}} = 0$. Como

$$\Delta E_i = W + Q, \qquad \therefore\ \Delta E_i = 0 + \int_{T_i}^{T_f} C_V\, n\, dT.$$

Se a variação de temperatura não for muito muito grande, a experiência mostra que $C_V \approx$ constante e

$$\Delta E_i = C_V\, n\, \Delta T.$$

Consideremos agora a situação em que a pressão do gás seja mantida constante, por exemplo, um gás em um cilindro com um pistão móvel com um determinado peso. Nesse caso, a introdução de calor ocasiona a expansão do gás havendo realização de trabalho,

$$dW_{\text{gás}} = P\, dV.$$

Se o gás tem comportamento de gás ideal, $P\,V = n\,R\,T$ e $dP = 0$, temos

$$P\, dV = n\, R\, dT$$

e

$$dW_{\text{gás}} = n\, R\, dT, \qquad \therefore\ W_{\text{gás}} = n\, R\, \Delta T \quad \text{e} \quad W = -\,n\, R\, \Delta T.$$

A entrada de calor no gás a pressão constante também produz elevação de temperatura, sendo possível definir um calor específico a pressão constante como

$$dQ' = C_P\, n\, dT, \qquad \therefore\ Q' = C_P\, n\Delta T,$$

considerando o fato experimental que C_P é constante para variações de temperaturas não muito grandes.

Para uma variação de temperatura dT, a experiência mostra que a quantidade de calor dQ' no processo a pressão constante é maior que a quantidade de calor dQ no processo a volume constante, o que equivale dizer que $C_P > C_V$. Vejamos alguns gases (Tab. 4.1):

	C_V	C_P	$C_P - C_V$	$\gamma = C_P/C_V$
He e Ar	12,47	20,78	8,31	1,67
H_2	20,42	28,74	8,32	1,41
N_2	20,76	28,74	8,32	1,40
O_2	20,85	29,17	8,31	1,40
CO_2	28,46	36,94	8,48	1,30

Tabela 4.1: Calores específicos (J/(mol K) de gases.

Como $\Delta E_i = Q + W$, podemos escrever

$$\Delta E_i = C_P\, n\, \Delta T - n\, R\, \Delta T.$$

Contudo, para uma mesma variação de temperatura ΔT tínhamos que $\Delta E_i = n\, C_V\, \Delta T$. Então,

$$n\, C_V\, \Delta T = n\, C_P\, \Delta T - n\, R\, \Delta T$$

$$\therefore\ C_P - C_V = R \tag{4.4}$$

e a razão

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V}. \tag{4.5}$$

De acordo com os dados da tabela, para os gases monoatômicos He e Ar $C_P/C_V = 1{,}67$. Portanto

$$1,67 = 1 + \frac{R}{C_V} \qquad \therefore\ C_V \approx \frac{3}{2}R$$

e

$$C_P = C_V + R \approx \frac{5}{2}R.$$

4.5.1 Processo adiabático e calor específico

Procuremos encontrar uma relação entre o volume e a pressão em um processo adiabático: Sabemos que nesse processo $\Delta E_i = W$ ou em termos infinitesimais $d(\Delta E_i) = dW$.

Portanto,

$$n\, C_V\, dT = -P\, dV.$$

Mas, $P\, V = n\, R\, T$

$$\therefore\ n\, C_V\, dT = -\frac{n\, R\, T}{V}\, dV$$

e substituindo a equação (4.5)

$$\frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_V}\,\frac{dV}{V} = -(\gamma - 1)\frac{dV}{V}\,.$$

Integrando temos

$$\ln T = -(\gamma - 1)\,\ln V + \text{cte'} \qquad \therefore\ \ln T + \ln V^{(\gamma-1)} = \text{cte'}$$

$$\therefore T\,V^{(\gamma-1)} = \text{cte.}$$

Se quisermos expressar em função da pressão com $T = P\,V/(n\,R)$ fica

$$\frac{P\,V}{n\,R}V^{(\gamma-1)} = \text{cte}$$

ou

$$\frac{P\,V^{\gamma}}{n} = \text{cte.} \tag{4.6}$$

4.6 A teoria cinética dos gases

Essa teoria é uma tentativa de descrição do comportamento macroscópico de um gás representado pela equação empírica para os gases ideais $P\,V = n\,R\,T$ (ou $P\,V = N\,k_B\,T$, $k_B = R/N_A$, onde N é a quantidade de moléculas e N_A é o número de Avogadro) a partir de um modelo microscópico para o comportamento das moléculas do gás. Baseia-se em algumas hipóteses:

1. Em qualquer amostra de um gás, a quantidade de moléculas é muito grande e a distância média entre moléculas é muito maior que o tamanho da própria molécula (modelo pontual).

2. Individualmente, cada molécula obedece às leis da mecânica (equações de Newton) e pode possuir qualquer valor de velocidade entre zero e infinito.

3. As moléculas colidem umas com as outras e com as paredes do recipiente de modo elástico e com forças de curto alcance. As interações só ocorrem quando as distâncias são muito pequenas, da ordem do próprio tamanho atômico ou molecular.

4. Todas as moléculas podem ser consideradas iguais entre si, não há como distingui-las, são idênticas.

Se tomarmos um recipiente cúbico, de lado d e considerarmos o movimento molecular com componente ao longo do eixo ox, essas hipóteses nos levarão a concluir que a força média devida aos choques das moléculas com uma parede perpendicular a esse eixo vale

$$F = \frac{m}{d}\,N\,\overline{v_x^2}$$

onde m é a massa molecular, N é a quantidade de moléculas no recipiente e $\overline{v_x^2}$ é o valor médio do quadrado do módulo da componente da velocidade na direção do eixo ox.

