ELETROMAGNETISMO CLÁSSICO

ESSENCIAL

Newton B. de Oliveira

EDUFBA
Salvador, 2015

Documento preparado com o sistema LaTeX.

Esse livro é dedicado aos meus pais
(in memoriam) Newton e Célia pelo
esforço em educar-me.

Sumário

Apresentação **11**

1 Introdução **13**
1.1 Sistema de unidades 13
1.2 Notação 13
1.3 Análise vetorial 14
1.3.1 Representação cartesiana. Produto escalar e Produto vetorial 14
1.3.2 Coordenadas cilíndricas e esféricas 16
1.3.3 Gradiente 17
1.3.4 Integração vetorial 18
1.3.5 Divergente de um vetor **F** 19
1.3.6 Rotacional 21
1.3.7 O operador Nabla ou Del 24

2 Eletrostática **27**
2.1 Lei de Coulomb para distribuições de cargas 27
2.2 Campo eletrostático 29
2.3 Lei de Gauss para o campo elétrico 31
2.4 O potencial elétrico de uma distribuição de cargas 34
2.5 Expansão em multipolos de uma distribuição de cargas 39
2.5.1 O dipolo elétrico formado por cargas pontuais 41
2.6 A equação de Poisson e a equação de Laplace 42
2.7 Solução de problemas eletrostáticos 43
2.7.1 Equação de Laplace 44
2.7.2 Método de separação de variáveis 47
2.7.3 Resolução de problemas eletrostáticos pelo método das imagens . . . 51
2.7.4 Método iterativo para problemas bidimensionais (método de exaustão) 55
2.7.5 Solução da equação de Poisson 59
2.8 Campos eletrostáticos em meios dielétricos 59
2.8.1 O vetor polarização e o vetor deslocamento elétrico 59
2.9 Lei de Gauss em um dielétrico 62
2.9.1 A permissividade elétrica e a constante dielétrica 63
2.10 As condições de contorno 64
2.11 Linhas de deslocamento elétrico 67
2.11.1 Equação de Laplace para dielétricos lineares 68

2.12 Capacitores . . . 68
2.13 Densidade de energia eletrostática . . . 69

3 Correntes estacionárias 81
3.1 A corrente elétrica e a densidade de corrente . . . 81
3.2 Lei de Ohm, condutividade e resistividade . . . 83
3.3 Tendência ao equilíbrio eletrostático . . . 85
3.4 Condições de fronteira . . . 85
3.5 Força eletromotriz e Leis de Kirchhoff . . . 86
3.6 Eq. de Laplace para meios condutores . . . 88

4 O campo magnetostático de correntes estacionárias 93
4.1 Indução magnética **B** . . . 93
4.2 A lei de Biot-Savart . . . 94
4.3 O potencial escalar . . . 96
4.4 O fluxo da indução magnética . . . 98
4.5 A lei de Ampère . . . 98
4.6 Torque sobre uma espira e momento magnético . . . 99
4.7 Indutância . . . 101
4.8 Indutância mútua . . . 105
4.9 A matéria magnetizada. A magnetização. . . . 106
4.10 O vetor intensidade magnética, **H** . . . 108
4.11 Permeabilidade magnética, histerese ferromagnética . . . 110
4.12 Condições de contorno . . . 113
4.13 Os circuitos magnéticos . . . 114

5 Campos magnéticos e elétricos variáveis no tempo 123
5.1 A lei de Faraday . . . 123
5.2 Indutância e Lei de Faraday . . . 126
5.3 O transformador . . . 128
5.4 A energia associada à indução magnética . . . 129
5.5 Os efeitos da tensão alternada nos materiais ferromagnéticos . . . 130
5.6 A lei de Ampère generalizada . . . 132
5.7 Dielétricos na presença de campos variáveis no tempo . . . 133
5.8 As equações de Maxwell e as condições de contorno . . . 136
5.8.1 A teoria dos campos e teoria dos circuitos . . . 137
5.9 As condições de contorno . . . 138

6 A onda eletromagnética 143
6.1 A equação diferencial da onda eletromagnética . . . 143
6.1.1 Soluções da equação de onda . . . 145
6.2 Notação complexa . . . 149
6.3 A velocidade de fase e a velocidade de grupo . . . 150
6.4 Ondas vetoriais . . . 153
6.5 Ondas estacionárias . . . 156
6.6 Equação de onda em meios condutores . . . 159
6.7 Solução da equação de onda para meios condutores . . . 162
6.8 Polarização da onda e os parâmetros de Stokes . . . 167

6.9 Reflexão e refração de uma onda 171
6.9.1 Reflexão total 179
6.9.2 Reflexão na superfície de um condutor perfeito 181
6.9.3 Reflexão na superfície de um condutor sob incidência normal 183
6.10 Polarização na reflexão 185
6.11 O vetor de Poynting 186
6.12 Notação complexa e o vetor de Poynting 188
6.13 Intensidades das ondas na fronteira de dois meios dielétricos 190

7 Ondas guiadas 195
7.1 Ondas entre planos paralelos condutores 195
7.1.1 Onda TE 198
7.1.2 Onda TM 201
7.1.3 Onda TEM 202
7.1.4 Velocidade de propagação 203
7.2 Ondas em guias de ondas 204
7.2.1 Guia de ondas de seção retangular 204
7.2.2 Guia de ondas cilíndrico de secção circular 212

8 Linhas de transmissão 217
8.1 Os parâmetros da linha de transmissão 217
8.2 Equações da linha de transmissão 218
8.3 A linha de transmissão terminada 221
8.4 Linha de transmissão de baixas perdas 223
8.4.1 Linha de baixas perdas terminada em resistência R_L 224
8.4.2 Linha terminada em carga não resistiva ($Z_L \neq Z_c$) 226
8.4.3 Casos importantes de linhas de transmissão carregada 229
8.5 Casamento de impedâncias com Stub Livre 232
8.5.1 Método analítico 233
8.5.2 Método gráfico. Cartas para linhas de transmissão 236

9 Radiação 247
9.1 Radiação para oscilações senoidais 250
9.1.1 Dipolo oscilante 251

A Curvas de magnetização 261

Referências Bibliográficas 269

Índice Remissivo 271

Apresentação

Esse texto versa sobre a teoria eletromagnética clássica apresentada com a álgebra vetorial moderna.

Trata-se de um texto introdutório onde são apresentados os conceitos básicos e o desenvolvimento matemático necessário para a análise e compreensão do fenômeno eletromagnético. O conteúdo é suficiente para um curso de dois semestres de 90 horas e exige um conhecimento prévio de eletricidade, magnetismo, cálculo integral e equações diferenciais. Corresponde a um curso de Eletromagnetismo para físicos ou engenheiros eletricistas em nível de graduação. Procurou-se apresentar os tópicos da forma mais correta possível, com grau de complexidade crescente ressaltando as noções mais fundamentais com exemplos direcionados a esses objetivos.

Inicia com os conceitos básicos sobre eletricidade e magnetismo e estende-se até o fenômeno da radiação eletromagnética pelas antenas.

Todas as críticas e sugestões serão bem vindas e analisadas com a finalidade de corrigir erros e omissões para que as futuras versões possam ser melhoradas.

Salvador, maio de 2015

Newton Barros de Oliveira.

Capítulo 1

Introdução

O eletromagnetismo corresponde ao estudo dos fenômenos de origem elétrica e magnética. Basicamente, o estudo dos campos elétricos e magnéticos estacionarios ou não e sua interação com a matéria a nível macroscópico (a matéria é considerada como contínua). Os circuitos elétricos podem ser considerados como um caso particular de aplicação da teoria eletromagnética onde é possível, com boa aproximação, confinar em certas regiões do espaço (nos elementos de circuito) os fenômenos elétricos e magnéticos.

1.1 Sistema de unidades

Adotamos o sistema SI (sistema internacional) racionalizado onde as unidades básicas das seis dimensões fundamentais de comprimento, massa, tempo, corrente elétrica, temperatura e intensidade luminosa são respectivamente o metro, o quilograma, o segundo, o ampère, o kelvin e a candela.

As unidades secundárias ou derivadas do tipo volt, ohm, joule, watt, etc. também são amplamente utilizadas.

1.2 Notação

Os escalares serão escritos com letras *itálicas*, os vetores serão escritos em **negrito** e os versores (vetores unitários) terão acento circunflexo.

Ex: $\mathbf{F} = F_x\hat{\mathbf{x}} + F_y\hat{\mathbf{y}} + F_z\hat{\mathbf{z}}$, $\mathbf{F}$ é um vetor,

F_x, F_y, F_z são escalares (coordenadas do vetor),

$\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$ são os versores (vetores unitários),

F é um escalar (módulo do vetor $\mathbf{F}$).

As equações mais importantes serão numeradas com dois números. O primeiro representa o capítulo e o segundo representará a ordem de aparecimento da equação.

Ex: (2.10), significa no capítulo 2 a equação 10.

1.3 Análise vetorial

Resumiremos aqui algumas definições e propriedades úteis da análise vetorial.

1.3.1 Representação cartesiana. Produto escalar e Produto vetorial

Tomemos dois vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ representados no sistema coordenado cartesiano por

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}},$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}.$$

Define-se o produto escalar entre os dois vetores (Fig. 1.1) e nota-se por $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ como sendo um escalar tal que

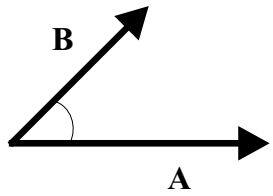


Figura 1.1: Vetores oblíquos.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\mathbf{A},\mathbf{B}), \tag{1.1}$$

então

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\ \mathrm{proj}_{\mathbf{A}}\mathbf{B} = |\mathbf{B}|\ \mathrm{proj}_{\mathbf{B}}\mathbf{A}.$$

Pode-se mostrar facilmente que o produto escalar é distributivo com relação à adição (mostre!), ou seja,

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}. \tag{1.2}$$

Sendo assim,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}})\cdot(B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{1.3}$$

e

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\mathbf{A}|^2. \tag{1.4}$$

Define-se o produto vetorial entre vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ e nota-se por $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ como sendo um vetor $\mathbf{C}$ perpendicular aos dois vetores anteriores cuja direção segue a regra da mão direita (Fig. 1.2) e tal que

$$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\ \mathrm{sen}(\mathbf{A},\mathbf{B}). \tag{1.5}$$

Notar que

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -(\mathbf{B}\times\mathbf{A}). \tag{1.6}$$

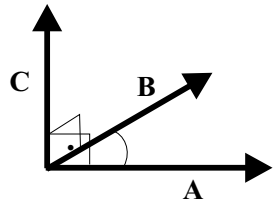


Figura 1.2: Produto vetorial entre os vetores **A** e **B**.

O produto vetorial também é distributivo com relação à adição. Mostre graficamente!

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C},$$

sendo assim,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}) \times (B_x\hat{\mathbf{x}} + B_y\hat{\mathbf{y}} + B_z\hat{\mathbf{z}}) =$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}}, \tag{1.7}$$

ou seja, podemos representar o produto vetorial pelo determinante

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

Define-se o produto misto como

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}). \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = -\mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{C}). \tag{1.9}$$

Define-se o triplo produto vetorial como

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}).$$

Pode-se mostrar que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}), \tag{1.10}$$

para verificar, expanda o triplo produto e depois some e subtraia os seguintes termos:
$A_xB_xC_x$ na componente $\hat{\mathbf{x}}$,
$A_yB_yC_y$ na componente $\hat{\mathbf{y}}$,
$A_zB_zC_z$ na componente $\hat{\mathbf{z}}$.

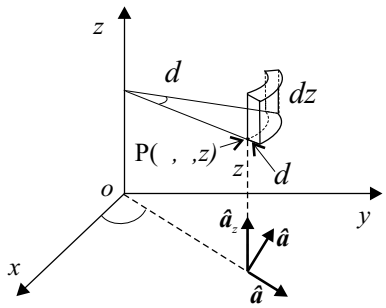


Figura 1.3: Sistema de coordenadas cilíndricas.

1.3.2 Coordenadas cilíndricas e esféricas

No sistema cilíndrico um ponto P do espaço é representado pelas coordenadas ρ, ϕ e z conforme a figura (Fig. 1.3). Essas coordenadas relacionam-se com as coordenadas do sistema cartesiano por

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\phi \\ y &= \rho \operatorname{sen}\phi \\ z &= z. \end{aligned} \tag{1.11}$$

O elemento de arco d$\mathbf{l}$ é escrito como

$$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\mathbf{a}}_\rho + \rho d\phi \hat{\mathbf{a}}_\phi + dz \hat{\mathbf{a}}_z, \qquad \hat{\mathbf{a}}_z = \hat{\mathbf{z}} \tag{1.12}$$

e o elemento de volume dv

$$dv = \rho d\phi d\rho dz. \tag{1.13}$$

No sistema esférico um ponto P do espaço é representado pelas coordenadas r, θ, ϕ (Fig. 1.4).

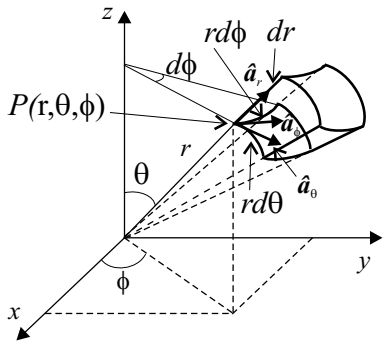


Figura 1.4: Sistema de coordenadas esféricas.

$$d\mathbf{l} = dr\, \hat{\mathbf{a}}_r + rd\theta\, \hat{\mathbf{a}}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\phi\, \hat{\mathbf{a}}_\phi, \qquad \hat{\mathbf{a}}_r = \hat{\mathbf{r}} \tag{1.14}$$

$$dv = r^2 \text{sen}\theta dr d\theta d\phi, \tag{1.15}$$

$$\begin{aligned} x &= r\ \text{sen}\theta \cos\phi \\ y &= r\ \text{sen}\theta\ \text{sen}\phi \\ z &= r\cos\theta. \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.3.3 Gradiente

Seja V uma função escalar da posição em qualquer sistema coordenado. Dado um deslocamento infinitesimal $d\mathbf{l}$, arbitrário, a função variará de dV. Define-se a derivada direcional da função no sistema cartesiano e nota-se por dV/dl como:

$$\frac{dV}{dl} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{V(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - V(x,y,z)}{\Delta l} =$$

$$= \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z}{\Delta l}$$

$$\therefore \frac{dV}{dl} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dl},$$

ou, para a diferencial dV,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz.$$

Notando que $d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$ podemos escrever

$$dV = (\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}),$$

$$dV = (\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}) \cdot d\mathbf{l}.$$

Definimos então o gradiente de V como

$$\mathbf{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}, \tag{1.17}$$

de modo que

$$dV = \mathbf{grad}V \cdot d\mathbf{l}. \tag{1.18}$$

Tomaremos essa expressão como a expressão que definirá o gradiente em qualquer sistema de coordenadas.

Podemos também escrever

$$\frac{dV}{dl} = \mathbf{grad}V \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dl} = \mathbf{grad}V \cdot d\hat{\mathbf{l}}, \tag{1.19}$$

onde observamos que a derivada direcional será máxima quando o deslocamento $d\mathbf{l}$ for paralelo à direção do $\mathbf{grad}V$ e que

$$\left[\frac{dV}{dl}\right]_{max.} = |\mathbf{grad}V|. \tag{1.20}$$

Em coordenadas esféricas onde $V = V(r, \theta, \phi)$ teremos

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi}d\phi.$$

Da equação (1.14) temos

$$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{a}}_r + rd\theta\hat{\mathbf{a}}_\theta + r\text{sen}\theta d\phi\hat{\mathbf{a}}_\phi.$$

Usando a equação (1.18) deveremos ter

$$\frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi}d\phi = \mathbf{grad}V \cdot (dr\hat{\mathbf{a}}_r + rd\theta\hat{\mathbf{a}}_\theta + r\text{sen}\theta d\phi\hat{\mathbf{a}}_\phi),$$

que será verdadeira se tomarmos para o $\mathbf{grad}V$ a expressão

$$\mathbf{grad}V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\mathbf{a}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta + \frac{1}{r\text{sen}\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\mathbf{a}}_\phi. \tag{1.21}$$

Analogamente, em coordenadas cilíndricas teremos:

$$\mathbf{grad}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\mathbf{a}}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\mathbf{a}}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{a}}_z. \tag{1.22}$$

1.3.4 Integração vetorial

- Integral de linha

  Consideremos um campo vetorial $\mathbf{F}$ e um caminho C (trajetória) unindo dois pontos $\underline{a}$ e $\underline{b}$ do espaço (Fig. 1.5).

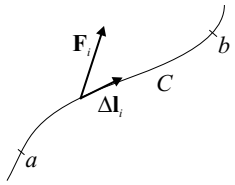


Figura 1.5: Caminho de integração.

Definimos a integral de linha entre a e b por esse caminho como

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta l_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \Delta\mathbf{l}_i. \tag{1.23}$$

Em geral o resultado dessa integral depende não só dos pontos a e b como também do caminho escolhido.

Se o caminho for fechado indicaremos por

$$\oint_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \tag{1.24}$$

- Integrais de superfície

  Dada uma superfície S aberta ou fechada, dividamos essa superfície em pequenos elementos de área inifinitesimal ds e definamos uma normal cujo sentido positivo será apontado para fora se a superfície for fechada ou seguindo a regra da mão direita se a superfície for aberta (Fig. 1.6), a integral de superfície de um campo vetorial $\mathbf{F}$ é

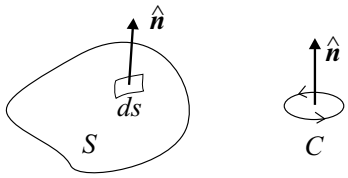


Figura 1.6: Superfície de integração e orientação da normal.

  definida como

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta S_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \Delta S_i. \tag{1.25}$$

  Se a superfície for fechada denotamos por

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \qquad \text{nota: } \hat{\mathbf{n}} ds \equiv d\mathbf{s} \tag{1.26}$$

- Integral volumétrica

  Tomando um volume V, definimos a integral volumétrica do campo $\mathbf{F}$ como

$$\int_V \mathbf{F} dv = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \Delta V_i \to 0}} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \Delta V_i. \tag{1.27}$$

1.3.5 Divergente de um vetor F

Dado um campo vetorial $\mathbf{F}$, definimos o $div\mathbf{F}$ como

$$div\mathbf{F} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \tag{1.28}$$

onde V é o volume interior à S.