Para mostrar essa expressão estimemos a força que uma molécula que se move para a direita com velocidade v_x exerce sobre a parede ao se chocar. Essa força é igual à variação da

quantidade de movimento da molécula no intervalo de tempo entre dois choques sucessivos $F = \Delta p_x/\Delta t$. A variação da quantidade de movimento vale $2\,m\,v_x$ e o intervalo de tempo para uma molécula sair de uma face do cubo, ir até a outra face oposta e retornar vale $2\,d\,/v_x$. Então

$$F_{\text{choque de uma molécula}} = \frac{2\,m\,v_x}{2\,d\,/\,v_x} = \frac{m\,v_x^2}{d}.$$

Mas existem N moléculas com diversas velocidades v_x de modo que a força média exercida será

$$F = \overline{N\,\frac{m\,v_x^2}{d}} = N\,\frac{m}{d}\,\overline{v_x^2}.$$

Considerando que uma molécula pode ter velocidade em qualquer direção com a mesma probabilidade e que o módulo da velocidade vale $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ temos:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \qquad \text{e} \qquad \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

$$\therefore\, \overline{v^2} = 3\,\overline{v_x^2}.$$

Então

$$F = \frac{m}{d}\,N\,\frac{\overline{v^2}}{3}$$

e a pressão na parede será

$$P = \frac{F}{d^2} = \frac{m}{d^3}\frac{N}{3}\overline{v^2} = \frac{1}{3}\frac{N}{V}\,m\,\overline{v^2} = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\,\frac{m\,\overline{v^2}}{2}.$$

Ou seja, a pressão está relacionada com a energia cinética média das moléculas.

Também podemos escrever

$$P\,V = \frac{2}{3}N\,\frac{m\,\overline{v^2}}{2}$$

e se compararmos com a equação dos gases ideais $P\,V = N\,k_B\,T$ temos que

$$k_B\,T = \frac{2}{3}\,\frac{m\,\overline{v^2}}{2},$$

ou seja, a temperatura está associada com a energia cinética média *de uma molécula* do gás,

$$\frac{m\,\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}k_B\,T. \tag{4.7}$$

Como

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3\overline{v_i^2}$$

temos que

$$\frac{m\,\overline{(v_i)^2}}{2} = \frac{1}{2}k_B\,T. \tag{4.8}$$

Ou seja, cada grau de liberdade do movimento da molécula tem uma energia associada a $1/2\,k_B\,T$. Falamos então na energia média por grau de liberdade.

Essa teoria funciona bem para os gases monoatômicos onde a energia média está associada apenas à energia cinética de translação. Nos gases moleculares (com mais de um átomo) outras formas de energias estão presentes como a energia de vibração e a energia de rotação. Contudo, a energia total de cada molécula ainda é proporcional à temperatura.

4.6.1 Distribuição de velocidades em um gás

Em qualquer amostra macroscópica de um gás, a quantidade de átomos é enorme. As velocidades de translação no processo de agitação térmica vão de valores muito baixos até valores tão altos como milhares de metros por segundo e pode-se encontrar qualquer valor de velocidade no interior dessa faixa de maneira praticamente contínua. Em outras palavras, existe uma distribuição N_v (número de partículas por intervalo de velocidades) que representa uma determinada quantidade ΔN de átomos ou de moléculas em uma pequena faixa de velocidades entre v e $v + \Delta v$. Essa distribuição N_v, definida de tal forma que

$$\Delta N = N_v \, \Delta v, \qquad \Delta v \to 0,$$

foi desenvolvida por James Clerk Maxwell em 1860 e verificada experimentalmente com precisão 60 anos depois. Tem o aspecto da figura (Fig. 4.10) para uma determinada temperatura.

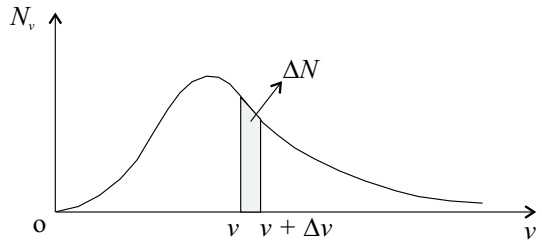

Figura 4.10: Distribuição de velocidades em um gás a uma temperatura T.

ΔN corresponde à área sob a curva entre v e $v + \Delta v$ e a área total com velocidades entre zero e infinito é o número total de partículas N na amostra do gás.

A expressão de N_v é

$$N_v = 4 \, \pi \, N \left(\frac{m}{2 \, \pi \, k_B \, T} \right)^{3/2} v^2 \, e^{-\frac{m \, v^2}{2 \, k_B \, T}},$$

chamada de distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

A probabilidade de encontrar um grupo de partículas com velocidade entre v e $v + \Delta v$ é dada pela fração $\Delta N / N$.

$$Prob = \frac{\Delta N}{N} = \frac{N_v \, \Delta v}{N}.$$

Com essa probabilidade podemos calcular a velocidade quadrática média, $\sqrt{\overline{v^2}}$, e determinar a energia cinética média de uma molécula. Encontra-se

$$\sqrt{\overline{v^2}} \approx 1,73 \sqrt{\frac{k_B \, T}{m}} \qquad \therefore \; \overline{v^2} \approx 1,73^2 \, \frac{k_B \, T}{m}$$

e

$$\frac{1}{2} \, m \, \overline{v^2} \approx \frac{1,73^2}{2} \, k_B \, T \approx \frac{3}{2} \, k_B \, T \, ! \tag{4.9}$$

4.7 Máquinas térmicas

Denominamos de máquina a qualquer dispositivo capaz de transformar uma forma de energia ou trabalho em outra forma de energia ou trabalho.

A máquina térmica é aquela que transforma energia interna em outra forma de energia ou trabalho que sejam úteis através de processos térmicos (com troca de calor). Por exemplo, em uma máquina a vapor, a energia interna do combustível é liberada pela queima, aquecendo a água e transformando-a em vapor a alta pressão que desloca um pistão e realiza um trabalho mecânico. Porém, a experiência mostra que nem toda energia é convertida em trabalho mecânico, parte da energia proveniente da queima do combustível é transformada em calor que sai da máquina junto com o vapor de exaustão.

Podemos representar a máquina térmica pelo seguinte diagrama (Fig. 4.11):

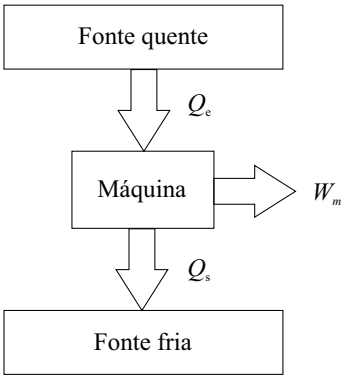

Figura 4.11: Diagrama de uma máquina térmica.

Nesse diagrama,

- Q_e é o calor que entra na máquina;
- W_m é o trabalho executado pela máquina;
- Q_s é o calor que sai da máquina;

e

$$Q_e = W_m + Q_s.$$

A eficiência ou rendimento da máquina é definida como a razão entre o trabalho realizado pela máquina e o calor que entra na máquina,

$$e = \frac{W_m}{Q_e} = \frac{Q_e - Q_s}{Q_e} = 1 - \frac{Q_s}{Q_e}. \tag{4.10}$$

Portanto, quanto menor for o calor que sai da máquina maior será a eficiência. A experiência mostra que a eficiência de uma máquina térmica é sempre menor que a unidade.

O que se pergunta é: qual é a máxima eficiência que uma máquina térmica pode ter? de que depende tal eficiência? A resposta a essa pergunta foi dada por Sadi Carnot em 1824 para uma máquina cíclica teórica conhecida como a máquina de Carnot.

Uma máquina cíclica é aquela que, em sua operação ou processo, inicia em um ponto no espaço que define o estado termodinâmico, percorre uma trajetória nesse espaço e retorna ao ponto de partida. Por exemplo, um gás confinado em um cilindro com um pistão (sem vazamento) que pode comprimir-se ou expandir-se à vontade por um agente externo de modo que possa partir de um estado P_0, T_0, V_0, ir a outro estado P_1, T_1, V_1 por uma trajetória e retornar a P_0, T_0, V_0 por outra trajetória.

Carnot mostrou que a máxima eficiência pode ser obtida realizando dois processos isotérmicos e dois processos adiabáticos reversíveis e encontrou que

$$e = 1 - \frac{Q_s}{Q_e} = 1 - \frac{T_f}{T_q} \tag{4.11}$$

onde T_f é a temperatura absoluta da fonte fria e T_q é a temperatura absoluta da fonte quente. Ou seja, a eficiência dessa máquina térmica depende apenas das temperaturas das fontes quente e fria. Para obtermos alta eficiência a diferença entre as temperaturas das fontes deve ser a maior possível. Por esse motivo, as turbinas a vapor e os motores de combustão interna trabalham com altas temperaturas (até onde é tecnologicamente possível) já que a fonte fria está limitada pela temperatura ambiente (≈ 290 K).

Vejamos agora como Carnot idealizou sua máquina:

O ciclo de Carnot

O ciclo de Carnot em um gás ideal consiste em uma compressão isotérmica, uma compressão adiabática, uma expansão isotérmica e finalmente outra expansão adiabática voltando ao ponto de partida (Fig. 4.12).

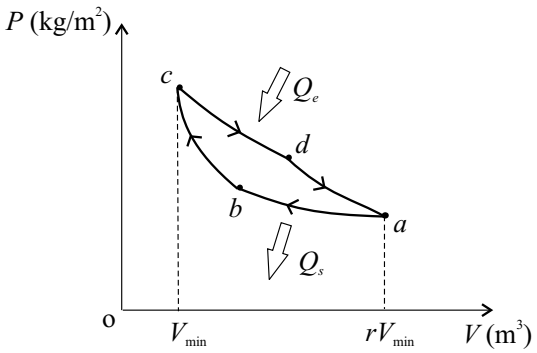

Figura 4.12: Ciclo de Carnot.

Com esse ciclo, Carnot maximizou a área no interior da curva realizando o máximo trabalho possível da máquina. Essa maximização está baseada no fato da curva adiabática possuir maior inclinação que a curva isotérmica para uma mesma temperatura.

Um gás ideal é inicialmente comprimido em um processo isotérmico do ponto a ao ponto b como mostrado no diagrama $P \times V$. Nessa compressão, uma quantidade de calor Q_s sai do sistema enquanto é mantido na temperatura fria T_f. O trabalho realizado sobre o sistema vale:

$$W_{a-b} = -\int_{V_a}^{V_b} P\,dV = -\int_{V_a}^{V_b} \frac{n\,R\,T}{V}\,dV = n\,R\,T_f\,\ln\frac{V_a}{V_b}$$

mas

$$Q = -Q_s = -W_{\text{a - b}} = -n\,R\,T_f\,\ln\frac{V_a}{V_b}. \tag{4.12}$$

Em seguida é realizada uma compressão adiabática de b para c elevando a temperatura até a temperatura da fonte quente T_q. Nesse processo, a variação de temperatura deve ser tal que $T\,V^{(\gamma-1)} = \text{cte}$. Então

$$T_f\,V_b^{(\gamma-1)} = T_q\,V_c^{(\gamma-1)}. \tag{4.13}$$

Depois é realizada uma expansão isotérmica na temperatura T_q do ponto c para o ponto d com absorção de calor e uma quantidade de calor Q_e entra no sistema:

$$Q = Q_e = -W_{c-d} = -n\,R\,T_q\,\ln\frac{V_c}{V_d}. \tag{4.14}$$

Finalmente é realizada uma expansão adiabática do ponto d para o ponto a tal que

$$T_q\,V_d^{(\gamma-1)} = T_f\,V_a^{(\gamma-1)}. \tag{4.15}$$

Das equações (4.12) e (4.14) temos:

$$\frac{Q_s}{Q_e} = -\frac{\ln\frac{V_a}{V_b}}{\ln\frac{V_c}{V_d}}\,\frac{T_f}{T_q}. \tag{4.16}$$