Notar que o operador divergente transforma uma função vetorial da posição (campo vetorial) em uma função escalar da posição (campo escalar).

Em coordenadas cartesianas podemos calcular o $div\mathbf{F}$ calculando o fluxo pelas faces de um cubo de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$. Encontraremos facilmente a expressão

$$div\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{1.29}$$

Em coordenadas esféricas, calculemos o fluxo por cada uma das faces do elemento de volume: Temos duas faces $\perp'$s à direção radial $\hat{\mathbf{a}}_r$, duas $\perp'$s à direção $\hat{\mathbf{a}}_\theta$ e duas $\perp'$s à direção

$\hat{\mathbf{a}}_\phi$. O produto escalar $\mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ dará, em cada uma dessas faces, projeções de $\mathbf{F}$ nas direções $\hat{\mathbf{a}}_r$, $\hat{\mathbf{a}}_\theta$, $\hat{\mathbf{a}}_\phi$ respectivamente, ou seja, F_r, F_θ, F_ϕ.

Então

$$div\mathbf{F} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}[-F_r(r,\theta,\phi)\,r^2\,\text{sen}\theta\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

$$+F_r(r+\Delta_r,\theta,\phi)(r+\Delta_r)^2\,\text{sen}\theta\,\Delta\theta\,\Delta\phi - F_\theta(r,\theta,\phi)\,r\,\text{sen}\theta\,\Delta r\,\Delta\phi$$

$$+F_\theta(r,\theta+\Delta\theta,\phi)\,r\,\text{sen}(\theta+\Delta\theta)\,\Delta r\,\Delta\phi$$

$$-F_\phi(r,\theta,\phi)\,r\Delta r\,\Delta\theta)$$

$$+F_\phi(r,\theta,\phi+\Delta\phi)\,r\Delta r\,\Delta\theta].$$

Mas da expansão em série

$$F_r(r+\Delta r,\theta,\phi)\,(r+\Delta r)^2 = F_r(r,\theta,\phi)r^2 + \frac{\partial}{\partial r}(F_r(r,\theta,\phi)r^2)\Delta r + ...$$

$$F_\theta(r,\theta+\Delta\theta,\phi)\,\text{sen}\,(\theta+\Delta\theta) = F_\theta(r,\theta,\phi)\,\text{sen}\theta\, + \frac{\partial}{\partial\theta}\,(F_\theta(r,\theta,\phi)\,\text{sen}\theta)\Delta\theta + ...$$

$$F_\phi(r,\theta,\phi+\Delta\phi) = F_\phi(r,\theta,\phi) + \frac{\partial}{\partial\phi}\,(F_\phi(r,\theta,\phi))\,\Delta_\phi + ...$$

Substituindo e somando ficamos com:

$$div\mathbf{F} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{r^2\text{sen}\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\phi}[\text{sen}\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\,(F_r\,r^2)\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\phi$$

$$+r\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(F_\theta\text{sen}\theta)\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\phi + r\frac{\partial}{\partial\phi}F\phi\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\phi]$$

$$div\mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\,(r^2F_r) + \frac{1}{r\text{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\text{sen}\theta F_\theta)\, + \frac{1}{r\text{sen}\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\,F_\phi \tag{1.30}$$

Procedendo de modo análogo, encontraremos em coordenadas cilíndricas a expressão:

$$div\mathbf{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\,(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}F_\phi + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{1.31}$$

Teorema da divergência

Calculemos o fluxo em uma superfície fechada S subdividida em pequenas áreas (Fig. 1.7)

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds = \sum_{i=1}^{N}\oint_{S_i}\mathbf{F}_i\cdot\hat{\mathbf{n}}_i ds_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\oint_{S_i}\mathbf{F}_i\cdot\hat{\mathbf{n}}_i ds_i \times \frac{\Delta V_i}{\Delta V_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\Delta V_i\frac{1}{\Delta V_i}\oint_{S_i}\mathbf{F}_i\cdot\hat{\mathbf{n}}_i ds_i,$$

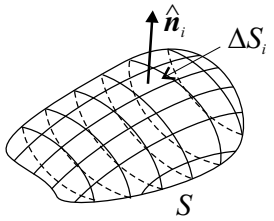


Figura 1.7: Superfície de integração retalhada.

no limite em que $N \to \infty$ e $\Delta V_i \to 0$ teremos

$$\frac{1}{\Delta V_i} \oint_{S_i} \mathbf{F}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i ds_i = div\mathbf{F}.$$

Então

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_V div\mathbf{F} dv. \tag{1.32}$$

Esse teorema permite passar de uma integral de superfície para uma integral de volume. É também conhecido como o teorema da divergência de Gauss .

1.3.6 Rotacional

Define-se o rotacional de um campo vetorial $\mathbf{F}$ como sendo o vetor tal que

$$\mathbf{rotF} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{S_V} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} ds,$$

onde S_V é a superfície que envolve V e $\hat{\mathbf{n}}$ é sua normal externa.

Observe que o $\mathbf{rotF}$ é dado por uma soma de vetores tangentes à superfície de integração.

Apresentemos uma definição equivalente mais fácil de analisar.

Tomemos uma curva plana C (caminho fechado) limitando uma superfície S e desloquemos essa curva transversalmente de um valor ξ (Fig. 1.8) de modo obtermos uma superfície cilíndrica $S_T + S_L$ (superfícies das tampas mais a superfície lateral).

Tomando o produto escalar de $\hat{\mathbf{a}}$ (normal à tampa) pelo $\mathbf{rotF}$, conforme foi definido, temos

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{rotF} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \oint_{S_V} \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} ds.$$

Nas tampas de cima e de baixo o versor $\hat{\mathbf{a}}$ é paralelo ao versor $\hat{\mathbf{n}}$, portanto, $\hat{\mathbf{a}}$ é perpendicular à $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}$ de modo que $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} = 0$.

Na superfície lateral usemos a identidade $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} = \hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}$. Teremos então

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{rotF} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \int_{S_L} \hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F} ds.$$

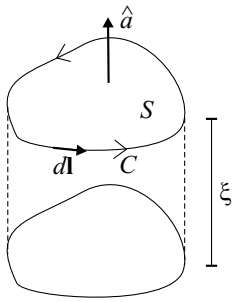


Figura 1.8: Volume gerado pelo deslocamento de uma curva fechada plana com uma superfície S.

Notemos que na superfície lateral $\hat{\mathbf{a}} \times \hat{n}$ tem a direção de $d\mathbf{l}$ e podemos escrever

$$ds = \xi dl \qquad \text{e} \qquad V = \xi.S$$

ou

$$\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{n}} ds = \xi d\mathbf{l},$$

então

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{rotF} = \lim_{\xi S \to 0} \frac{1}{\xi S} \oint_C \xi d\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}.$$

Sendo assim,

$$\hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{rotF} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \tag{1.33}$$

Ou seja, a projeção do **rotF** numa direção $\hat{\mathbf{a}}$ é igual à circuitação de **F** dividida pela área interior ao caminho plano C perpendicular à $\hat{\mathbf{a}}$ no limite em que essa área tende a zero. Se escolhermos a direção de $\hat{\mathbf{a}}$ como sendo paralela ao vetor **rotF**, a projeção será o módulo desse vetor e o caminho de integração será perpendicular a esse mesmo vetor.

Rotacional em coordenadas cartesianas

Consideremos um cubo elementar de volume $\Delta x \Delta y \Delta z$ conforme a figura (Fig. 1.9).

Consideremos inicialmente o par de faces 1 e 1'.

Em 1 temos

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} = (-\hat{\mathbf{x}}) \times (F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}) = -F_y \hat{\mathbf{z}} + F_z \hat{\mathbf{y}}$$

$$\int_{S_1} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} ds = -F_y(x_0, y, z)\, \Delta y\, \Delta z\, \hat{\mathbf{z}} + F_z(x_0, y, z)\, \Delta y\, \Delta z\, \hat{\mathbf{y}}.$$

Na face 1' temos

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}} \times (F_x \hat{\mathbf{x}} + F_y \hat{\mathbf{y}} + F_z \hat{\mathbf{z}}) = F_y \hat{\mathbf{z}} - F_z \hat{\mathbf{y}}$$

$$\int_{S_{1'}} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} ds = F_y(x_0 + \Delta x, y, z)\, \Delta y\, \Delta z\, \hat{\mathbf{z}} - F_z(x_0 + \Delta x, y, z)\, \Delta y\, \Delta z\, \hat{\mathbf{y}}.$$

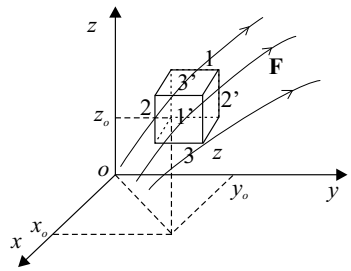


Figura 1.9: Cubo elementar imerso no campo vetorial.

Do mesmo modo, nas faces 2, 2', 3 e 3' temos

$$\int_{S_2} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} ds = F_x(x, y_0, z)\, \Delta x\, \Delta z\, \hat{\mathbf{z}} - F_z(x, y_0, z) \Delta x\, \Delta z\, \hat{\mathbf{x}}$$

$$\int_{S_{2'}} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} ds = -F_x(x, y_0 + \Delta y, z)\, \Delta x\, \Delta z\, \hat{\mathbf{z}} + F_z(x, y_0, +\Delta y, z) \Delta x\, \Delta z\, \hat{\mathbf{x}}$$

$$\int_{S_3} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} ds = -F_x(x, y, z_0)\, \Delta x\, \Delta y\, \hat{\mathbf{y}} + F_y(x, y, z_0) \Delta x\, \Delta y\, \hat{\mathbf{x}}$$

$$\int_{S_{3'}} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F} ds = F_x(x, y, z_0 + \Delta z)\, \Delta x\, \Delta y\, \hat{\mathbf{y}} - F_y(x, y, z_0 + \Delta z) \Delta x\, \Delta y\, \hat{\mathbf{x}}.$$

Agrupando os termos que contém $\hat{\mathbf{x}}$ temos

$$(\mathbf{rotF})_x = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \{[-F_z(x, y_0, z) + F_z\,(x, y_0 + \Delta y, z)] \Delta x \Delta z$$

$$+[F_y\,(x, y, z_0) - F_y(x, y, z_0 + \Delta z)] \Delta x \Delta y\},$$

$$(\mathbf{rotF})_x = \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta x \Delta y \Delta z} [\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}] \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\therefore (\mathbf{rotF})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}. \tag{1.34}$$

Para as componentes y e z temos, de modo semelhante,

$$(\mathbf{rotF})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x},$$

$$(\mathbf{rotF})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}. \tag{1.35}$$

Podemos escrever formalmente

$$\mathbf{rotF} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \tag{1.36}$$

Teorema de Stokes

Tomemos uma superfície S, apoiada em um contorno C, imersa no campo vetorial $\mathbf{F}$ (Fig. 1.10) e retalhemos essa superfície em N superfícies menores S_i e seus respectivos contornos C_i. Temos

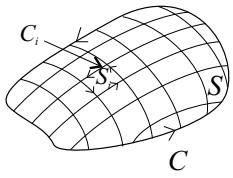


Figura 1.10: Superfície apoiada no caminho de integração C.

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{dl}_i,$$

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = \sum_{i=1}^{N} \frac{S_i}{S_i} \oint_{C_i} \mathbf{F}_i\cdot\mathbf{dl}_i.$$

No limite quando $N\to\infty$, $S_i\to 0$, lembrando que

$$\hat{\mathbf{a}}\cdot\mathbf{rotF} = \lim_{S_i\to 0}\frac{1}{S_i}\oint_{C_i}\mathbf{F}_i\cdot d\mathbf{l}_i, \qquad \hat{\mathbf{a}}\perp S_i,$$

temos

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dl} = \int_S \mathbf{rotF}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds, \tag{1.37}$$

conhecido como teorema do rotacional ou teorema de Stokes

1.3.7 O operador Nabla ou Del

Definimos o operador

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \tag{1.38}$$

como sendo um ente matemático que age sobre um escalar V ou vetor $\mathbf{F}$ obedecendo às seguintes regras:

$$\nabla V \equiv \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{grad}V$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} \equiv \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = div\mathbf{F} \tag{1.39}$$

$$\nabla\times\mathbf{F} \equiv \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \mathbf{rotF}$$

Em termos do operador Nabla, podemos definir um operador composto pela aplicação sucessiva do operador divergente sobre o operador gradiente de uma função escalar V, $div(\mathbf{grad}V)$, o operador laplaceano representado por:

$$div(\mathbf{grad}V) = \nabla \cdot \nabla V = \nabla^2 V = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right) =$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) V$$

ou

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Exercício:
Mostrar que $\mathbf{rot\ grad}V \equiv 0$ e que $div\ \mathbf{rotF} \equiv 0$.

Identidades úteis

$$div(V\mathbf{F}) = V div\mathbf{F} + \mathbf{grad}V \cdot \mathbf{F} \tag{1.40}$$

$$div(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{rotF} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{rotG} \tag{1.41}$$

$$rot(V\mathbf{F}) = V\mathbf{rotF} + \mathbf{grad}V \times \mathbf{F} \tag{1.42}$$

$$\mathbf{rot\ rotF} = \mathbf{grad}\ div\mathbf{F} - \boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}}\mathbf{F}, \tag{1.43}$$

onde $\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}}\mathbf{F}$ é definido como

$$\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}}\mathbf{F} = (\nabla^2 F_x)\hat{\mathbf{x}} + (\nabla^2 F_y)\hat{\mathbf{y}} + (\nabla^2 F_z)\hat{\mathbf{z}}.$$

Capítulo 2

Eletrostática

2.1 Lei de Coulomb para distribuições de cargas

A lei de Coulomb pode ser formulada em termos da carga pontual ou em termos das distribuições de cargas lineares, superficiais ou volumétricas. Nas situações reais o que existe de fato são as distribuições volumétricas, carga elétrica ocupando um determinado volume. As outras situações são aproximações que podem ser tratadas de modo conveniente, do ponto de vista matemático, pelas outras distribuições. Assim, uma distribuição superficial de cargas representa uma distribuição volumétrica onde uma das dimensões é muito pequena quando comparada com as outras duas, carga distribuída em uma película por exemplo. Uma distribuição linear representa uma distribuição volumétrica onde uma dimensão é muito maior que as outras duas, carga distribuída em um fio por exemplo. Por fim, a carga pontual representa uma distribuição volumétrica em um volume muito pequeno quando comparado com as outras dimensões de uma situação física. Um corpo carregado, com forma cúbica com 1 cm de aresta, parece um ponto quando observado a 10m de distância.

Por uma questão de conveniência consideremos que as quatro possibilidades citadas possam coexistir (Fig. 2.1) e definamos as densidades de carga volumétrica, de carga superficial e de carga linear como

$$\rho = \frac{dq}{dv}, \quad \sigma = \frac{dq}{ds}, \quad \lambda = \frac{dq}{dl}.$$

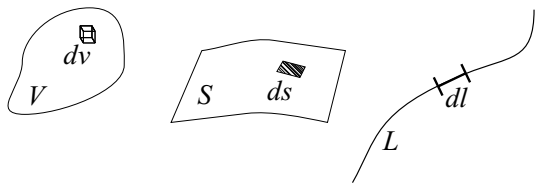


Figura 2.1: Distribuições de cargas.

A força de interação entre dois pequenos corpos esféricos carregados e distantes quando comparado com suas dimensões (Fig. 2.2), que denominaremos de cargas pontuais, foi

determinada por Coulomb. A força que age no corpo 1 devido à presença do corpo 2 pode ser escrita como

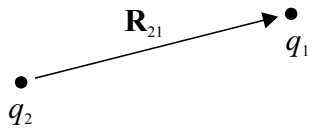


Figura 2.2: Cargas pontuais separadas por $\mathbf{R}_{21}$.

$$\mathbf{F}_1 = K\frac{q_1 q_2}{R_{21}^2}\hat{\mathbf{R}}_{21} \tag{2.1}$$

Em 1901 Giorgi mostrou que a constante K na lei de Coulomb podia ser ajustada para compatibilizar as unidades utilizadas na mecânica (metro, kilograma, segundo, newton, etc.) e as unidades utilizadas na eletricidade (volt, ampére, ohm, henry, coulomb, etc.). Criou-se então o sistema de unidades *MKS racionalizado* ou sistema *Giorgi*.

$$K = 8,98 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2, \qquad K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad \varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}.$$

Para um sistema de N cargas, a força resultante na i-ésima carga é dada pela superposição das forças individuais.

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j\neq i}^{N} K\frac{q_i q_j}{R_{ji}^2}\hat{\mathbf{R}}_{ji} = Kq_i\sum_{j\neq i}^{N}\frac{q_j}{R_{ji}^2}\hat{\mathbf{R}}_{ji}. \tag{2.2}$$

Consideremos que além das cargas pontuais também existam distribuições de cargas volumétricas, superficiais e lineares e que desejamos calcular o efeito de todas essas cargas sobre uma pequena carga q chamada de "carga de prova" (Fig. 2.3). Teremos então

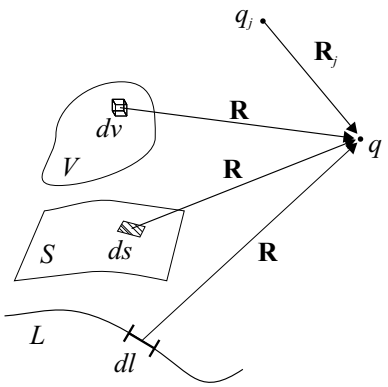


Figura 2.3: Distribuições de cargas interagindo com uma carga de prova q.

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{R_j^2} \hat{\mathbf{R}}_j + \int_V \frac{\hat{\mathbf{R}}\rho dv}{R^2} + \int_S \frac{\hat{\mathbf{R}}\sigma ds}{R^2} + \int_C \frac{\hat{\mathbf{R}}\lambda dl}{R^2} \right] \tag{2.3}$$

onde R, em cada integral, é a distância variável do elemento de carga infinitesimal até a carga de prova.

2.2 Campo eletrostático

Como a força sobre uma carga de prova é diretamente proporcional ao valor dessa carga (considerando que as outras cargas são fixas e não podem ser redistribuidas) podemos criar um outro campo vetorial que independa do valor da carga de prova simplesmente tomando o quociente da força pela carga. Definimos então o vetor do campo eletrostático como:

$$\mathbf{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\mathbf{F}}{q}, \tag{2.4}$$

o limite $q \to 0$ garante que a carga de prova não produzirá uma redistribuição nas outras cargas.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{R_j^2} \hat{\mathbf{R}}_j + \int_V \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \rho dv + \int_S \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \sigma ds + \int_C \frac{\hat{R}}{R^2} \lambda dl \right]. \tag{2.5}$$

A unidade primitiva do vetor do campo elétrostático é N/C.

Exemplo:

Determine o valor de **E** produzido por uma lâmina uniformemente carregada com densidade superficial σ, com largura a e comprimento infinito, em um ponto a uma distância z medida perpendicularmente na metade da largura (Fig. 2.4). Analise o resultado para a situação limite, $a \to \infty$ de modo que a lâmina transforme-se em um plano.

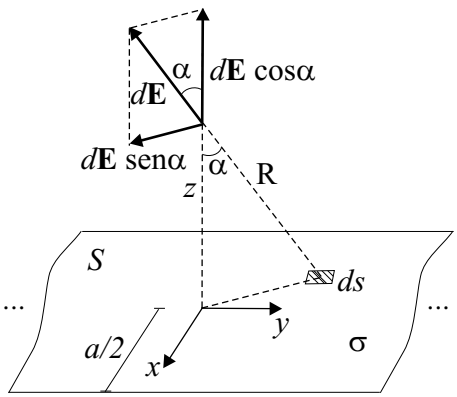


Figura 2.4: Lâmina uniformemente carregada criando um campo eletrostático.

Cada elemento infinitesimal de carga da lâmina produzirá um elemento infinitesimal $d\mathbf{E}$. Observe que só interessa a projeção de $d\mathbf{E}$ na direção perpendicular à lâmina, uma vez que as projeções na direção paralela se cancelarão mutuamente devido à simetria existente. Para cada elemento de carga sobre um círculo centrado na origem do sistema de referência existe um outro elemento de carga radialmente simétrico.

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma ds}{R^2}, \quad R^2 = z^2 + x^2 + y^2, \quad ds = dxdy,$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{R} = \frac{z}{(z^2 + x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$\therefore dE\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z}{(z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}\sigma dxdy.$$

Integrando em toda a superfície da lâmina fica

$$E = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dydx}{(z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Porém,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{(C^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{C^2}\left[\frac{y}{(C^2 + y^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{C^2}\left[\frac{y}{(C^2 + y^2)^{1/2}}\right]_{0}^{\infty} = \frac{2}{C^2}.$$

$$\therefore E = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{2dx}{(z^2 + x^2)} = 2\,\frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{dx}{z^2 + x^2}.$$

Mas,

$$\int\frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t,$$

então,

$$E = \frac{\sigma z}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2}^{a/2}\frac{dx}{z^2(1 + \frac{x^2}{z^2})}.$$

Fazendo a substituição

$$t = \frac{x}{z}, \quad dx = zdt$$

fica

$$E = \frac{\sigma z}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-a/2z}^{a/2z}\frac{zdt}{z^2(1 + t^2)} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left[\operatorname{arctg} t\right]_{-a/2z}^{a/2z},$$

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{2z}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\frac{a}{2z}\right)\right] = \frac{2\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{2z}\right) = \frac{\sigma\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{2z}\right)}{\varepsilon_0\pi},$$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{a}{2z}\right)\hat{\mathbf{z}}.$$

Se fizermos o limite em que $a \to \infty$, $\operatorname{arctg} a/2 \to \pi/2$, fica

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}}. \tag{2.6}$$

Que é o vetor do campo eletrostático produzido por um plano uniformemente carregado com densidade superficial de cargas constante σ.

2.3 Lei de Gauss para o campo elétrico

O fluxo de um vetor $\mathbf{F}$ por uma superfície é definido por $\Phi = \int_S \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$. Se a superfície for fechada, indicamos por $\Phi = \oint_S \mathbf{F}.\hat{\mathbf{n}} ds$. Consideremos uma superfície que englobe uma carga pontual q colocada na origem de um sistema de referência (Fig. 2.5).

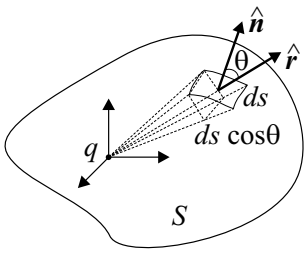


Figura 2.5: Superfície fechada englobando uma carga pontual q.

Calculemos o fluxo do vetor do campo elétrico $\mathbf{E}$ produzido pela carga pontual através da superfície S

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds =$ projeção de ds sobre um plano perpendicular à $\hat{\mathbf{r}}$.
O quociente entre essa projeção e r^2 é o ângulo sólido $d\Omega$ (Fig. 2.6).

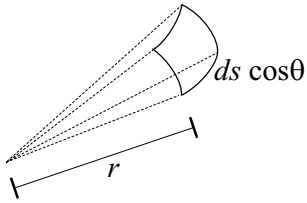


Figura 2.6: Ângulo sólido centrado na carga pontual q.

$$\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds}{r^2} = d\Omega$$

$$\therefore \oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{2.7}$$

Se a carga for externa à superfície o resultado será nulo pois as normais correspondentes na superfície são opostas dando projeções e ângulos sólidos com sinais opostos

Em resumo:

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds = \left\{ \begin{array}{ll} q/\varepsilon_0 & \text{p/ cargas internas} \\ 0 & \text{p/ cargas externas} \end{array} \right\}.$$

Para um sistema de N cargas internas teremos

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{j=1}^{N} q_j. \tag{2.8}$$

Para uma distribuição contínua com densidade ρ temos

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dv \tag{2.9}$$

onde V é o volume interior à superfície S.

Nota: é possível englobar as cargas pontuais e as densidades lineares e superficiais em densidade volumétrica utilizando funções generalizadas especiais (delta de Dirac).

Usando o teorema da divergência

$$\oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds = \int_V div\mathbf{E}dv$$

e comparando com a equação (2.9), para qualquer volume V, concluiremos que

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{2.10}$$

ou seja, a densidade volumétrica de cargas é a fonte da divergência do vetor $\mathbf{E}$. Onde houver ρ haverá nascimento de linhas de campo.

Exemplos de aplicação da lei de Gauss

a) Considere uma linha de cargas longa com densidade linear de carga λ. Determinar o vetor do campo elétrico $\mathbf{E}$ a uma distância radial r da linha de cargas (fig. 2.7).

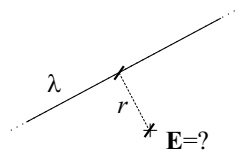


Figura 2.7: Linha de cargas longa (infinita).

Se houver campo, deverá possuir simetria axial e independer da posição ao longo da linha. O campo deverá ser do tipo radial, o único tipo compatível com a simetria axial. Calculando o fluxo de **E** por uma superfície virtual (superfície Gaussiana) cilíndrica (Fig. 2.8) coaxial à linha, teremos que considerar o fluxo por três superfícies, as superfícies superior, inferior e a superfície lateral. Nas duas primeiras o fluxo é nulo uma vez que o vetor **E** é perpendicular à normal. Resta apenas o fluxo pela superfície lateral onde o vetor **E** é paralelo à normal e possui módulo constante em todos os pontos dessa superfície.

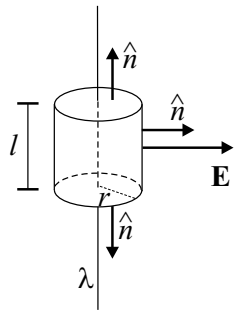


Figura 2.8: Fluxo de **E** em uma superfície cilíndrica coaxial à linha de cargas.

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = E \cdot 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}. \tag{2.11}$$

b) É um fato experimental que não existe campo elétrico no interior de um corpo condutor carregado. Mostremos que as cargas deverão estar na superfície, que o vetor do campo elétrico é perpendicular à mesma e o módulo vale σ/ε_0.

Tomemos uma superfície de integração no interior do condutor. O fluxo de **E** por essa superfície é nulo pois $\mathbf{E} = 0$ no interior, logo, não existe carga no interior da superfície de acordo com lei de Gauss. Essa superfície pode ser extendida até o limite interior do condutor de modo que, se houver cargas, elas deverão estar na superfície exterior.

Consideremos a possibilidade do vetor **E** não ser perpendicular à superfície externa. Se assim o for, haverá uma componente tangencial que empurará as cargas naquele ponto até que essa componente desapareça estabelecendo a condição eletrostática (cargas em repouso).

Calculemos agora o valor do módulo do vetor **E** na superfície do corpo (a uma distância infinitesimal desta superfície). Para isso consideremos uma pequena superfície cilíndrica de altura h que penetre na superfície do corpo mantendo o eixo do cilindro perpendicular à superfície (Fig 2.9). Só haverá fluxo na tampa circular externa uma vez que no interior o campo é nulo e na superfície lateral o vetor do campo é paralelo à superfície. No limite em que $h \to 0$ e sendo ΔS a área da tampa teremos

$$\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

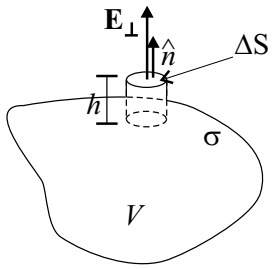


Figura 2.9: Fluxo de **E** em uma superfície cilíndrica perpendicular à superfície do corpo carregado.

$$\therefore E_{\perp} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.12}$$

2.4 O potencial elétrico de uma distribuição de cargas

Mostremos inicialmente que um campo vetorial $\mathbf{F}$ tal que $\mathbf{rotF} = 0$ é um campo conservativo e que existe uma função φ tal que $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\varphi$.

De acordo com teorema de Stokes

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rotF} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

e como $\mathbf{rotF} = 0$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Por outro lado, a integral fechada pelo caminho C pode ser calculada pela integral do ponto a ao ponto b pelo caminho C_1 mais a integral do ponto b ao ponto a pelo caminho $-C_2$ (Fig. 2.10).

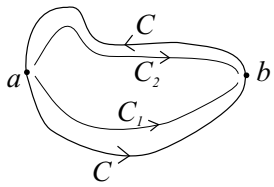


Figura 2.10: Dois caminhos possíveis para a integração de a até b.

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{a\ C_1}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_{b\ -C_2}^{a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\therefore \int_{a\ C_1}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{b\ -C_2}^{a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\therefore \int_{a\ C_1}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{a\ C_2}^{b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}.$$

Ou seja, independe do caminho! Em resumo, quando o $\mathbf{rotF} = 0$ qualquer caminho de integração entre a e b pode ser utilizado produzindo o mesmo valor para a integral. Isso caracteriza um campo conservativo.

Fixemos agora o ponto a e localizemos o ponto b pelo vetor posição $\mathbf{r}$ (Fig. 2.11).

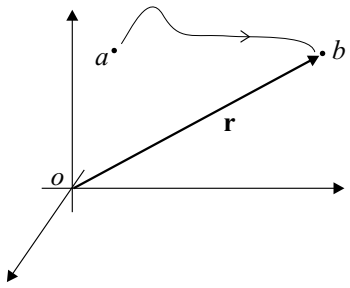


Figura 2.11: Integração de um ponto a fixo a um ponto b variável.

Como a integral independe do caminho, seu valor dependerá apenas do extremo livre $b(\mathbf{r})$, ou seja, podemos definir uma função $\varphi(\mathbf{r})$ com relação a a tal que

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{a}^{b(\mathbf{r})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \qquad \text{e} \qquad \varphi(\mathbf{r}) = \int_{a}^{b(\mathbf{r})} d\varphi.$$

Mas

$$d\varphi = \mathbf{grad}\varphi \cdot d\mathbf{l} \quad \therefore \quad \int_{a}^{b(\mathbf{r})} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{a}^{b(\mathbf{r})} \mathbf{grad}\varphi \cdot d\mathbf{l},$$

$$\therefore \mathbf{F} = \mathbf{grad}\varphi. \tag{2.13}$$

Notar que se definirmos $\phi = \varphi + cte$, $\mathbf{grad}\phi = \mathbf{grad}\varphi$ e teremos ainda o mesmo campo vetorial $\mathbf{F}$.

Mostremos agora que $\mathbf{rotE} = 0$.

Tomemos um sistema de referências fixo e posicionemos os elementos infinitesimais de carga de uma distribuição pelo vetor posição $\mathbf{r}'$. Utilizaremos o vetor $\mathbf{r}$ para posicionar o ponto onde queremos calcular o vetor do campo $\mathbf{E}$ (Fig. 2.12).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \rho dv$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

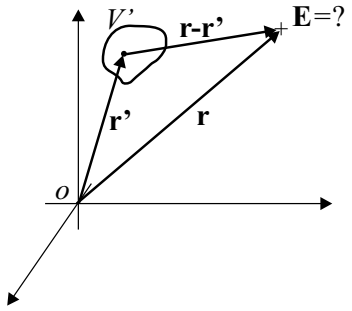


Figura 2.12: Pontos da distribuição de cargas e ponto do espaço onde deseja-se determinar **E**.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{V'} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \rho(r')dv'$$

$$\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

Como o rotacional de **E** é constituido por derivadas nas variáveis x, y, z e a integral é realizada nas variáveis x', y', z', o **rot** pode entrar na integral e o problema se reduzirá a calcular o

$$\mathbf{rot}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}.$$

Mas, de acordo com a expressão $\mathbf{rot}(\phi\mathbf{F}) = \phi\,\mathbf{rotF} + \mathbf{grad}\phi \times \mathbf{F}$,

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right) = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\mathbf{rot}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \mathbf{grad}_r\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

porém

$$\mathbf{rot}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \mathbf{rot}(\mathbf{r}) - \mathbf{rot}(\mathbf{r}') = 0 - 0$$

e

$$\mathbf{grad}_r\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -3\,\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5}.$$

Então

$$\mathbf{rot}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -3\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}') = 0$$

pois o produto vetorial de dois vetores paralelos entre si é nulo.

Como $\mathbf{rotE} = 0$ podemos escrever $\mathbf{E} = \mathbf{grad}\varphi$.

Por conveniência vamos definir

$$V = -\varphi = -\int\limits_{a}^{b(\mathbf{r})} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$$\therefore \mathbf{E} = -\mathbf{grad}V, \qquad V = -\varphi = -\int_a^{b(\mathbf{r})} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Usualmente, considera-se o ponto a no infinito e V é chamado de potencial eletrostático do ponto r com relação ao infinito ou simplesmente potencial eletrostático.

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V, \qquad V(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \tag{2.14}$$

Para uma carga pontual localizada em $\mathbf{r}_1$ (Fig. 2.13) teremos para o potencial em $\mathbf{r}$

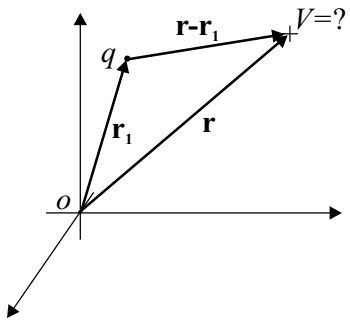


Figura 2.13: Potencial eletrostático em $\mathbf{r}$ de uma carga pontual em $\mathbf{r_1}$.

$$V = \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \cdot d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$$

onde escolhemos $d\mathbf{l}$ paralelo a $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$.

$$V = \int_R^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \cdot d\mathbf{R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_R^{\infty} \frac{dR}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}$$

$$\therefore V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}. \tag{2.15}$$

Assim, para um elemento de carga dq localizado em $\mathbf{r}'$ teremos

$$dV(\mathbf{r}) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Para uma distribuição discreta e contínua de cargas teremos

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} + \int_{V'} \frac{\rho(r')dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{S'} \frac{\sigma(r')ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \int_{C'} \frac{\lambda(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dl' \right]. \tag{2.16}$$

Se observarmos que a energia potencial associada a uma força conservativa é definida como sendo o trabalho realizado por um agente externo contra as forças do sistema para deslocar um corpo de um ponto de referência a um ponto **r**

$$W(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{ext} \cdot \mathbf{dl} \tag{2.17}$$

e sendo $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ a força produzida pelo sistema sobre uma carga de prova q, teremos $\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}$. Portanto

$$W(r) = \int_{\mathbf{ref}}^{\mathbf{r}} -q\mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = -q \int_{\mathbf{ref}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \tag{2.18}$$

Se a carga de prova é deslocada do infinito até o ponto **r** fica

$$\frac{W(\mathbf{r})}{q} = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V(\mathbf{r}). \tag{2.19}$$

Ou seja, o potencial do ponto **r** é o trabalho por unidade de carga para deslocar uma carga de prova do infinito até esse ponto. A unidade do potencial é (N.m)/C ou volt (V) e o vetor **E** tem como unidade N/C ou V/m.

Em problemas de determinação de campo elétrico, em geral é mais simples calcular primeiro o potencial e depois o campo usando a relação $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$.

Exemplo

Um disco de raio a tem densidade superficial de cargas σ constante. Determine o potencial e vetor **E** em um ponto qualquer do eixo perpendicular ao centro do disco (Fig. 2.14).