E das equações (4.13) e (4.15) temos:

$$\frac{V_d}{V_c} = \frac{V_a}{V_b}. \tag{4.17}$$

Então

$$\frac{Q_s}{Q_e} = \frac{T_f}{T_q} \tag{4.18}$$

e

$$e = 1 - \frac{Q_s}{Q_e} = 1 - \frac{T_f}{T_q}. \tag{4.19}$$

4.7.1 Máquinas de combustão interna

São máquinas térmicas em que o combustível é queimado no interior da máquina produzindo elevação da temperatura e conversão da energia interna em trabalho. Essas máquinas funcionam em regime cíclico, partindo e voltando ao mesmo ponto no diagrama $P \times V$. Contudo, a substância de trabalho (combustível mais ar) é trocada durante o processo mas a quantidade de massa que entra é igual à quantidade de massa que sai. Destacam-se as máquinas baseadas no ciclo Otto e no ciclo Diesel.

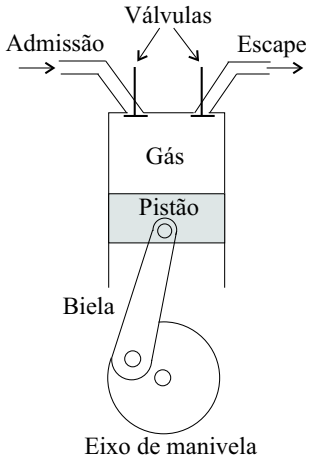

Figura 4.13: Motor de combustão interna.

Ciclo Otto

É o ciclo utilizado nos motores a gasolina, álcool e gás natural e consiste em quatro fases distintas correspondentes ao movimento de um pistão no interior de um cilindro que contém duas válvulas em um dos seus extremos mostrado esquematicamente na figura (Fig. 4.13).

Iniciemos o ciclo com o pistão em sua posição mais alta (ponto morto superior). Na primeira fase, fase de admissão, o pistão desce puxado pela *biela* que está conectada a um *eixo de manivela* e a medida que desce, aspira a mistura ar-combustível pelo duto de admissão, passando pela válvula de admissão que encontra-se aberta nessa fase (Fig. 4.14).

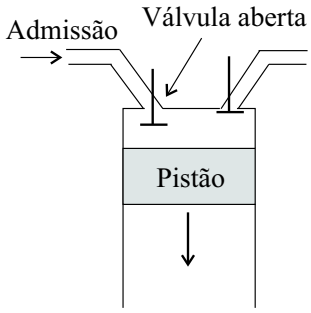

Figura 4.14: Fase de admissão no motor de combustão interna.

O volume no interior do cilindro varia do valor mínimo $V_{\min}$ ao valor máximo $V_{\max} = r\,V_{\min}$ (usualmente r entre 8 e 10) quando o pistão chega no ponto morto inferior. Ao chegar nesse ponto, a válvula de admissão é fechada e começa a fase de compressão do gás com a subida do pistão empurrado pelo eixo de manivela através da biela (Fig. 4.15).

A redução rápida do volume ocorre de modo adiabático com elevação da pressão e da

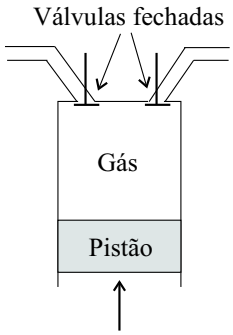

Figura 4.15: Fase de compressão no motor de combustão interna.

temperatura correspondendo à trajetória do ponto a ao ponto b no diagrama da figura (Fig. 4.16).

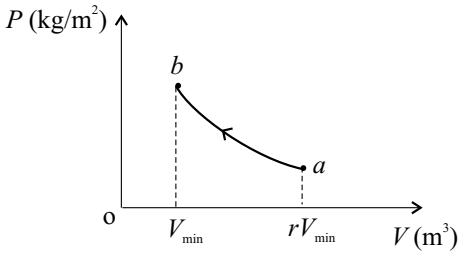

Figura 4.16: Compressão adiabática na fase de compressão do motor.

No término da compressão, quando atinge quase o volume mínimo, uma centelha produzida na *vela de ignição* inicia a queima do combustível e ocorre uma elevação da temperatura e da pressão a volume constante, trajetória do ponto b ao ponto c no diagrama da figura (Fig. 4.17). Uma quantidade de calor Q_e proveniente da queima entra no ar aquecendo-o.

Começa então a fase de expansão ou fase de potência em que os gases quentes em alta pressão empurram o pistão para baixo num processo de expansão adiabática (Fig. 4.18) correspondente à trajetória do ponto c ao ponto d no diagrama da figura (Fig. 4.19). Nessa fase, os gases quentes em expansão realizam trabalho ao empurrar o pistão. Parte desse trabalho é convertido em energia cinética de rotação em um volante (massa rotativa) pelo eixo de manivela. Outra parte do trabalho é fornecida pelo motor como trabalho útil no eixo do motor (para movimentar o veículo por exemplo).

Quando o pistão chega em baixo (ponto morto inferior) a válvula de exaustão é aberta e a pressão cai para a pressão atmosférica, ponto d ao ponto a no diagrama da figura (Fig. 4.20) com a saída parcial dos gases queimados. É o início da fase de exaustão.