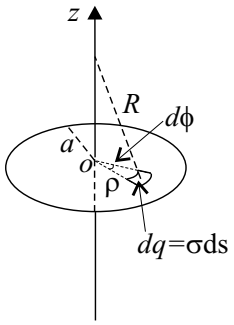


Figura 2.14: Potencial eletrostático sobre o eixo de um disco uniformemente carregado.

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{R} ds, \qquad R^2 = \rho^2 + z^2$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\phi}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} \left[(\rho^2 + z^2)^{1/2}\right]_0^a d\phi$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \left[(a^2 + z^2)^{1/2} - z\right] = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[(a^2 + z^2)^{1/2} - z\right]$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[(a^2 + z^2)^{1/2} - z\right] =$$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} - 1\right] \hat{\mathbf{z}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}}\right] \hat{\mathbf{z}}$$

Observe os limites $z \to 0$ e $z \to \infty$:

No caso $z \to 0$ ou $a \to \infty$

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \hat{\mathbf{z}}$$

corresponde a um plano infinito.

No caso $z \to \infty$

$$\frac{z}{(a^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{z}{z\left(\frac{a^2}{z^2} + 1\right)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{z^2} 1\right)^{1/2}}$$

mas expandindo em série

$$\left(1 + \frac{a^2}{z^2} 1\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2}{z^2}$$

$$\mathbf{E} \to \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{2z^2}\right)\right] \hat{\mathbf{z}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{a^2}{2z^2} \hat{\mathbf{z}} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \frac{\pi a^2}{\pi z^2} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{z^2} \hat{\mathbf{z}}$$

que é o valor do campo, a uma distância z sobre o eixo, de uma carga pontual q na origem.

2.5 Expansão em multipolos de uma distribuição de cargas

O potencial eletrostático de uma distribuição de cargas é dado exatamente por

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(r')dv'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Tomemos o ponto onde observamos o potencial a uma grande distância comparada com as dimensões da distribuição (Fig. 2.15).

Nesta situação

$$|\mathbf{r}| >> |\mathbf{r}'|,$$

e teremos então

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = [(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]^{-1/2} = \left[r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2\right]^{-1/2} =$$

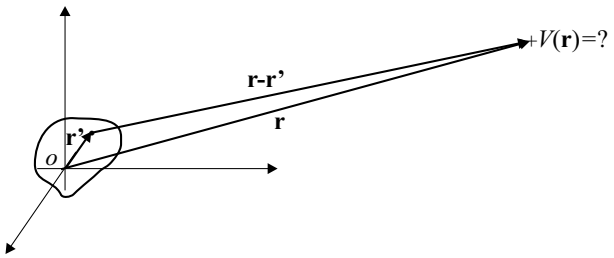


Figura 2.15: Potencial eletrostático a uma grande distância da distribuição.

$$\left[r^2\left(\left(1-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}\right)+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)\right]^{-1/2}=\frac{1}{r}\left[1-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

O termo entre colchetes é do tipo

$$(1+x)^{-1/2}, \qquad x << 1,$$

expandindo em série

$$(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2!}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^2+...$$

logo

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}=\frac{1}{r}\left\{1-\frac{1}{2}\left[-2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]+\frac{3}{8}\left[2\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^2+...\right\}$$

$$=\frac{1}{r}\left\{1+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\frac{3}{8}\left[4\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2}{r^4}+4\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\left(\frac{r'}{r}\right)^4\right]+...\right\}.$$

Mantendo os termos até a segunda ordem teremos

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-1}=\frac{1}{r}\left\{1+\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}+\frac{1}{2}\left[3\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2}{r^4}-\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]\right\}.$$

Substituindo na expressão do potencial fica

$$V(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\int_{V'}\rho(\mathbf{r}')dv'+\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\int_{V'}\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')dv'+\int_{V'}\frac{1}{2}\left[3\frac{(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')^2}{r^5}-\frac{r'^2}{r^3}\right]\rho(\mathbf{r}')dv'\right\}. \tag{2.20}$$

O momento de monopolo ou carga é

$$q=\int_{V'}\rho(\mathbf{r}')dv'. \tag{2.21}$$

O momento de dipolo é definido por

$$\mathbf{p} = \int_{V'} \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')dv'. \tag{2.22}$$

As outras integrais estão relacionados com os momentos de maior ordem (quadrupolo, octopolo etc.)

Observe que, na expressão do potencial, o primeiro termo (monopolo) tem dependência $1/r$, o segundo termo tem dependência $1/r^2$, o terceiro tem $1/r^3$ e assim por diante.

Vemos, portanto, que o potencial produzido por uma distribuição pode ser aproximado pela superposição de potenciais de monopolo, dipolo, etc. colocados na origem. Em muitos problemas de interesse, a aproximação de dipolo é suficiente. Como, por exemplo, ao considerarmos os efeitos de polarização em dielétricos.

O campo elétrico pode ser encontrado tomando-se o gradiente do potencial.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad}V(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q\,\mathbf{grad}\left(\frac{1}{r}\right) + \mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\mathbf{p}\right)\right].$$

Em coordenadas esféricas

$$\mathbf{grad}f(r) = -\frac{\partial V(\mathbf{r})}{\partial r}\hat{\mathbf{r}},$$

então

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} - \mathbf{grad}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\mathbf{p}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r^3}\mathbf{grad}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}) - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\mathbf{grad}\frac{1}{r^3}\right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3}{r^4}\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{p})\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^4} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right]. \tag{2.23}$$

A primeira parcela é o campo do monopolo e a segunda é o campo do dipolo.

2.5.1 O dipolo elétrico formado por cargas pontuais

O dipolo mais simples é aquele formado por duas cargas de sinais opostos separados por uma distância l, $l \to 0$ (Fig. 2.16).

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}$$

Tomemos esse dipolo alinhado com o eixo oz e calculemos o campo com expressão (2.23) observando que o momento de monopolo é nulo e que

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p} = ql\cos\theta$$

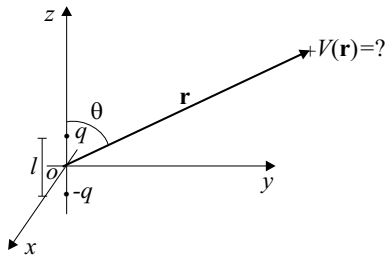


Figura 2.16: Dipolo formado por duas cargas pontuais

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3ql\cos\theta\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^3} - \frac{ql}{r^3}\hat{\mathbf{z}}\right].$$

Se decompormos $\mathbf{E}$ na componente radial e angular E_r e E_θ fica

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[3ql\cos\theta\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^3} - \frac{ql}{r^3}\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \frac{ql}{r^3}\text{sen }\theta\hat{a}_\theta\right]$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^3}\hat{a}_r + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3}\text{sen }\theta\hat{a}_\theta. \tag{2.24}$$

Observe que não existe componente na direção $\hat{a}_\phi$, que reflete a simetria axial do problema.

2.6 A equação de Poisson e a equação de Laplace

Vimos anteriormente que tanto o potencial como o campo eletrostático podem ser determinados a partir de integrais das distribuições de cargas, equações (2.16) e (2.5) uma vez que sejam dadas as distribuições. Existem, contudo, situações onde as distribuições não são conhecidas, sendo influenciadas, inclusive, pela presença de outras cargas no sistema. Essa é uma situação típica em problemas envolvendo corpos condutores. Portanto, não podemos encontrar o potencial e o campo eletrostático por integração direta, precisamos encontrar outro caminho.

Vimos que o campo eletrostático satisfaz uma equação de divergência $div\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$ e que, além disso, pode ser expresso como o negativo do gradiente do potencial, $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$.

Combinando as duas equações obtemos

$$div(\mathbf{grad}V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.25}$$

O divergente do gradiente é conhecido como o laplaceano que, em termos do operador nabla, pode ser escrito como

$$div\mathbf{grad}V = \nabla\cdot\nabla V = \nabla^2 V. \tag{2.26}$$

Em coordenadas cartesianas

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

em coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \tag{2.27}$$

e em coordenadas esféricas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\ \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\text{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2\ \theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}.$$

Assim, a equação (2.25) pode ser reescrita como

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.28}$$

que é uma equação diferencial em derivadas parciais conhecida como eq. de Poisson. Observe que ainda é necessário conhecer a distribuição para resolver a equação em todos os pontos.

Nos problemas de eletrostática envolvendo condutores, onde todas as cargas estão nas superfícies dos condutores ou na forma de cargas pontuais fixas, teremos $\rho = 0$ para a maioria dos pontos do espaço. Nessa região, a equação de Poisson simplifica para

$$\nabla^2 V = 0 \tag{2.29}$$

conhecida como equação de Laplace.

Essa equação possui duas propriedades importantes: a primeira é que a combinação linear de soluções dessa equação, também é uma solução e a segunda, conhecida como "teorema da unicidade", diz que duas soluções que satisfaçam as mesmas condições de contorno diferem entre si no máximo por uma constante.

Nota: as condições de contorno podem ser especificadas dando-se os valores dos potenciais nas superfícies dos condutores ou então dando os valores das derivadas normais do potencial nas superfícies dos condutores (campo na superfície).

Essas duas propriedades nos dizem que se encontrarmos uma solução geral para a equação de Laplace e ajustarmos essa solução para as condições de contorno do problema em questão, teremos certeza que essa solução é a única (outra solução diferenciará apenas de um valor constante e uma constante no potencial não altera o campo eletrostático).

2.7 Solução de problemas eletrostáticos

Resolver um problema eletrostático significa resolver a equação de Poisson, ou de Laplace se for o caso, de modo que sejam satisfeitas as condições de contorno do problema.

Iniciemos pela eq. de Laplace.

2.7.1 Equação de Laplace

Para problemas unidimensionais a eq. de Laplace torna-se bastante simples. Em coordenadas cartesianas podemos escolher uma das variáveis, x, y ou z e teremos que resolver a equação (para x por exemplo)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \Longrightarrow \frac{d^2 V}{dx^2} = 0. \tag{2.30}$$

Cuja solução é uma função linear

$$V(x) = ax + b \tag{2.31}$$

onde $\underline{a}$ e $\underline{b}$ serão determinados pelas condições de contorno.
Em coordenadas cilíndricas sendo $V = V(\rho)$ teremos que resolver

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dV(\rho)}{d\rho}\right) = 0 \tag{2.32}$$

$$\Longrightarrow \rho \frac{\partial V(\rho)}{\partial \rho} = a, \qquad a = cte \qquad \therefore dV(\rho) = \frac{a}{\rho} d\rho$$

$$\therefore V(\rho) = a \ln \rho + b, \qquad b = cte. \tag{2.33}$$

Em coordenadas esféricas sendo $V = V(r)$ teremos

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dV(r)}{dr}\right) = 0 \tag{2.34}$$

$$\therefore r^2 \frac{dV(r)}{dr} = a, \qquad a = cte$$

$$\therefore dV(r) = \frac{a}{r^2}\, dr \qquad \therefore V(r) = -\frac{a}{r} + b, \qquad b = cte. \tag{2.35}$$

Exemplo 1:

Suponhamos um capacitor de placas planas e paralelas de extensão infinita separadas por uma distância d (Fig. 2.17).

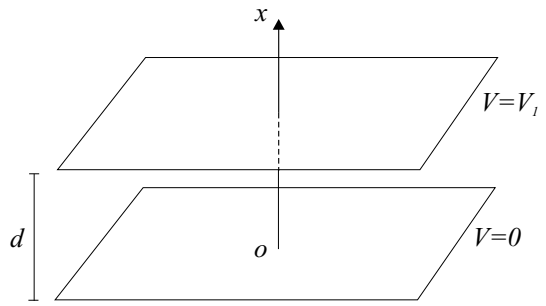


Figura 2.17: Capacitor de placas planas e paralelas.

Condições de contorno

$$\begin{aligned} x &= 0, \qquad V = 0 \ \text{ volt} \\ x &= d, \qquad V = V_1 \text{ volt.} \end{aligned}$$

Como apenas a variável **x** tem importância, teremos pela eq. (2.29),

$$V(x) = ax + b$$

e aplicando as condições de contorno

$$\begin{aligned} 0 &= a0 + b \Longrightarrow b = 0 \\ V_1 &= ad + 0 \Longrightarrow a = \frac{V_1}{d} \end{aligned}$$

$$\therefore V(x) = \frac{V_1}{d}\, x.$$

O vetor **E** será calculado como

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V(x) = -\frac{d}{dx}\, V(x)\, \hat{\mathbf{x}} = -\frac{V_1}{d}\hat{\mathbf{x}}.$$

Exemplo 2:

Suponhamos uma linha coaxial (cabo coaxial) infinita, condutora, de raio interno r_1 e raio externo r_2 cujo eixo coincide com o eixo oz (Fig. 2.18).

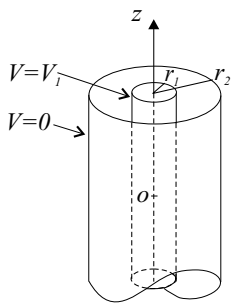


Figura 2.18: Linha coaxial ou capacitor coaxial.

Condições de contorno

$$V = \begin{cases} V_1 \text{ para } \rho = r_1 \\ 0 \text{ para } \rho = r_2 \end{cases}$$

A solução da equação de Laplace eq. (2.33) para $r_1 \leq \rho \leq r_2$ é

$$V(\rho) = a \ln \rho + b.$$

Aplicando as condições de contorno

$$\begin{cases} V_1 = a \ln r_1 + b \\ 0 = a \ln r_2 + b \end{cases}$$

então

$$V_1 = a \ln r_1 - a \ln r_2, \qquad \therefore a = \frac{V_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$$

e

$$b = -a \ln r_2.$$

Portanto,

$$V(\rho) = \frac{V_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}} \left(\ln \rho - \ln r_2 \right).$$

O vetor **E** será dado por

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\, V(\rho) = -\frac{dV}{d\rho} \hat{a}_\rho$$

$$\mathbf{E} = -\frac{V_1}{\ln (r_1/r_2)} \frac{1}{\rho} \hat{a}_\rho.$$

Exemplo 3:

Duas cascas esféricas, condutoras e concêntricas de raios r_b e r_a, $r_b > r_a$, foram carregadas aos potenciais V_b e V_a respectivamente. Determinaremos o potencial entre as cascas e fora delas observando que o problema possui simetria esférica.

Entre as duas cascas esféricas temos que resolver a eq. de Laplace com as condições de contorno

$$V = V_a|_{r=r_a} \qquad \text{e} \qquad V = V_b|_{r=r_b}.$$

Como $V = V(r)$ apenas

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 0$$

$$\therefore r^2 \frac{dV}{dr} = A, \qquad A = cte.$$

Então

$$dV = A \frac{dr}{r^2} \qquad \therefore V = -\frac{A}{r} + B.$$

Determinemos A e B a partir das condições de contorno

$$\begin{aligned} V_a &= -\frac{A}{r_a} + B \\ V_b &= -\frac{A}{r_b} + B. \end{aligned}$$

Subtraindo V_a de V_b fica

$$V_b - V_a = -A\left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a}\right)$$

$$\therefore A = -\left(V_b - V_a\right)\frac{r_a r_b}{r_a - r_b}.$$

Substituindo na expressão de V_b fica

$$V_b = \left(V_b - V_a\right)\frac{r_a r_b}{r_a - r_b}\frac{1}{r_b} + B$$

$$\therefore B = V_b - \left(V_b - V_a\right)\frac{r_a}{r_a - r_b} = \frac{V_b r_a - V_b r_b - V_b r_a + V_a r_a}{r_a - r_b}$$

ou

$$B = \frac{V_a r_a - V_b r_b}{r_a - r_b}.$$

Então

$$V = \left(V_b - V_a\right)\frac{r_a r_b}{r_a - r_b}\frac{1}{r} + \frac{V_a r_a - V_b r_b}{r_a - r_b}.$$

Fora da superfície esférica ($r \geq r_b$) temos as condições de contorno

$$V = V_b|_{r=r_b} \qquad \text{e} \qquad V = 0|_{r\to\infty}.$$

Então, substituindo em $V = -A/r + B$

$$V_b = -\frac{A}{r_b} + B$$

e

$$V_\infty = 0 = -\frac{A}{\infty} + B \Longrightarrow B = 0.$$

Sendo assim,

$$A = -r_b V_b \qquad \text{e} \qquad V = \frac{r_b V_b}{r}.$$

2.7.2 Método de separação de variáveis

Quando o problema envolve mais que uma variável, aplica-se o método de separação de variáveis para resolver a equação de Laplace.

Coordenadas cartesianas

Em coordenadas cartesianas temos que resolver

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Suponhamos que seja possível escrever o potencial como o produto de três funções independentes ou seja

$$V = XYZ$$

onde

$$\begin{aligned} X &= X(x) \\ Y &= Y(y) \\ Z &= Z(z). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Substituindo na eq. de Laplace fica

$$YZ\,\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ\,\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY\,\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0,$$

dividindo por $V = XYZ$ fica

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0.$$

A primeira parcela é função apenas de x, a segunda é função apenas de y e a terceira apenas de z, portanto

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \alpha^2, \qquad \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \beta^2, \qquad \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \gamma^2, \tag{2.37}$$

sendo α, β e γ as "constantes de separação" e

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0.$$

Cada uma dessas equações tem solução de forma exponencial do tipo

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \alpha^2 X \Longrightarrow X = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = \beta^2 Y \Longrightarrow Y = C_3 e^{\beta y} + C_4 e^{-\beta y}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \gamma^2 Z \Longrightarrow Z = C_5 e^{\gamma z} + C_6 e^{-\gamma z}.$$

Logo

$$V(x,y,z) = \left(C_1 e^{-\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}\right)\left(C_3 e^{\beta y} + C_4 e^{-\beta y}\right)\left(C_5 e^{\gamma z} + C_6 e^{-\gamma z}\right), \tag{2.38}$$

e as constantes $C_1 ... C_6$ são determinas com as condições de contorno particulares para cada problema.