O pistão volta a subir (Fig. 4.21), empurrado pelo eixo de manivela através da biela, expelindo o restante dos gases queimados pelo duto de exaustão, até atingir novamente o topo (ponto morto superior) quando a válvula de exaustão é fechada. A partir desse ponto recomeça um novo ciclo.

Nota: O movimento de sobe e desce do pistão nas diversas fases do ciclo é feito às custas da energia cinética de rotação acumulada no volante com exceção da fase de expansão onde

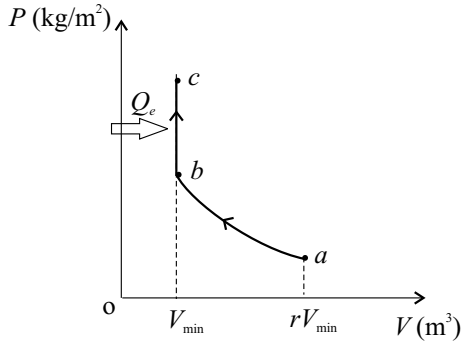

Figura 4.17: Queima a volume constante no motor.

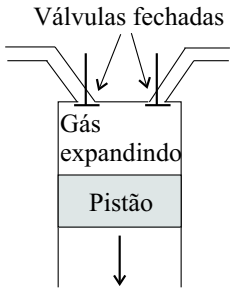

Figura 4.18: Expansão do gás queimado no motor.

essa energia é produzida. Isso corresponde ao motor em funcionamento contínuo. Para iniciar o funcionamento do motor a partir do repouso é necessário a interferência de um agente externo para fornecer a energia cinética inicial. Isso normalmente é feito por um *motor de arranque* que movimenta-se às custas de alguma outra forma de energia, por exemplo, energia elétrica acumulada em uma bateria ou energia química vinda dos alimentos quando uma pessoa aciona manualmente o motor.

O rendimento do ciclo Otto ideal (baseado no gás ideal) é dado por

$$e = 1 - \frac{1}{r^{\gamma-1}}. \tag{4.20}$$

Sendo r entre 8 e 10 e $\gamma \approx 1,4$. Para $r = 8$ temos $e \approx 56\%$.

Na prática, obtém-se $e \approx 35\%$ devido a uma série de fatores como condução térmica das paredes, queima incompleta, gás não ideal etc.

Ciclo Diesel

Nesse ciclo, durante a fase de admissão, só é admitido ar sem combustível. Durante a fase de compressão adiabática o volume é reduzido de quinze a vinte vezes ($r = 15 - 20$) o que faz a temperatura e a pressão atingirem valores muito altos, maiores que no ciclo Otto. Terminada a compressão, o combustível começa a ser injetado aos poucos ao mesmo tempo que o pistão começa a descer e a queima se dá a pressão aproximadamente constante

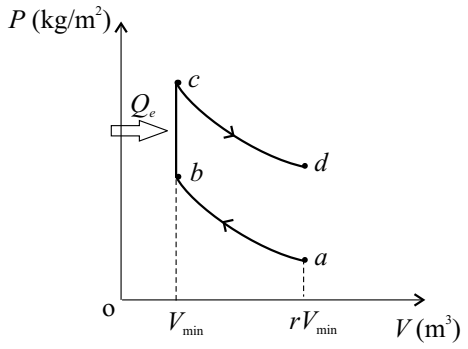

Figura 4.19: Expansão adiabática no motor.

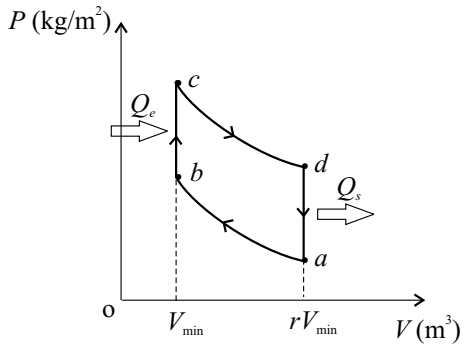

Figura 4.20: Exaustão com a saída de calor no motor.

durante um certo aumento de volume. Em seguida vem a fase de expansão adiabática e o ciclo se completa como no ciclo Otto (Fig. 4.22).

A eficiência desse ciclo no caso ideal vale $e = 65\% - 70\%$ e no caso real é menor, porém maior que a do ciclo Otto.

4.7.2 Máquina de refrigeração

Como vimos anteriormente, os motores são máquinas térmicas cuja finalidade é produzir trabalho mecânico a partir da conversão parcial do calor fornecido por uma fonte quente e cuja sobra de calor dirige-se para uma fonte fria. O parâmetro de interesse no caso do motor foi definido como a razão entre o trabalho mecânico produzido e a quantidade de calor que entrou na máquina e foi chamado de eficiência justamente por medir o aproveitamento da energia no processo de conversão ($e = W_m/Q_e$).

Consideremos agora uma máquina térmica que funciona de modo oposto, o refrigerador. O interesse dessa máquina é retirar calor de uma fonte fria e levá-lo para uma fonte quente, contrariando a tendência natural do fluxo de calor que é ir da fonte quente para a fonte fria.

Essa retirada de calor da fonte fria é feita às custas de um trabalho mecânico W realizado por um agente externo sobre a máquina e o processo é representado na figura (Fig. 4.23).

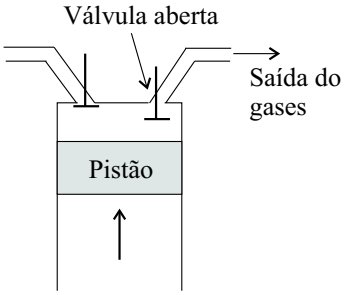

Figura 4.21: Fase de exaustão com a saída dos gases e calor no motor.