Coordenadas cilíndricas

Em coordenadas cilíndricas, o método de separação de variáveis propõe que o potencial seja escrito como o produto

$$V(\rho, \phi, z) = P(\rho) \times \Phi(\phi) \times Z(z).$$

Substituindo na eq. de Laplace (2.27)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

fica

$$\Phi Z\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + PZ\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + P\Phi\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$

$$\therefore \frac{1}{P\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0.$$

Observando que a primeira parcelas é função apenas de ρ, a segunda de ρ e ϕ e a terceira de z, teremos

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2, \qquad k \text{ é uma constante} \tag{2.39}$$

e

$$\frac{1}{P\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\Phi^2} = -k^2$$

$$\therefore \frac{\rho}{P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) + \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\Phi^2} = -k^2\rho^2$$

ou

$$\frac{\rho}{P}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) + k^2\rho^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\Phi^2}.$$

Como o termo da direita é função apenas de ϕ deveremos ter

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -n^2 \tag{2.40}$$

e

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) + (k^2\rho^2 - n^2)P = 0 \tag{2.41}$$

onde a constante de separação foi convenientemente escrita como $-n^2$.

A solução de (2.39) é uma combinação de exponenciais

$$Z = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz} \qquad \text{para } k \neq 0$$

ou

$$Z = C_1 z + C_2 \qquad \text{para } k = 0. \tag{2.42}$$

A solução de (2.40) é

$$\Phi = C_3\cos(n\phi) + C_4\text{sen}(n\phi) \qquad \text{para } n \neq 0 \text{ e inteiro}$$

ou

$$\Phi = C_3\Phi + C_4 \qquad \text{para } n = 0. \tag{2.43}$$

A solução de (2.41) é bem mais complexa. Para k real a solução é uma combinação de funções especiais conhecidas como funções de Bessel de primeira e de segunda espécies (ou função de Neumann). Essas funções são oscilatórias e tendem a zero quando o produto $k\rho \longrightarrow \infty$.

Solução do tipo

$$P = C_5 J_n(k\rho) + C_6 N_n(k\rho) \qquad \text{para}\, k \neq 0$$

ou

$$P = C_5\rho^n + C_6\rho^{-n} \qquad \text{para } k = 0, \tag{2.44}$$

onde

$J_n\,(k\rho)$ = função de Bessel de 1ª espécie de ordem n,

$N_n\,(k\rho)$ = função de Bessel de 2ª espécie de ordem n ou função de Neumann.

Nota: $J_n(0) = 0$ e $N_n(0) \longrightarrow \infty$ (singularidade).

Coordenadas esféricas

Em coordenadas esféricas podemos separar as variáveis supondo

$$V = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi),$$

$$Y(\theta,\varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \text{ são chamados de harmônicos esféricos.}$$

A substituição na eq. de Laplace produz:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - n(n+1)R = 0. \tag{2.45}$$

Pode-se mostrar que somente a forma $n(n+1)$, para a constante de separação, produz soluções físicas e

$$\frac{1}{\text{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\text{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} + n(n+1)\,Y = 0. \tag{2.46}$$

A solução da equação radial (2.45) é

$$R(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n-1}.$$

e a equação (2.46) pode ser separada em duas equações cujas soluções são:

$$\Phi = C_3\cos(m\phi) + C_4\text{sen}(m\phi) \qquad \text{para}\, m \neq 0$$

ou

$$\Phi = C_3\phi + C_4 \qquad \text{para } m = 0 \tag{2.47}$$

e

$$\Theta = C_5\, P_n^m\,(\cos\theta) + C_6\, Q_n^m\,(\cos\theta). \tag{2.48}$$

$P_n^m(\cos\theta)$ e $Q_n^m\,(\cos\theta)$ são as funções associadas de Lengendre do primeiro e segundo tipo respectivamente.

2.7.3 Resolução de problemas eletrostáticos pelo método das imagens

Já afirmamos que a solução da equação de Laplace é única para um conjunto de condições de contorno especificado e desejamos resolver um determinado problema sendo dada as condições de contorno.

Suponhamos agora que um outro problema cuja solução **seja conhecida** seja capaz de simular o problema original (e suas condições de contorno) em uma parte do espaço. Nessa região do espaço, onde a simulação é possível, os dois problemas terão a mesma solução garantida pelo teorema da unicidade. Vejamos um exemplo:

Problema original: considere uma carga pontual q a uma distância d de uma parede condutora infinita cujo potencial é zero (Fig. 2.19). Determinar o potencial nos pontos fora da parede.

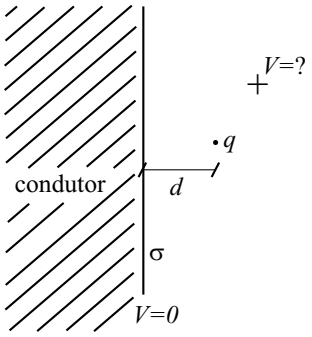


Figura 2.19: Carga pontual defronte de uma parede condutora e aterrada (potencial zero).

A carga q induzirá, no condutor, cargas com sinais opostos ao sinal de q e o potencial nos pontos à direita da parede será a superposição do potencial da carga q e do potencial das cargas induzidas no condutor.

Seja σ a densidade superficial de cargas induzidas, q produz V_1 e σ produz V_2. O potencial resultante será a superposição

$$V = V_1 + V_2.$$

Em todos os pontos fora do condutor e da carga q vale a equação de Laplace $\nabla^2 V = 0$.

Vejamos agora um outro problema que é capaz de simular o problema original (e as condições de contorno) na região do espaço à direita da parede. É o problema que obtemos ao colocar uma carga imagem $-q$ a uma distância d à esquerda de um plano imaginário que fará o papel do contorno (fronteira) do problema original (Fig. 2.20). O potencial produzido por essas duas cargas vale

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right).$$

Sobre o plano, $r_1 = r_2$ e teremos $V = 0$ que é a condição de contorno do problema original. Assim, este problema terá como solução, esse mesmo potencial para o lado direito do plano.

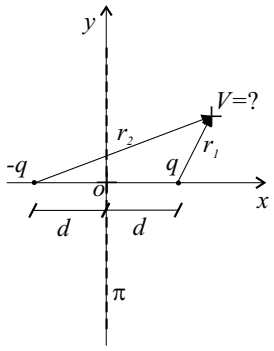


Figura 2.20: Carga pontual q defronte de um plano e sua imagem -q.

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}} - \frac{q}{\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}\right]$$

e teremos $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$ em qualquer ponto do espaço à direita da parede.
Sobre o plano, $x = 0$ o vetor $\mathbf{E}$ será dado por

$$\mathbf{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}\hat{\mathbf{x}}.$$

Como a densidade de carga na superfície do condutor é dada por $\sigma = \varepsilon_0 E$ teremos

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi}\frac{2d}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Podemos verificar por integração direta que a carga induzida na superfície da parede vale $-q$.

$$q_{ind} = \int_S \sigma ds = -\frac{q}{4\pi}2d\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy\ dz}{(d^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Integrando em coordenadas polares com $r^2 = y^2 + z^2$ e $dydz = rd\theta dr$ fica

$$q_{ind} = -\frac{q}{4\pi}2d\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{rd\theta dr}{(d^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{q}{4\pi}2d\,2\pi\int_0^{\infty}\frac{rdr}{(d^2+r^2)^{3/2}}$$

$$= -q\,d\left[\frac{-1}{(d^2+r^2)^{1/2}}\right]_0^{\infty} = -q\frac{d}{d} = -q.$$

Considere agora que uma linha de cargas infinita com densidade linear de cargas λ esteja a uma distância d de uma parede condutora no potencial nulo (Fig. 2.21).

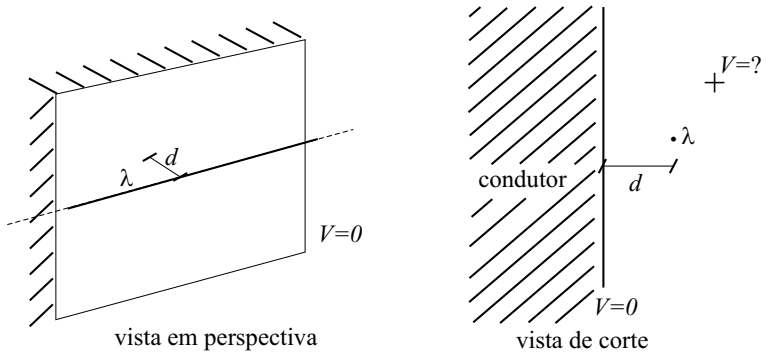


Figura 2.21: Linha de cargas defronte a uma parede aterrada (potencial zero).

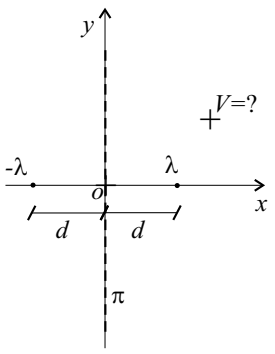


Figura 2.22: Linha de cargas defronte a um plano e respectiva imagem.

O problema que contém uma linha de cargas imagem é mostrado na figura (Fig. 2.22).

Para uma linha de cargas infinita, a diferença de potencial entre um ponto r e um ponto de referência pode ser calculada como

$$V(r) - V(ref) = \int_{r}^{r_{ref}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Usando a lei de Gauss para calcular $\mathbf{E}$ (veja a equação (2.11)) obtemos

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\hat{\mathbf{R}},$$

então

$$V(r) - V(ref) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r}^{r_{ref}} \frac{\hat{\mathbf{R}}}{R} \cdot \mathbf{dR} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_{ref}}{r}. \tag{2.49}$$

O potencial em um ponto P do espaço será a superposição dos potenciais das linhas (Fig. 2.23) e fazendo $V_{ref} = 0$ fica

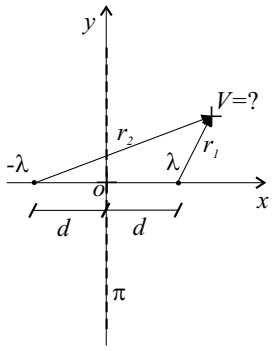


Figura 2.23: Potencial produzido pelas duas linhas de cargas.

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_{ref}}{r_1} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_{ref}}{r_2}$$
$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Observe que para $r_1 = r_2$, ou seja, no plano equidistante das linhas de cargas $V(r) = 0$, que é a condição de contorno do problema original.

As superfícies equipotenciais são definidas por $V(r) = cte$ que implica $r_1/r_2 = k = cte$. Observe que $0 < k < 1$ significa pontos à direita do plano.

Então, sendo $r_1^2 = (x-d)^2 + y^2$ e $r_2^2 = (x+d)^2 + y^2$

$$\frac{(x-d)^2 + y^2}{(x+d)^2 + y^2} = k^2$$

define a equação de uma linha equipotencial (Fig. 2.24).

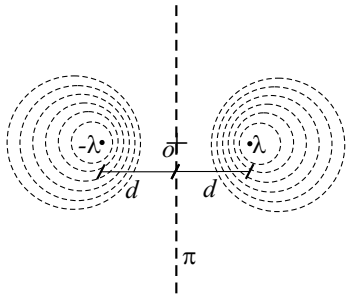


Figura 2.24: Linhas equipotenciais produzidas pelas duas linhas de cargas.

Desenvolvendo (veja o exemplo 7 adiante) encontraremos

$$\left[x - \frac{d(k^2+1)}{1-k^2}\right]^2 + y^2 = \frac{4d^2k^2}{(1-k^2)^2}$$

que é uma equação do tipo

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R_0^2,$$

eq. do círculo com centro em $(x_0, 0)$.

Ou seja, as superfícies equipotenciais desse sistema de duas linhas de carga são cilíndricas com seções retas circulares centradas em x_0 com raio R_0.

Estamos aptos, agora, a resolver o problema de um condutor cilíndrico colocado em frente de uma parede condutora com o eixo paralelo à parede e com um potencial $V = V_1$ com relação à parede (Fig. 2.25). R_0 será o raio do cilindro e x_0 será a distância do centro à parede. Fora dos condutores o problema é idêntico ao das duas linhas de cargas e o potencial pode ser calculado pela expressão anterior com o valor adequado de λ. R_0, d e x_0 relacionados pelas equações acima.

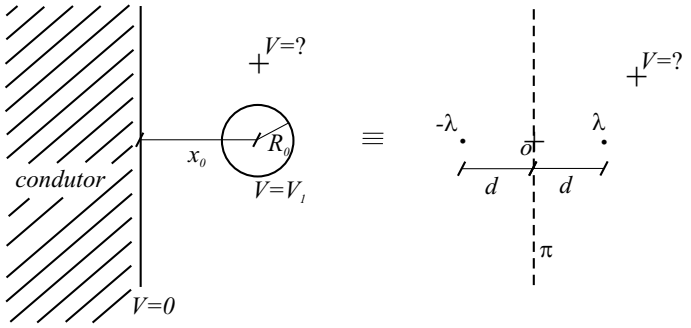


Figura 2.25: Condutor cilíndrico em frente a uma parede aterrada.

2.7.4 Método iterativo para problemas bidimensionais (método de exaustão)

Tomemos a equação de Laplace em coordenadas cartesianas em duas variáveis apenas, digamos x e y.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{2.50}$$

Tomemos um ponto do espaço cujo potencial vale V_0 e quatro pontos equidistantes cujos potenciais valem V_1, V_2, V_3 e V_4 (Fig. 2.26).

Em a teremos

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a \approx \frac{V_1 - V_0}{h},$$

em c teremos

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c \approx \frac{V_0 - V_3}{h}$$

e no ponto central, o, teremos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_a - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_c}{h} = \frac{V_1 - V_0 - V_0 + V_3}{h^2}.$$

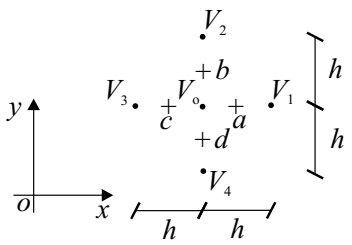


Figura 2.26: Potenciais em quatro pontos equidistantes de um ponto central.

Analogamente para a variável y

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \approx \frac{V_2 - V_0 - V_0 + V_4}{h^2}.$$

Substituindo em (2.50)

$$\frac{V_1 - 2V_0 + V_3}{h^2} + \frac{V_2 - 2V_0 + V_4}{h^2} \approx 0$$

$$\therefore V_0 \approx \frac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_3 + V_4). \tag{2.51}$$

Ou seja, o potencial no centro é aproximadamente igual à média dos potenciais vizinhos. Quanto mais próximos os pontos, melhor a aproximação. Podemos usar esse fato para calcular o potencial iterativamente a partir dos potenciais nos contornos.

Exemplo 4:

Considere a caixa quadrada (Fig. 2.27) onde as paredes são mantidas nos potenciais indicados. Note que a tampa superior não toca nas laterais mas está tão proxima quanto se queira.

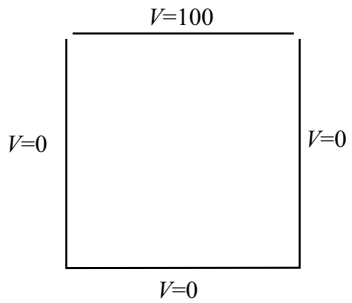


Figura 2.27: Caixa quadrada condutora com três paredes aterradas e tampa no potencial V=100

.

Desejamos encontrar os potenciais em alguns pontos no interior da caixa.

Dividamos o interior da caixa em 16 quadrados (o número de divisões depende do número de pontos desejados) por simplicidade (Fig. 2.28).

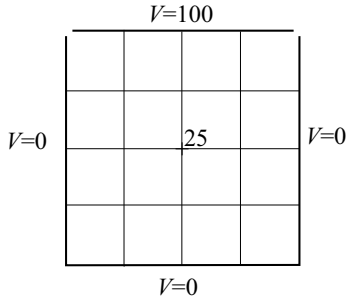


Figura 2.28: Grade para o cálculo dos potenciais na interseção das linhas.

No centro (Fig. 2.28) estimaremos o potencial como sendo

$$\frac{100+0+0+0}{4} = 25.$$

Tomemos o quadrado superior esquerdo ou o direito (Fig. 2.29) assumindo que o potencial no"gap" seja a média entre 0 e 100, ou seja, 50.

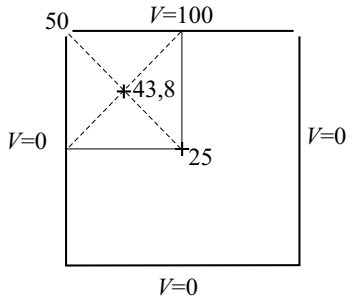


Figura 2.29: Potenciais em quatro pontos equidistantes de um ponto central.

Tomando a média na diagonal (Fig. 2.29) teremos

$$\frac{100+50+25+0}{4} = 43,8.$$

No quadrado inferior esquerdo (Fig. 2.30) teremos

$$\frac{25+0+0+0}{4} = 6,2.$$

Assim, ficamos com (Fig. 2.31)

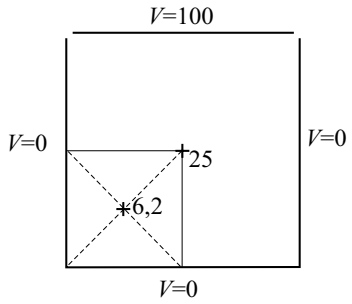


Figura 2.30: Potenciais em quatro pontos equidistantes de um ponto central.

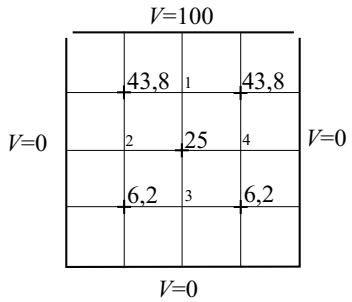


Figura 2.31: Potenciais em quatro pontos equidistantes do ponto central.