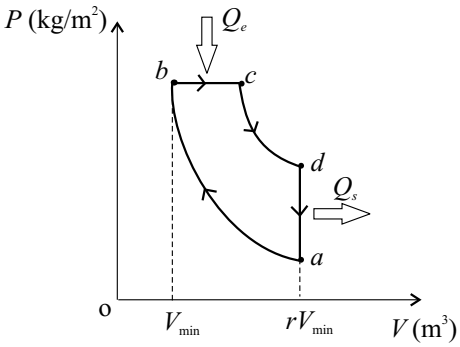

Figura 4.22: Diagrama $P \times V$ no ciclo Diesel.

Nesse diagrama temos:

- Q_s é o calor que sai da máquina,
- Q_e é o calor que entra na máquina,
- W é o trabalho executado sobre a máquina por um agente externo e

$$Q_s = Q_e + W.$$

Na máquina de refrigeração, o parâmetro importante é o coeficiente de performance K_p definido como a razão entre a quantidade de calor retirada da fonte fria (e que entra na máquina) e o trabalho executado pelo agente externo sobre a máquina para retirá-lo.

$$K_p = \frac{Q_e}{W}.$$

Com essa definição, quanto menor for o trabalho executado pelo agente externo para transferir o calor da fonte fria para a fonte quente, maior será este coeficiente.

Um processo muito utilizado para retirar calor de um reservatório térmico a uma temperatura T, consiste em forçar a vaporização de um líquido em contato com o reservatório através da redução da pressão. Considere, por exemplo, uma substância que se encontre no estado líquido à temperatura ambiente (300 K) e na pressão atmosférica. O álcool etílico, a

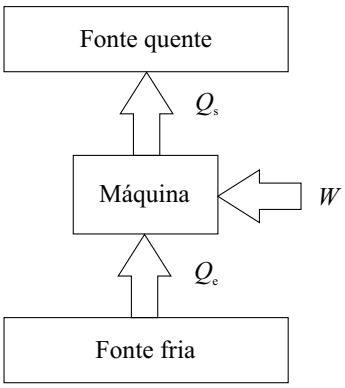

Figura 4.23: Representação da máquina de refrigeração.

acetona, o éter e o freon R11 são bons exemplos (na verdade, alguns desses líquidos estão a uma pressão pouco maior que a atmosférica em um recipiente fechado nessa temperatura). Se colocarmos essa substância no interior de um cilindro com um pistão e puxarmos o pistão de modo a aumentar o volume no interior do cilindro e reduzir a pressão (que era igual à pressão atmosférica), o líquido entrará em ebulição nessa temperatura T, vaporizando-se às custas do calor fornecido pelo reservatório térmico. O reservatório cederá a quantidade de calor (igual ao calor de vaporização) para vaporizar a quantidade de líquido que se encontrava no interior do cilindro.

Normalmente, as substâncias utilizadas se encontram no estado líquido na temperatura T e pressão P que não são necessariamente iguais à temperatura ambiente e pressão atmosférica padrão. Por exemplo, o gás butano e o freon R12 se encontram no estado líquido na temperatura ambiente numa pressão muito maior que a pressão atmosférica padrão. Nesse caso, a redução da pressão para valores próximos da pressão atmosférica já provoca a vaporização e a retirada de calor do reservatório térmico.

Considere agora a seguinte situação: a substância líquida encontra-se em contato com um corpo à temperatura T mas esse corpo não é um reservatório térmico ou, numa situação mais próxima da realidade, o cilindro com pistão que contém a substância líquida encontra-se em contato com um corpo à temperatura T que não é um reservatório térmico (Fig. 4.24).

Puxamos então o pistão para cima de modo a reduzir a pressão e vaporizar o líquido. O corpo cede calor ao líquido e, como ele não é um reservatório térmico, sua própria temperatura diminui, juntamente com a temperatura do líquido até que uma nova situação de equilíbrio se estabeleça em uma nova temperatura T' e pressão P' menores que as anteriores. Se continuarmos a puxar o pistão, o processo continuará até que todo o líquido tenha vaporizado e eventualmente passaremos a ter apenas a expansão de um gás.

No processo que descrevemos, a vaporização do líquido foi utilizada para reduzir a temperatura do corpo e isso é o que é feito nos refrigeradores domésticos e industriais. Vejamos o funcionamento de um refrigerador em mais detalhes;

Iniciemos com um recipiente contendo uma substância no estado líquido na temperatura ambiente e em alta pressão (Freon, amônia, etc.) Esse recipiente está conectado a uma "válvula de expansão"que permite a saída do líquido se a pressão externa for menor que a

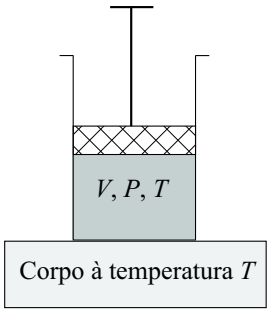

Figura 4.24: Cilindro com pistão móvel contendo líquido refrigerante e em contato térmico com um corpo na temperatura T.

pressão no líquido por um certo valor pré-ajustado. Essa válvula usualmente consiste em um orifício circular tampado por um pistão cônico que é pressionado por uma mola. A mola empurra o pistão contra o orifício exercendo uma pressão de contato que, se for excedida, permite a passagem do líquido.

A saída da válvula de expansão conecta-se a uma serpentina chamada de evaporador que encontra-se no interior de uma caixa termicamente isolada (Fig. 4.25).

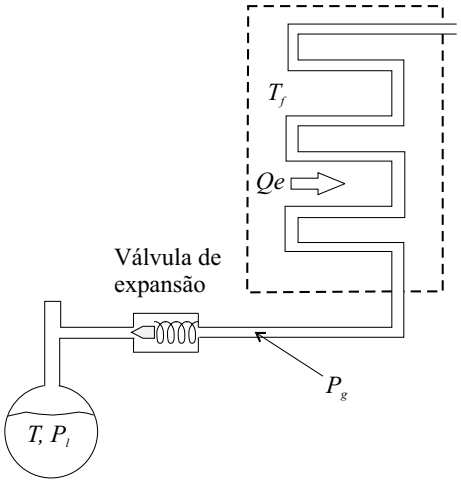

Figura 4.25: Sistema de evaporação em um refrigerador.

O interior do evaporador encontra-se a uma pressão P_g mais baixa que a pressão P_l no líquido no recipiente e é nesse local que o líquido vaporiza absorvendo calor do interior do ambiente isolado reduzindo a temperatura.

Esse gás é levado a um compressor que o comprime no interior de uma outra serpentina mantida na temperatura ambiente até que seja liquefeito ocorrendo liberação de calor para o ambiente. O processo recomeça então de forma cíclica (Fig. 4.26).

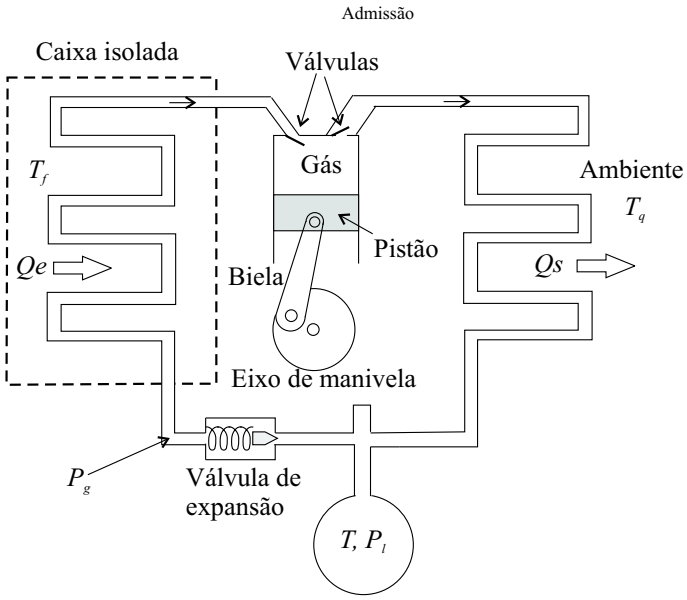

Figura 4.26: Sistema de refrigeração.

4.8 Cálculos das eficiências

Nessa seção demonstraremos e compararemos as eficiências de algumas máquinas cíclicas.

Máquina 1

Iniciaremos mostrando que a máquina térmica cíclica composta por dois processos isobáricos e dois processos adiabáticos tem eficiência menor que a máquina de Carnot.

Tomemos o diagrama da figura (4.27).

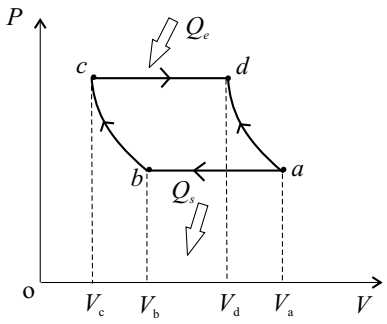

Figura 4.27: Ciclo de uma máquina térmica com dois processos isobáricos de dois adiabáticos.

Partindo do ponto a para o ponto b realizamos uma compressão isobárica e de acordo com a equação dos gases $PV = nRT$ com pressão constante temos que

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{T_a}{T_b}, \qquad \therefore T_b = \frac{V_b}{V_a}\,T_a, \qquad \therefore T_b < T_a.$$

Nesse processo de compressão um calor Q_s sai do gás para o exterior:

$$Q_s = C_P\,n\,(T_a - T_b) = C_P\,n\left(T_b\,\frac{V_a}{V_b} - T_b\right) = C_P\,n\,T_b\left(\frac{V_a}{V_b} - 1\right). \tag{4.21}$$

Em seguida, realizamos uma compressão adiabática ($Q = 0$) do ponto b até o ponto c e pela equação do processo adiabático, $P\,V^\gamma = cte$ temos:

$$P_b\,V_b^\gamma = P_c\,V_c^\gamma,$$

mas $P_a = P_b$ e $P_c = P_d$, então

$$P_a\,V_b^\gamma = P_d\,V_c^\gamma. \tag{4.22}$$

Nesse processo de compressão adiabática a temperatura cresce de acordo com a equação

$$T_b\,V_b^{\gamma-1} = T_c\,V_c^{\gamma-1}, \qquad \therefore\ T_c = \left(\frac{V_b}{V_c}\right)^{\gamma-1} T_b,$$

e como $\gamma - 1 \approx 0,4$ temos que $T_c < T_b$.

Agora, aquece-se o gás num processo isobárico do ponto c ao ponto d. Temos

$$\frac{V_c}{V_d} = \frac{T_c}{T_d}, \qquad \therefore\ T_d = \frac{V_d}{V_c}\,T_c, \qquad \therefore T_d < T_c.$$

Uma quantidade de calor Q_e entra no gás proveniente do exterior,

$$Q_e = C_P\,n\,(T_d - T_c) = C_P\,n\left(T_d - \frac{V_c}{V_d}\,T_d\right) = C_P\,n\,T_d\left(1 - \frac{V_c}{V_d}\right). \tag{4.23}$$

Na última etapa realizamos uma expansão adiabática do ponto$d$ ao ponto a:

$$P_d\,V_d^\gamma = P_a\,V_a^\gamma. \tag{4.24}$$

Das equações (4.24) e (4.22) temos que:

$$\frac{P_a\,V_a^\gamma}{P_a\,V_b^\gamma} = \frac{P_d\,V_d^\gamma}{P_d\,V_c^\gamma}, \qquad \therefore\ \frac{V_a}{V_b} = \frac{V_d}{V_c}.$$