Nos outros 4 pontos

$$1: \qquad \frac{100+25+43,8+43,8}{4} = 53,2$$

$$2 \text{ e } 4: \qquad \frac{25+0+43,8+6,2}{4} = 18,8$$

$$3: \qquad \frac{25+6,2+6,2+0}{4} = 9,4$$

Com todos os valores calculados, refazemos os cálculos linha por linha, começando com os pontos onde $V = 43,8$ teremos a substituição por

$$\frac{53.2+18,8+100+0}{4} = 43,0,$$

depois $V = 53,2$ será substituido por

$$\frac{43,0+43,0+100+25}{4} = 52,8.$$

Passamos para a linha seguinte e procedemos do mesmo modo. Algumas iterações são necessárias até que a variação do potencial esteja dentro de uma faixa de erro tolerável.

Para que o potencial seja o mais próximo possível do valor verdadeiro que seria obtido pela resolução análitica, é necessário tomar maior quantidade de pontos ("grade fina").

2.7.5 Solução da equação de Poisson

Desejamos agora determinar o potencial eletrostático em uma região do espaço onde exista uma densidade volumétrica de cargas através da resolução da equação de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Trata-se de uma equação diferêncial não homogênea cuja solução geral será a solução da equação homogênea somada com uma solução particular: sol. geral = sol. da eq. de Laplace + sol. particular.

A solução particular pode ser encontrada pela expressão

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

sendo a integração feita na região onde a densidade de cargas é conhecida (não inclui as cargas induzidas nas superfícies dos condutores pois são desconhecidas).

Ao ajustarmos as constantes de integração da solução geral, de modo a satisfazer as condições de contorno, encontraremos os potenciais em todos os pontos do espaço e então poderemos calcular as densidades de carga na superfície dos condutores.

2.8 Campos eletrostáticos em meios dielétricos

Um dielétrico ou isolante é caracterizado pela impossibilidade de movimentação de cargas livres, ou seja, os portadores de carga não são livres para movimentarem-se sob a ação de um campo elétrico externo aplicado. Contudo, pode existir um efeito de separação das cargas que constituem a matéria quando esta é submetida a um campo elétrico externo. Tal efeito é chamado de *polorização*. A polarização contribui para uma mudança no valor do campo elétrico, no interior e no exterior, inicialmente aplicado. Além disso, existem substâncias que exibem polarização espontânea, ou seja, substâncias que estão permanentemente polarizadas mesmo na ausência de aplicação de um campo externo.

2.8.1 O vetor polarização e o vetor deslocamento elétrico

Assumiremos que a separação entre as cargas elétricas seja suficientemente pequena para que um pequeno elemento de volume $\triangle v$ seja caracterizado por um momento de dipolo $\triangle \mathbf{p}$ dado por

$$\triangle \mathbf{p} = \int_{\triangle v} \mathbf{r} dq. \tag{2.52}$$

Definiremos o vetor polarização $\mathbf{P}$ por

$$\mathbf{P} = \lim_{\triangle v \to 0} \frac{\triangle \mathbf{p}}{\triangle v},$$

$\triangle v$ pequeno do ponto de vista macroscópico, ou seja, a polarização é o momento de dipolo por unidade de volume.

Sabemos que os dipolos produzem potencial eletrostático e campo eletrostático em pontos distantes (Fig. 2.32) conforme as equações (2.20 e 2.23). Assim, o potencial eletrostático produzido por $\triangle\mathbf{p}$ será dado por:

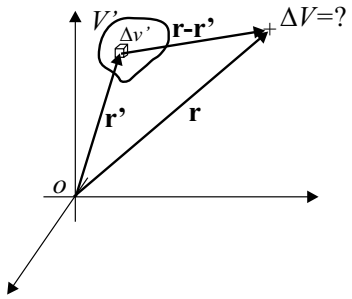


Figura 2.32: Potencial produzido pelo momento de dipolo elétrico do elemento de volume.

$$\triangle V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\triangle\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{P}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\triangle v'$$

com

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

O potencial produzido por todo o dielétrico polarizado será então

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dv'. \tag{2.53}$$

Podemos transformar essa integral numa forma mais conveniente observando que

$$\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = \mathbf{grad}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

onde

$$\mathbf{grad}'\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x'}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial\varphi}{\partial z'}\hat{\mathbf{z}}.$$

Teremos então

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\mathbf{grad}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'.$$

Lembrando a identidade

$$div'(\varphi\mathbf{F}) = \varphi div'\mathbf{F} + (\mathbf{grad}'\varphi)\cdot\mathbf{F},$$

fazendo $\mathbf{F} = \mathbf{P}(\mathbf{r}')$ e $\varphi = 1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ ficamos com

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\left[div'\left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}div'\mathbf{P}(\mathbf{r}')\right]dv'$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V'} div'\left(\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dv' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V'}\frac{div'\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'.$$

Usando o teorema da divergência na primeira integral teremos

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{S'}\frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V'}\frac{[-div'\mathbf{P}(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' \tag{2.54}$$

Observe que esse potencial está sendo calculado como se houvesse uma densidade superficial de cargas σ_P e uma densidade volumétrica ρ_P

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{S'}\frac{\sigma_P ds'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V'}\frac{\rho_P dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \tag{2.55}$$

o que nos leva a definir uma densidade superficial de cargas de polarização

$$\sigma_P = \mathbf{P}(\mathbf{r}')\cdot\hat{\mathbf{n}} \tag{2.56}$$

e uma densidade volumétrica de cargas de polarização

$$\rho_P = -div'\,\mathbf{P}(\mathbf{r}'). \tag{2.57}$$

Como o dielétrico é neutro, a soma de todas as cargas de polarização deve ser nula como podemos constatar:

$$\int\limits_{S'}\sigma_P ds' + \int\limits_{V'}\rho_P dv' = \int\limits_{S'}\mathbf{P}\cdot\hat{n}ds' + \int\limits_{V'} -div'\mathbf{P}dv'$$

$$= \int\limits_{V'} div'\mathbf{P}dv' - \int\limits_{V'} div'\mathbf{P}dv' = 0.$$

Podemos calcular o campo elétrico tomando o gradiente da equação (2.55)

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad}\,V(\mathbf{r}) = -\mathbf{grad}\left\{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int\limits_{S'}\frac{\sigma_P(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}ds' + \int\limits_{V'}\frac{\rho_P(\mathbf{r}')dv'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right]\right\}.$$

Como as integrais são feitas na variável "linha" e o **grad** é calculado na variável"sem linha", o mesmo entra na integral e agirá apenas em $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$.

Como

$$\mathbf{grad}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3},$$

teremos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{S'}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\sigma_P(\mathbf{r}')ds' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V'}\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\rho_P(\mathbf{r}')dv'. \tag{2.58}$$

Obs: Calculamos $V(\mathbf{r})$ e $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ para pontos fora do material dielétrico. Contudo, é possível mostrar que essas mesmas expressões fornecem o potencial e o campo macroscópico no interior do dielétrico.

2.9 Lei de Gauss em um dielétrico

Consideremos que no interior de um meio dielétrico existam condutores carregados com cargas q_1, q_2, q_3...(Fig. 2.33). Se tomarmos uma superfície gaussiana no interior do dielétrico envolvendo alguns desses condutores teremos

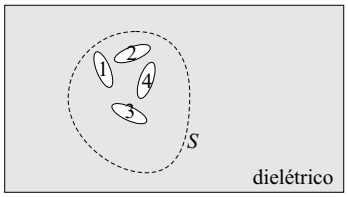


Figura 2.33: Condutores carregados envolvidos por uma superfície gaussiana no interior de um dielétrico.

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q + Q_P) \tag{2.59}$$

Q = carga livre total $(q_1 + q_2 + q_3 + ...)$
Q_P = cargas de polarização

$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3...} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds + \int_V (-div\mathbf{P})\, dv \tag{2.60}$$

V = volume do dielétrico no interior de S.
$S_1, S_2, S_3...$ = superfícies dos condutores.

Se utilizarmos o teorema da divergência na segunda integral de (2.60)

$$\int_V -div\mathbf{P} dv = -\int_{S+S_1+S_2+S_3...} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

então

$$Q_P = \int_{S_1+S_2+S_3...} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds - \int_{S+S_1+S_2+S_3...} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = -\oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds.$$

Substituindo na eq. (2.59)

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q - \oint_S \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds\right)$$

$$\therefore \oint_S (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = Q.$$

Definimos o vetor deslocamento elétrico $\mathbf{D}$ como

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{2.61}$$

e a lei de Gauss fica

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = Q. \tag{2.62}$$

Ou seja, o fluxo do vetor $\mathbf{D}$ é igual à **carga livre** no interior da superfície por onde se calcula o fluxo.

Observe que, no vácuo, $\mathbf{P} = 0$ e $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$.

Se escrevermos $Q = \int_V \rho dv$ e aplicarmos o teorema da divergência em (2.62) fica

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_V div\mathbf{D} dv = \int_V \rho dv, \qquad \forall\, V$$

$$\therefore div\mathbf{D} = \rho, \qquad \rho \equiv \text{densidade de carga livre.} \tag{2.63}$$

Da equação (2.61) podemos explicitar $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{D} - \frac{1}{\varepsilon_0}\mathbf{P}.$$

Vemos então que o campo elétrico no interior do dielétrico possui duas contribuições, uma devida a carga livre (representada por $\mathbf{D}/\varepsilon_0$) e uma devida as cargas induzidas (representada por $\mathbf{P}/\varepsilon_0$).

2.9.1 A permissividade elétrica e a constante dielétrica

A polarização em um ponto de um material dielétrico depende do campo elétrico total naquele ponto. O grau de polarização depende não só da intensidade do campo elétrico como também das propriedades das moléculas que constituem o material dielétrico. Experimentalmente, pode-se determinar a relação $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{E})$. Em geral, $\mathbf{E}$ varia de ponto para ponto e consequentemente também varia a polarização $\mathbf{P}$.

Na maioria dos materiais, a polarização desaparece quando $\mathbf{E}$ desaparece (materiais que não possuem polarização espontânea) e, além disso, se o material é isotrópico (não existe direção privilegiada), a polarização $\mathbf{P}$ tem a mesma direção do vetor $\mathbf{E}$ que a está causando. Supondo que o material seja homogêneo, ou seja, todos os pontos possuem as mesmas propriedades, então um mesmo valor de $\mathbf{E}$ produzirá uma mesma polarização $\mathbf{P}$ em qualquer ponto. Podemos escrever

$$\mathbf{P} = \chi(E)\mathbf{E}, \qquad \chi(E) \equiv \text{susceptibilidade elétrica.} \tag{2.64}$$

Muitos materiais como fluidos, sólidos amorfos, policristalinos e alguns cristais estão incluidos nessa categoria.

Substituindo (2.64) em (2.61) fica

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi(E)\mathbf{E} = [\varepsilon_0 + \chi(E)]\,\mathbf{E}$$

ou

$$\mathbf{D} = \varepsilon(E)\mathbf{E}, \qquad \varepsilon(E) = \varepsilon_0 + \chi(E) \tag{2.65}$$

$\varepsilon(E)$ é a permissividade do material. No vácuo, $\chi = 0$, portanto, $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Verifica-se experimentalmente que, se os campos não forem muito intensos, a permissividade praticamente não depende de **E** em muitos materiais. Esses materiais são ditos lineares e nesse caso ε é constante.

Lidaremos apenas com materiais homogêneos, isotrópicos e lineares. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \chi\mathbf{E}, \qquad & \chi \text{ constante}, \\ \mathbf{D} \;=\; \varepsilon\mathbf{E}, & \\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \chi. & \end{aligned} \tag{2.66}$$

Definimos também a permissividade relativa ou constante dielétrica como a relação entre a permissividade do meio e a permissividade do vácuo

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \qquad \varepsilon_0 = 8,8510^{-12} \text{ F/m}. \tag{2.67}$$

Veja a seguir as permissividades elétricas relativas de alguns materiais:

	Valores típicos de ε_r	Rigidez dielétrica, volts/m
Ar	$1,0006$	3.10^6
Poliestireno	$2,7$	
Borracha	$3,0$	$(14-40)\times 10^6$
Plexiglass	$3,4$	
Nylon (sólido)	$3,8$	16×10^6
Quartzo	5	
Baquelite	5	
Fórmica	6	
Mica	6	$(5-20)\times 10^6$
Água (pura)	81	

Outra constante importante para caracterizar um dielétrico é o valor do campo elétrico máximo a que o mesmo pode ser submetido sem perder a isolação, conhecida como constante de rigidez dielétrica.

2.10 As condições de contorno

Frequentemente um material dielétrico de um determinado tipo faz fronteira com outro mateiral dielétrico de outro tipo.

É de se esperar que os vetores **E**, **P** e, consequentemente, o vetor **D** modifiquem-se na passagem de um meio para o outro. As formas com que esses vetores se modificam é que são conhecidas como as *condições de contorno* ou *condições de fronteira*.

Tomemos a interface entre dois meios 1 e 2 e uma superfície gaussiana cilíndrica conforme a figura (Fig. 2.34).

A carga livre no interior do cilindro vale

$$\sigma\Delta s + (\rho_1 + \rho_2)\Delta s\frac{h}{2},$$

e tomando $h \to 0$ ficaremos apenas com $\sigma\Delta s$.

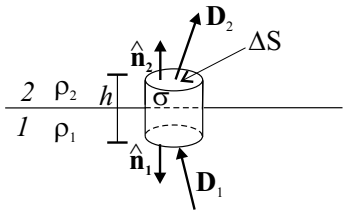


Figura 2.34: Superfície gaussiana cilíndrica na fronteira entre dois meios dielétricos.

Aplicando a lei de Gauss para $\mathbf{D}$ eq. (2.62) na superfície cilíndrica teremos (desprezando o fluxo lateral, pois $h \to 0$)

$$\mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \Delta s \, + \, \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \Delta s = \sigma \Delta s$$

mas $\hat{\mathbf{n}}_2 = -\hat{\mathbf{n}}_1$

$$\therefore \left(\mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 - \, \mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2\right) \Delta s = \sigma \Delta s$$

quando $h \to 0$, $\hat{\mathbf{n}}_2$ acaba sendo a normal à interface, portanto

$$D_{2n} - \, D_{1n} = \sigma \tag{2.68}$$

$D_{2n} \equiv$ componente normal de $\mathbf{D}_2$
$D_{1n} \equiv$ componente normal de $\mathbf{D}_1$.

Ou seja, a descontinuidade na componente normal de $\mathbf{D}$ é a densidade superficial de cargas. Portanto, se não houver σ, não haverá descontinuidade na componente normal do vetor deslocamento elétrico.

Vejamos a componente tangencial:

Tomemos um caminho retangular e integremos $\mathbf{E}$ ao longo desse caminho conforme a figura (Fig. 2.35).

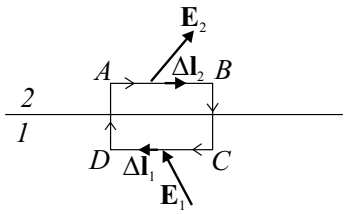


Figura 2.35: Caminho de integração retangular na fronteira entre dois meios dielétricos.

Tomemos $\overline{AD}$ e $\overline{BC} \to 0$, como

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \equiv 0$$

$$\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{\Delta l}_2 + \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{\Delta l}_1 = 0$$

mas $\mathbf{\Delta l}_2 = -\mathbf{\Delta l}_1$

$$\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{\Delta l}_2 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{\Delta l}_2 = 0$$

$\mathbf{\Delta l}_2$ sendo a um vetor tangencial à fronteira quando $\overline{AD}$ e $\overline{BC} \to 0$

$$\therefore E_{2t} - E_{1t} = 0$$

ou

$$E_{2t} = E_{1t}. \tag{2.69}$$

Ou seja, a componente tangencial de $\mathbf{E}$ é contínua na fronteira dos dois dielétricos.
Se o dielétrico for linear, $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, portanto

$$\frac{D_{2t}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1}. \tag{2.70}$$

No caso em que um dos meios seja condutor, digamos o meio 1, teremos

$$D_{1n} = 0 \qquad \text{e} \qquad E_{1t} = 0$$

pois não existe $\mathbf{E}$ no interior de um condutor. Portanto,

$$D_{2n} = \sigma \qquad \text{e} \qquad E_{2t} = 0. \tag{2.71}$$

Observe também que o potencial é uma função contínua na fronteira entre dois meios (Fig. 2.36), pois sendo a variação do potencial dada por $\Delta V = \mathbf{E} \cdot \mathbf{\Delta l}$, a menos que $\mathbf{E}$ seja infinito na fronteria (e não há razão para isso), $\Delta V \to 0$ quando $\mathbf{\Delta l} \to 0$.

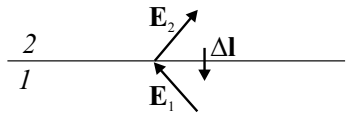


Figura 2.36: Continuidade do potencial na fronteira.

Em função das equações anteriores, vejamos como calcular a mudança de direção de uma linha de força de um campo eletrostático na fronteira entre dois meios dielétricos lineares (Fig. 2.37).

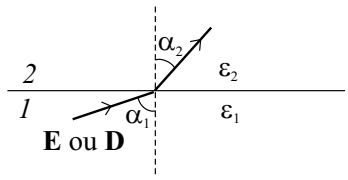


Figura 2.37: Mudança na direção da linha de campo na fronteira entre dois meios dielétricos.

Temos que

$$E_{1t} = E_{2t}$$

e

$$D_{1n} = D_{2n}$$

ou seja,

$$E_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = E_2 \operatorname{sen} \alpha_2$$

$$D_1 \cos \alpha_1 = D_2 \cos \alpha_2 \therefore \frac{E_1}{D_1} \tan \alpha_1 = \frac{E_2}{D_2} \tan \alpha_2$$

$$\therefore \frac{E_1}{\varepsilon_1 E_1} \tan \alpha_1 = \frac{E_2}{\varepsilon_2 E_2} \tan \alpha_2 \qquad \therefore \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_{1r}}{\varepsilon_{2r}}. \tag{2.72}$$

Podemos concluir que a mudança na inclinação das linhas depende apenas da mudança das constantes dielétricas.

2.11 Linhas de deslocamento elétrico

As linhas de deslocamento são construidas de maneira idêntica às linhas de força do campo eletrostático, ou seja, o vetor **D** deve ser tangente às linhas em todos os pontos do espaço. Consideremos um "tubo" formado pelas linhas de **D** e terminado pelas superfícies S_1 e S_2 (Fig. 2.38).

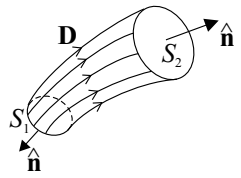


Figura 2.38: Tubo de linhas do vetor deslocamento elétrico.

Pela equação (2.62) (lei de Gauss p/ **D**) temos

$$\int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds + \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = Q$$

definindo

$$\hat{\mathbf{n}}' = -\hat{\mathbf{n}}$$

fica

$$\therefore \int_{S_2} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds - \int_{S_1} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}' dS = Q.$$

A integral da esquerda é o fluxo que sai por S_2 e a integral da direita é o fluxo que entra por S_1.

Se $Q = 0$, o fluxo que entra é igual ao fluxo que sai, caso contrário teremos mais fluxo saindo que entrando ($Q > 0$) ou mais fluxo entrando do que saindo ($Q < 0$), ou seja, linhas de **D** deverão "nascer" ou "morrer" na carga livre. Observe que as linhas de **E** "nascem" tanto nas cargas livres quanto nas cargas ligadas enquanto que as linhas de D "nascem" apenas nas cargas livres.

2.11.1 Equação de Laplace para dielétricos lineares

Como $div\mathbf{D} = \rho$ e $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ temos

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.73}$$

mas $\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\,V$, portanto

$$div\,\mathbf{grad}V = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \text{ou} \qquad \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{2.74}$$

Que é a equação de Poisson com ε_0 substituído por ε.

Na maioria dos problemas envolvendo dielétricos temos $\rho = 0$, portanto $\nabla^2 V = 0$, ou seja, a equação de Laplace que deve ser resolvida do mesmo modo que para problemas no vácuo, acrescentando apenas as novas condições de contorno, equações (2.68) e (2.69).

2.12 Capacitores

Chama-se de capacitor a todo sistema de dois condutores capaz de armazenar cargas iguais e opostas ($\pm Q$) independentemente de existirem outros condutores carregados nas vizinhanças. Essa independência significa que um condutor do par proteje (blinda) o outro condutor de forma que a contribuição para o potencial de cada um dos condutores do par devido às cargas externas nos outros condutores seja a mesma. Na figura (Fig. 2.39) o condutor 2 blinda o condutor 1 dos efeitos dos demais condutores (3, 4, etc.) carregados ou não.

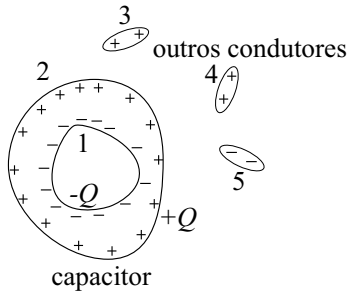


Figura 2.39: Capacitor formado por dois condutores e outros condutores carregados.

Define-se capacitância como a relação entre a carga armazenada em um dos condutores ($Q > 0$) e a diferença de potencial entre os condutores $V_2 - V_1$, ($V_2 - V_1 > 0$).

$$C = \frac{Q}{V_2 - V_1} \tag{2.75}$$

Uma vez estabelecidas as cargas nos condutores, a diferença de potencial entre os mesmos só dependerá da geometria dos condutores (uma vez que o potencial é a integral de caminho do campo e o campo depende da geometria). Portanto, a capacitância dependerá apenas da geometria.

A introdução de um material dielétrico entre os condutores carregados que formam o capacitor contribui para a diminuição do campo devido à polarização do material dielétrico.

Com a diminuição do campo e, consequentemente, do potencial teremos um aumento da capacitância.

Exemplo 5:

Capacitor de placas planas e paralelas com dielétrico de permissividade ε entre as placas. Área da placa $= A$, separação $= d$, d suficientemente pequena para desprezar a curvatura das linhas de campo nas bordas (Fig. 2.40).

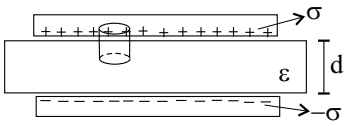


Figura 2.40: Capacitor formado por duas placas planas separadas por um dielétrico.

Aplicando a lei de Gauss na superfície cilíndrica de base ΔS e altura $h \to 0$ no interior do capacitor como mostra a figura, teremos

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = Q \qquad \therefore D\Delta S = \sigma \Delta S.$$

Mas $D = \varepsilon E$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

e $\Delta V = E\ d$ (campo uniforme)

$$\Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon} d \qquad \therefore \Delta V = \frac{\sigma A d}{\varepsilon A} = \frac{Q d}{\varepsilon A}.$$

Portanto

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon A}{d} \qquad \text{ou} \qquad C = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 A}{d}. \tag{2.76}$$

Onde podemos observar a dependencia com as características geométricas e a propriedade elétrica do meio.

2.13 Densidade de energia eletrostática

Determinemos uma expressão para a energia potencial de um sistema de cargas expressa em função dos vetores **E** e **D**.

Consideremos, inicialmente, que desejamos formar um sistema com N cargas pontuais trazendo uma a uma do infinito. Para trazer a primeira carga, Q_1, não realizaremos nenhum trabalho em virtude de não existir, ainda, campo elétrico pois não há outras cargas, $W_1 = 0$. Para trazer a 2ª carga, Q_2, realizaremos um trabalho devido a presença do campo produzido por Q_1. Esse trabalho vale:

$$W_2 = Q_2 V_{21}, \qquad V_{21} \equiv \text{ Potencial onde está a carga 2 devido a carga 1.}$$

Para trazer a 3ª carga realizaremos um trabalho devido ao campo elétrico produzido pelas cargas 1 e 2

$$W_3 = Q_3(V_{31} + V_{32}).$$

Para trazer a j-ésima carga

$$W_j = Q_j(V_{j1} + V_{j2} + ... + V_{j\ j-1}).$$

A energia potencial armazenada no sistema será a soma de todos esses trabalhos

$$W_E = W_1 + W_2 + W_3 + ... + W_j + ... + W_N$$

$$W_E = Q_2V_{21} + Q_3(V_{31} + V_{32}) + ... + Q_N(V_{N\ 1} + V_{N\ 2} + ... + V_{N\ N-1}).$$

Se tivessemos trazido as cargas na ordem oposta teríamos a expressão

$$W_E = Q_{N-1}\ V_{N-1\ N} + Q_{N-2}(V_{N-2\ N} + V_{N-2\ N-1})\ +\ .... + Q_1(V_{1\ N} + V_{1\ N-1} + ... + V_{12})$$

Somando as duas últimas expressões teremos:

$$2W_E = Q_1(V_{12} + ... + V_{1N}) + Q_2(V_{21} + ... + V_{2N})\ + ...+$$

$$+Q_N(V_{N1} + ... + V_{N\ N-1})$$

ou

$$2W_E = Q_1V_1 + Q_2V_2 + ... + Q_NV_N$$

onde
$V_1 \equiv$soma dos potenciais de todas as cargas em 1 (excetuando a própria carga!)
$V_2 \equiv$soma dos potenciais de todas as cargas em 2
$V_N \equiv$soma dos potenciais de todas as cargas em N,

$$\therefore W_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} Q_iV_i \tag{2.77}$$

V_i =soma dos potenciais de todas as cargas em i (excetuando a própria carga!).

Se ao invés de cargas pontuais, tivessemos trazido elementos infinitesinais de carga $dq = \rho dv$ encontrariamos

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} V\rho dv. \tag{2.78}$$

Essa é a energia necessária para juntar os elementos de carga em um certo volume no espaço (não é a energia para criar as cargas !).

Procuremos escrever a equação (2.78) em função de **E** e **D**.

Como $div\mathbf{D}\ = \rho$ teremos

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{vol} V\ div\mathbf{D}\ dv.$$

Da identidade

$$div(\varphi\mathbf{F})\ = \varphi\ div\mathbf{F} + \mathbf{grad}\varphi \cdot \mathbf{F}$$

temos

$$V\ div\mathbf{D} = div(V\mathbf{D}) - \mathbf{grad}V \cdot \mathbf{D} = div(V\mathbf{D}) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}.$$

Substituindo na integral

$$W_E = \frac{1}{2}\left[\int_{vol} div(V\mathbf{D})\ dv + \int_{vol} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\ dv\right]$$

pelo teorema da divergência

$$\int_{vol} div(V\mathbf{D})\ dv\ = \oint_S\ V\mathbf{D} \cdot \hat{n} ds.$$

Podemos estender o volume de integração a todo o espaço e, consequentemente, a superfície S se afastará para o infinito.

Como V tem dependência do tipo $1/r$, $\mathbf{D}$ tem dependência do tipo $1\backslash r^2$ e dS tem dependência do tipo r^2, vemos que a integral de superfície tende a zero como $1/r$ quando $S \to \infty$ de modo que

$$W_E = \frac{1}{2}\int_{todo\ o\ espaço} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\ dv = \int_{todo\ o\ espaço} \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} dv. \tag{2.79}$$

Definimos então a densidade de energia

$$\omega \equiv \frac{dW_E}{dv} = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} \tag{2.80}$$

para dielétricos lineares $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$

$$\omega = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \text{ e para o vácuo } \omega = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2. \tag{2.81}$$

Exemplo 6:

Considere o sistema de condutores mostrado a seguir (Fig. 2.41) e calcule o potencial no espaço entre as placas.

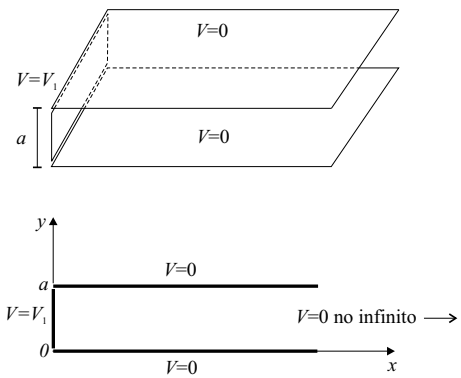


Figura 2.41: Sistema de três condutores planos.

Condições de contorno:

$$V = 0 \text{ para } \begin{cases} y = a, & 0 \leq x \leq \infty \\ x = \infty, & 0 \leq y \leq a \end{cases}$$

e

$$V = V_1 \text{ para } x = 0, \quad 0 < y < a.$$

Devido à extensão infinita dos condutores ao longo do eixo oz, o potencial independe dessa variável e a equação de Laplace pode ser escrita como

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0.$$

Após a separação de variáveis supondo $V = X(x)\,Y(y)$ torna-se

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = k^2$$

$$\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} = k^2 \qquad \therefore X = C_1 e^{kx} + C_2\, e^{-kx}$$

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2 Y}{dy^2} = -k^2 \qquad \therefore Y = C_3 e^{jky} + C_4 e^{-jky}.$$

Fazendo o produto podemos escrever como

$$V = C_1 C_3 e^{k(x+jy)} + C_1 C_4 e^{k(x-jy)} + C_2 C_4 e^{-k(x+jy)} + C_2 C_3 e^{-k(x-jy)}$$

ou

$$V = C_1' e^{k(x+jy)} + C_2' e^{k(x-jy)} + C_3' e^{-k(x+jy)} + C_4' e^{-k(x-jy)}.$$

Considerando $k > 0$, a aplicação da condição de contorno $V \to 0$ quando $x \to \infty$ implica que C_1' e C_2' devem ser nulas (se $k < 0$ teríamos C_3' e C_4' nulos).

Então

$$V = C_3' e^{-k(x+jy)} + C_4' e^{-k(x-jy)} = C_3' e^{-kx}(\cos ky - j\text{sen } ky) + C_4' e^{-kx}(\cos ky + j\text{sen } ky).$$

Mas da condição de contorno $V = 0$ em $y = 0$ temos

$$0 = C_3' e^0 (1 - j0) + C_4' e^0 (1 + j0) \Longrightarrow C_3' = -C_4' = -C',$$

portanto

$$V = Ce^{-kx} \text{ sen } ky, \qquad C = 2jC'$$

da condição $V = 0$ em $Y = a$, $\forall x > 0$ temos

$$0 = Ce^{-kx}\text{sen } ka \Longrightarrow ka = n\pi \qquad \therefore k = \frac{n\pi}{a},\ n = 1, 2, 3...$$

$$\therefore V = Ce^{-\frac{n\pi}{a}x} \text{ sen } \frac{n\pi}{a} y.$$

Devemos ter ainda satisfeita a condição $V = V_1$ em $x = 0$, $0 < y < a$. Observe que a expressão acima não permite encontrar o valor de C para todos os valores de y. Contudo, a combinação linear de soluções é uma solução de modo que podemos escrever

$$V = C_1 e^{-\frac{\pi}{a}x} \text{sen}\ \frac{\pi}{a} y + C_2 e^{-\frac{2\pi}{a}x} \text{sen}\ \frac{2\pi}{a} y + ...$$

ou seja

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \text{sen} \frac{n\pi}{a} y.$$

Impondo a condição $V = V_1$ em $x = 0$ teremos

$$V_1 = C_1 \text{sen} \frac{\pi}{a} y + C_2 \text{sen} \frac{2\pi}{a} y + ... + C_n \text{sen} \frac{n\pi}{a} y + ... \ .$$

Comparando com a expansão seno de Fourier

$$f(by) = a_1 \text{sen}\ by + a_2 \text{sen}\ 2by + ... + a_n \text{sen}\ nby + ...$$

com

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(by) \text{sen}\ nby\ d(by)$$

teremos

$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} V_1 \text{sen}\ \frac{n\pi}{a} y\ d(\frac{\pi}{a} y).$$

Mas

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \text{sen}\ n\theta\ d\theta &= \frac{1}{n}(-\cos n\theta)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{n} \text{ para } n \text{ ímpar} \\ &= 0 \text{ para } n \text{ par.} \end{aligned}$$

$$\therefore C_n = V_1 \frac{4}{n\pi} \text{ para } n \text{ ímpar}$$

Finalmente

$$V = \sum_{n \text{ ímpar}}^{\infty} \left(\frac{V_1 4}{n\pi}\ e^{-n\frac{\pi}{a}x}\ \text{sen} \frac{n\pi}{a} y \right).$$

Exemplo 7:

Considere o problema de duas linhas de cargas paralelas e infinitas carregadas com densidade linear de cargas λ e $-\lambda$ separadas por uma distância $2d$ e imersas em um meio dielétrico. Determinemos a equação das superfícies equipotencias (Fig. 2.42). O potencial de uma

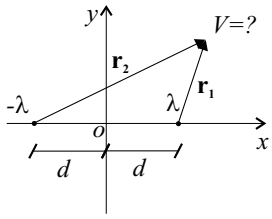


Figura 2.42: Duas linhas de cargas paralelas e infinitas.

linha de carga infinita medido com relação à origem vale (ver método da imagem)

$$V_+ = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_1}$$

$$V_- = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r_2}.$$

Em um ponto qualquer do espaço teremos (Fig. 2.42).

$$V = V_+ \ + \ V_- = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{d}{r_1} \ - \ln\frac{d}{r_2}\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

as equipotencias serão definidas por $r_1/r_2 = k,\ k = cte$

$$\therefore r_1 = kr_2.$$

Mas

$$r_2 = \sqrt{(d+x)^2+y^2} \qquad \text{e} \qquad r_1 = \sqrt{(d-x)^2+y^2}$$

$$\therefore \sqrt{(d-x)^2+y^2} = k\sqrt{(d+x)^2+y^2}$$

$$(d-x)^2+y^2 = k^2[(d+x)^2+y^2]$$

$$d^2-2dx+x^2+y^2 = k^2d^2+2k^2dx+k^2x^2+k^2y^2$$

$$x^2(-k^2+1)-2dx(k^2+1)+d^2(-k^2+1)+y^2(-k^2+1) = 0$$

$$x^2-2dx\frac{k^2+1}{1-k^2}+d^2+y^2 = 0$$

$$x^2-2dx\frac{k^2+1}{1-k^2}+d^2\left(\frac{k^2+1}{1-k^2}\right)^2+d^2+y^2 = d^2\left(\frac{k^2+1}{1-k^2}\right)^2$$

$$\left(x-d\frac{k^2+1}{1-k^2}\right)^2+y^2 = \left(\frac{2kd}{1-k^2}\right)^2$$

$$(x-x_0)^2+y^2 = R^2,$$

equação do círculo de raio R centrado em x_0 (Fig.2.43),

$$x_0 = d\frac{k^2+1}{1-k^2}$$

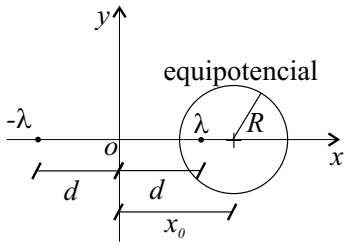


Figura 2.43: Linha equipotencial circular.

$$R = \frac{2kd}{1-k^2}.$$

Consideremos agora o problema de uma linha de transmissão paralela e infinita formada por dois fios de raio R e separados por uma distância $2x_0$. Calculemos a capacitância por unidade de comprimento dessa linha.

Observando o exemplo anterior, verificamos que as superfícies dos fios são justamente as superfícies equipotenciais definida pela constante k. A expressão

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{1}{k}$$

define o potencial da equipotencial (superfície do condutor) com relação à origem (no meio, entre os dois fios) definidas pelo valor de k ($0 < k < 1$ para pontos à direita).