Das equações (4.21) e (4.23) a eficiência será

$$e = 1 - \frac{Q_s}{Q_e} = 1 - \frac{C_P\,n\,T_b\left(\frac{V_a}{V_b} - 1\right)}{C_P\,n\,T_d\left(1 - \frac{V_c}{V_d}\right)},$$

mas

$$\frac{V_c}{V_d} = \frac{V_b}{V_a}\ \therefore\ e = 1 - \frac{C_P\,n\,T_b\left(\frac{V_a}{V_b} - 1\right)}{C_P\,n\,T_d\left(1 - \frac{V_b}{V_a}\right)},$$

$$\therefore e = 1 - \frac{T_b}{T_d}\,\frac{\frac{V_a - V_b}{V_b}}{\frac{V_a - V_b}{V_a}} = 1 - \frac{T_b}{T_d}\,\frac{V_a}{V_b}.$$

Identificando T_b como a temperatura da fonte fria T_f, T_d como a temperatura da fonte quente T_q e o fato que $V_a\,/\,V_b > 1$, concluímos que a eficiência desse ciclo é menor que a eficiência do ciclo de Carnot ($e = 1 - T_f/T_q$).

Máquina 2

Consideremos agora a máquina térmica cíclica composta por dois processos isobáricos e dois processos isotérmicos. Tomemos o diagrama da figura (4.28).

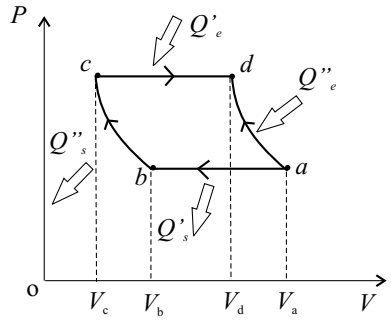

Figura 4.28: Ciclo de uma máquina térmica com dois processos isobáricos de dois isotérmicos.

Partindo do ponto a para o ponto b realizamos uma compressão isobárica e de acordo com a equação dos gases $PV = nRT$ com pressão constante temos que

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{T_a}{T_b}, \qquad \therefore T_b = \frac{V_b}{V_a}\,T_a, \qquad \therefore T_b < T_a. \tag{4.25}$$

Nesse processo de compressão, um calor $Q_s^{'}$ sai do gás para o exterior:

$$Q_s^{'} = C_P\, n\,(T_a - T_b) = C_P\, n\,\left(T_b\,\frac{V_a}{V_b} - T_b\right) = C_P\, n\, T_b\,\left(\frac{V_a}{V_b} - 1\right). \tag{4.26}$$

Em seguida, realizamos uma compressão isotérmica na temperatura T_b (fonte fria) do ponto b até o ponto c. Uma quantidade de calor $Q_s^{''}$ sai do gás:

$$Q_s^{''} = n\,R\,T_b\,\ln\frac{V_b}{V_c}. \tag{4.27}$$

Agora, aquece-se o gás num processo isobárico do ponto c ao ponto d. Temos

$$\frac{V_c}{V_d} = \frac{T_c}{T_d}, \qquad \therefore\, T_d = \frac{V_d}{V_c}\,T_c, \qquad \therefore T_d > T_c. \tag{4.28}$$

Uma quantidade de calor $Q_e^{'}$ entra no gás proveniente do exterior,

$$Q_e^{'} = C_P\, n\,(T_d - T_c) = C_P\, n\,\left(T_d - \frac{V_c}{V_d}\,T_d\right) = C_P\, n\, T_d\,\left(1 - \frac{V_c}{V_d}\right). \tag{4.29}$$

Por fim, realizamos uma expansão isotérmica na temperatura T_d (fonte quente) do ponto d até o ponto a. Uma quantidade de calor $Q_e^{''}$ entra no gás:

$$Q_e^{''} = n\,R\,T_d\,\ln\frac{V_a}{V_d}. \tag{4.30}$$

Contudo, $T_a = T_d$ e da equação (4.25)

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{T_d}{T_b}.$$

e da equação (4.28) com $T_c = T_b$ temos

$$\frac{V_c}{V_d} = \frac{T_b}{T_d}.$$

Portanto,

$$\frac{V_a}{V_b} = \frac{V_d}{V_c}, \qquad \therefore \frac{V_b}{V_c} = \frac{V_a}{V_d}. \tag{4.31}$$

A eficiência será:

$$e = 1 - \frac{Q_s}{Q_e} = 1 - \frac{Q_s^{'} + Q_s^{''}}{Q_e^{'} + Q_e^{''}},$$

e das equações (4.26), (4.27), (4.29) e (4.30) fica:

$$e = 1 - \frac{C_P\, n\, T_b \left(\frac{V_a}{V_b} - 1\right) + n\, R\, T_b \ln \frac{V_b}{V_c}}{C_P\, n\, T_d \left(1 - \frac{V_c}{V_d}\right) + n\, R\, T_d \ln \frac{V_a}{V_d}} = 1 - \frac{T_b}{T_d}\, \frac{C_P\, n \left(\frac{V_a}{V_b} - 1\right) + n\, R \ln \frac{V_b}{V_c}}{C_P\, n \left(1 - \frac{V_c}{V_d}\right) + n\, R \ln \frac{V_a}{V_d}},$$

e pela equação (4.31)fica

$$e = 1 - \frac{T_b}{T_d}\, \frac{C_P\, n \left(\frac{V_a}{V_b} - 1\right) + n\, R \ln \frac{V_b}{V_c}}{C_P\, n \left(1 - \frac{V_c}{V_d}\right) + n\, R \ln \frac{V_b}{V_c}}.$$

Como $V_a > V_b$ temos que a segunda fração é maior que a unidade. Portanto, a eficiência é menor que a eficiência da máquina de Carnot.