Se $1/k$ define uma equipotencial à direita da origem, k define uma equipotencial à esquerda, pois $k = r_1/r_2$. Assim, a diferença de potencial entre os dois condutores é

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{1}{k} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln k = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \left(\ln \frac{1}{k} - \ln k \right) = \frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{1}{k}$$

$$\Delta V = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon} \ln \frac{1}{k}.$$

De

$$x_0 = d\,\frac{k^2+1}{1-k^2} \qquad \text{e} \qquad R = \frac{2kd}{1-k^2}$$

temos

$$\frac{x_0}{R} = \frac{\frac{k^2+1}{1-k^2}}{\frac{2k}{1-k^2}} = \frac{k^2+1}{2k}$$

$$\therefore 2kx_0 = k^2 R + R,$$

$$k^2 - 2\,\frac{x_0}{R}\,k + 1 = 0$$

$$k = \frac{x_0}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 1}.$$

A raiz que produz $k < 1$ e consequentemente $\Delta V > 0$ é

$$k_1 = \frac{x_0}{R} - \sqrt{\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 1}.$$

A outra raiz , k_2, é o inverso da primeira e produz $\Delta V < 0$ e de mesmo módulo A capacitância é definida por

$$C = \frac{Q}{\Delta V},$$

para um comprimento l da linha, $Q = \lambda l$

$$\therefore C = \frac{\lambda l}{\Delta V}$$

então

$$\frac{C}{l} = \frac{\lambda}{\frac{\lambda}{\pi\varepsilon} \ln\left[\frac{x_0}{R} - \sqrt{\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 1}\right]^{-1}}$$

$$\frac{C}{l} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left[\frac{x_0}{R} - \sqrt{\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 1}\right]^{-1}} = -\frac{\pi\varepsilon}{\ln\left[\frac{x_0}{R} - \sqrt{\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 1}\right]},$$

ou mesmo, em função da segunda raiz,

$$\frac{C}{l} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left[\frac{x_0}{R} + \sqrt{\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 - 1}\right]}.$$

Em qualquer caso, se o raio do condutor for pequeno comparado com a distancia, $R << x_0$, podemos aproximar para

$$\frac{C}{l} = \frac{\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{2x_0}{R}\right)},$$

que é a expressão comumente utilizada para a capacitância entre dois fios finos de raio R separados pela distância $2x_0$.

Para uma linha unifilar paralela à terra onde $V = 0$ (Fig. 2.44) a diferença de potencial será a metade do problema anterior e teremos o dobro da capacitância por unidade de comprimento.

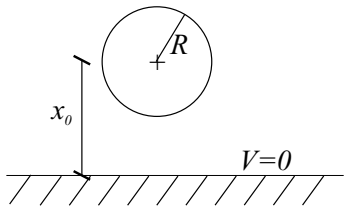


Figura 2.44: Linha unifilar paralela à terra.

Exemplo 8:

Considere uma linha coaxial infinita preenchida com dois materiais dielétricos conforme os dados abaixo (Fig 2.45):

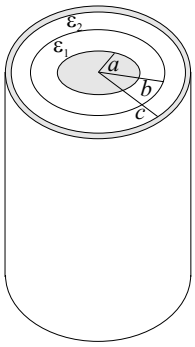


Figura 2.45: Linha coaxial infinita preenchida com dois materiais dielétricos concêntricos.

- raio do condutor interno $= a$
- dielétrico 1, ε_1 para $a < r < b$
- dielétrico 2, ε_2 para $b < r < c$
- raio interno do condutor externo $= c$.

Determinar o potencial nos pontos do espaço e a capacitância por unidade de comprimento.

Consideremos um sistema de coordenadas cilíndricas com eixo oz alinhado com o eixo da linha coaxial.

A solução da equacão de Laplace na variável ρ é

$$V = C_1 \ln \rho + C_2.$$

Dividamos o espaço em duas regiões, a que contém o dielétrico ε_1 e a que contém o dielétrico ε_2. Condições de contorno:

- $V = 0$ para $\rho = a$
- V é contínuo na transição entre os dielétricos
- $V = V_0$ para $\rho = c$.

A componente normal de $\mathbf{D}$ é contínua na transição entre os dielétricos

$$D_{1n} = D_{2n} \qquad \therefore \varepsilon_1 \left.\frac{\partial V_1}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = \varepsilon_2 \left.\frac{\partial V_2}{\partial \rho}\right|_{\rho=b}.$$

Em cada região do espaço o potencial pode ser escrito como

$$V_1 = C_1 \ln \rho + C_2 \qquad \text{para } a < \rho \leq b$$

$$V_2 = C_3 \ln \rho + C_4 \qquad \text{para } b \leq \rho < c.$$

Aplicando as condições de contorno temos

$$0 = C_1 \ln a + C_2 \qquad \therefore C_2 = -C_1 \ln a \tag{2.82}$$

$$C_1 \ln b + C_2 = C_3 \ln b + C_4 \tag{2.83}$$

$$V_0 = C_3 \ln c + C_4 \qquad \therefore C_4 = V_0 - C_3 \ln c \tag{2.84}$$

$$\varepsilon_1 \frac{C_1}{b} = \varepsilon_2 \frac{C_3}{b} \qquad \therefore C_3 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} C_1. \tag{2.85}$$

Substituindo (2.82), (2.84), e (2.85) em (2.83)

$$C_1 \ln b - C_1 \ln a = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} C_1 \ln b + V_0 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} C_1 \ln c$$

$$C_1 \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b} \right) = V_0$$

$$C_1 = \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b}}.$$

Substituindo esse resultado em (2.82) e em (2.85)

$$C_2 = -\frac{V_0}{\ln \frac{b}{a} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b}} \ln a$$

$$C_3 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b}}.$$

Substituindo em (2.84)

$$C_4 = V_0 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b}} \ln c.$$

A capacitância de um pedaço da linha com comprimento l vale

$$C = \frac{Q}{V_0} = \frac{\sigma A}{V_0} = \frac{\sigma 2\pi a l}{V_0}$$

mas $\sigma = \varepsilon_1 E$ e

$$E = \left. \frac{\partial V_1}{\partial \rho} \right|_{\rho = a} \qquad \therefore E = C_1 \frac{1}{a},$$

então

$$\sigma = \varepsilon_1 \frac{1}{a} \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b}}$$

$$C = \varepsilon_1 \frac{1}{a} \frac{2\pi a l}{V_0} \frac{V_0}{\ln \frac{b}{a} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b}} \qquad \therefore \frac{C}{l} = 2\pi \frac{\varepsilon_1}{\ln \frac{b}{a} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b}}.$$

Ou então

$$\frac{1}{C/l} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_1} \left(\ln \frac{b}{a} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \ln \frac{c}{b} \right)$$

$$\frac{1}{C/l} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\frac{b}{a} + \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\varepsilon_2}\ln\frac{c}{b}$$

$$\frac{1}{C/l} = \frac{1}{C_1/l} + \frac{1}{C_2/l}.$$

Equivalente a capacitores em série com

$$\frac{C_1}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_1}{\ln b/a} \qquad \text{e} \qquad \frac{C_2}{l} = \frac{2\pi\varepsilon_2}{\ln c/b}.$$

Capítulo 3

Correntes estacionárias

3.1 A corrente elétrica e a densidade de corrente

Os corpos condutores caracterizam-se pela possibilidade de haver movimentação de portadores de carga. Em um gás ionizado por um campo elétrico intenso, encontramos íons positivos movimentando-se em um sentido e elétrons no sentido oposto. Em uma solução eletrolítica na presença de um campo elétrico, encontramos ions positivos e negativos movimentando-se em direções opostas e em um metal observamos apenas elétrons em movimento. A movimentação das cargas constitui o que chamamos de corrente elétrica e a definimos quantitativamente como taxa de variação da carga "líquida" que atravessa uma área no espaço ou a seção de um fio em um circuito.

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{3.1}$$

Como íons de sinais opostos movimentam-se em sentidos contrários na presença de um campo elétrico, consideramos como sentido positivo para a corrente aquele das cargas positivas, de tal modo que, íons de sinais opostos movimentando-se em sentidos contrários contribuem para a mesma corrente (Fig. 3.1).

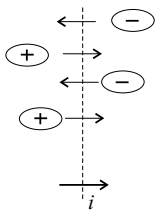


Figura 3.1: Definição da corrente positiva.

Consideremos inicialmente apenas um tipo de portador de carga movimentando-se no espaço com uma velocidade média $\mathbf{v}$ estando numa concentração N (número de portadores/volume). Tomemos uma superfície infinitensinal ds cuja normal não seja paralela à velocidade dos portadores (Fig. 3.2)

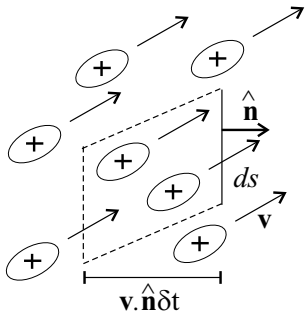


Figura 3.2: Portadores de carga atravessando uma área obliquamente.

Em um intervalo de tempo δt os portadores terão percorrido uma distância $\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\delta t$ na direção da normal e atravessarão a área ds. Assim, a quantidade de carga δQ que atravessará a área ds será

$$\delta Q = qN\delta V = qN\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}\delta t ds, \quad \delta V = \text{volume do paralelepípedo.}$$

Teremos então

$$di = \frac{\delta Q}{\delta t} = qN\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds \qquad \text{(corrente que atravessa a área infinitesinal } ds\text{)}.$$

Para vários portadores com várias concentrações fica

$$di = \sum_j q_j N_j \mathbf{v}_j \cdot \hat{\mathbf{n}}ds \quad = \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds$$

onde

$$\mathbf{J} = \sum_j q_j N_j \mathbf{v}_j \tag{3.2}$$

é definida como a densidade de corrente expressa em $\mathrm{A/m^2}$.

A corrente i que atravessa uma área S será então

$$i = \int_s \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds. \tag{3.3}$$

Se considerarmos uma superfície fechada S, sendo $\hat{\mathbf{n}}$ sua normal externa, a corrente que entra nessa superfície será dada por

$$i = -\oint_s \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds.$$

Essa corrente será igual a taxa de variação da carga Q no interior da superfície (Fig. 3.3)

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_s \mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds$$

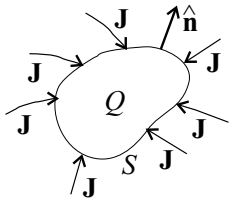


Figura 3.3: Densidade de corrente penetrando em uma superfície fechada S.

ou, utilizando o teorema da divergência,

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dv = -\int_V div\mathbf{J}\, dv$$

$$\therefore \int_V (\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\mathbf{J})\, dv = 0, \qquad \forall V$$

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + div\mathbf{J} = 0 \tag{3.4}$$

conhecida como equação da continuidade.

Ou seja, se existe divergência da densidade de corrente em um determinado ponto do espaço, a densidade de carga estará variando no tempo naquele ponto. O regime estacionário é caracterizado por $\partial\rho/\partial t = 0$, ou seja, não há acúmulo de carga nos pontos do espaço.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \;\text{ ou }\; div\mathbf{J} = 0. \tag{3.5}$$

3.2 Lei de Ohm, condutividade e resistividade

Encontra-se experimentalmente que, nos metais mantidos em temperatura constante, a densidade de corrente $\mathbf{J}$ é diretamente proporcional ao vetor do campo elétrico $\mathbf{E}$.

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}, \qquad g \equiv \text{condutividade} \tag{3.6}$$

No caso geral, contudo, g é uma função do campo

$$g = g(\mathbf{E}) \text{ e } \mathbf{J} = g(\mathbf{E})\mathbf{E}. \tag{3.7}$$

Quando $g = cte$ dizemos que o meio é linear ou que o meio é ôhmico e a equação (3.6) é conhecida como a Lei de Ohm microscópica. O inverso da condutividade é definido como a resistividade $\eta = 1/g$. A unidade de η é volt-metro/ampére ou ohm-metro. A unidade de g é ohm^{-1}.metro^{-1} ou mho/metro.

A diferença entre os materiais condutores e isolantes é caracterizada pela imensa variação da condutividade. A condutividade dos condutores chega a ser da ordem de 10^{20} a 10^{26} vezes a condutividade de um isolante.

A variação da resistividade com a temperatura é dada aproximadamente pela relação empírica

$$\eta = \eta_0\, [1 + \alpha\, (T - T_0)] \tag{3.8}$$

$\alpha = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dT}$ é o coeficiente de variação relativa da resistividade com a temperatura,
$T =$ temperatura em $°C$,
$T_0 =$ temperatura de referenciais em $°C$,
$\eta_0 =$resistividade na temperatura T_0.

A tabela seguinte (Tab. 3.1) mostra valores típicos de η e α:

Material	η (ohm.m)	α ($°C^{-1}$)
Prata ($0°C$)	$1,47 \times 10^{-8}$	$0,0038$
Cobre	$1,69 \times 10^{-8}$	$0,00393$
Ouro	$2,44 \times 10^{-8}$	$0,0034$
Alumínio	$2,83 \times 10^{-8}$	$0,0039$
Tungstenio	$5,51 \times 10^{-8}$	$0,0045$
Níquel	$7,24 \times 10^{-8}$	$0,006$
Ferro ($0°C$)	$8,85 \times 10^{-8}$	$0,0050$
Constantan (60% Cu,40% Ni)	$44,0 \times 10^{-8}$	$0,0000$
Nichrome	$100,0 \times 10^{-8}$	$0,0004$
Vidro	$10^{10} - 10^{14}$	
Quartzo (fundido)	$7,5 \times 10^{17}$	

Tabela 3.1: Valores típicos de resistividade e coeficiente de variação com a temperatura.

Consideremos um fio de seção constante, feito de material homogêneo de condutividade g e mantido a uma diferença de potencial $\triangle V$ nos seus extremos.

$$\triangle V = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}.$$

No interior do fio o campo deve ser longitudinal, pois, se houvesse uma componente perpendicular à superfície, haveria cargas superficiais e não se detecta a existência de tais cargas. Além disso, a geometria do problema nos indica que o campo deve ser o mesmo em todos os pontos. Portanto

$$\triangle V = E.l, \qquad l = \text{comprimento do fio}$$

mas

$$i = \int_s \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = J.A, \quad A = \text{seção do fio.}$$

Como $J = gE$ temos

$$i = gEA$$

ou

$$i = g\frac{\triangle V}{l}A \quad \therefore \triangle V = \frac{1}{g}\frac{l}{A}i.$$

Definimos então a resistência elétrica do fio

$$R = \frac{\triangle V}{i} = \frac{1}{g}\frac{l}{A}. \tag{3.9}$$

Se g é constante R também será e estaremos lidando com um material ôhmico.

A resistência definida por $R = \triangle V/i$ é um valor que caracteriza o pedaço do material como um todo, qualquer que seja a forma do condutor e é, por isso, uma grandeza macroscópica.

3.3 Tendência ao equilíbrio eletrostático

Suponhamos que em um material homogêneo, caracterizado pela permissividade ε e pela condutividade g, seja colocado, no seu interior, uma certa densidade de cargas livre $\rho_0(x, y, z)$. Pergunta-se: como essas cargas atingirão a situação de equilíbrio eletrostático?

Pela equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\mathbf{J} = 0$$

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + div(g\mathbf{E}) = 0 \qquad \therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + gdiv\mathbf{E} = 0$$

mas

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

então

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + g\frac{\rho}{\varepsilon} = 0.$$

Integrando com relação ao tempo com a condição inicial

$$t = 0, \quad \rho = \rho_0(x, y, z)$$

fica

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z)\, e^{-\frac{g}{\varepsilon}t}. \tag{3.10}$$

Observamos, portanto, que o estado de equilíbrio é obtido exponencialmente e definimos o tempo de relaxação como $t_c = \varepsilon/g$, tempo necessário para a densidade cair a 37% do valor inicial.

3.4 Condições de fronteira

Em problemas que envolvem mais de um meio condutor, as cargas em movimento deverão atravesssar a fronteira entre dois meios de condutividade g_1 e g_2 respectivamente. Assumindo que o regime é estacionário, ou seja, não existindo acumulo de cargas na interface entre os dois meios, deveremos ter a mesma corrente nos dois lados (Fig. 3.4). Sendo $\hat{\mathbf{n}}$ a

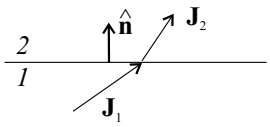


Figura 3.4: Densidade de corrente na fronteira entre dois meios condutores.

normal à interface e como

$$i = \int_s \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

teremos $J_{1n} = J_{2n}$, ou

$$g_1 E_{1n} = g_2 E_{2n}. \tag{3.11}$$

Além disso, como

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

para um percurso retangular passando pelos dois meios com $h \to 0$ (Fig. 3.5) teremos

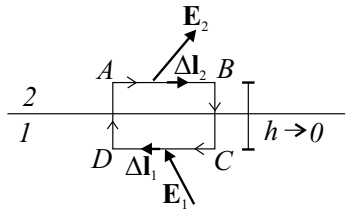


Figura 3.5: Campo elétrico na fronteira entre dois meios condutores.

$$E_{1t} = E_{2t}. \tag{3.12}$$

3.5 Força eletromotriz e Leis de Kirchhoff

Uma propriedade fundamental do campo eletrostático é

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

no meio condutor, $\mathbf{J} = g(\mathbf{E})\mathbf{E}$ e $g(\mathbf{E})$ é sempre positivo, de forma que

$$\oint_c \frac{\mathbf{J}}{g} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

Para essa integral ser nula, ou $\mathbf{J}$ é sempre perpendicular a d$\mathbf{l}$ ou o produto escalar troca de sinal durante a integração, mostrando que não é possível que cargas elétricas movimentem-se em um percurso fechado (onde não há troca de sinal no produto escalar) apenas sob efeito do campo eletrostático.

Contudo, uma carga elétrica pode estar submetida a ação de outras forças (mecânicas, "químicas" etc.) que não sejam de origem eletrostática. Se denominarmos por $\mathbf{E}_{ef}$(campo efetivo) a força total por unidade de carga que age sobre a carga, é possível que a integral de linha fechada desse campo não se anule. Se isso ocorrer, chamaremos o resultado dessa integral de "força eletromotriz" (nome histórico, não se trata de uma força) ou simplesmente $f.e.m.$ no percurso fechado.

$$\oint_c \mathbf{E}_{ef} \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon. \tag{3.13}$$

De modo geral

$$\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{F}^*}{q}$$

$\mathbf{E}$ ≡campo eletrostático tal que $\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$
$\mathbf{F}^*$ ≡resultante das forças não eletrostáticas.

As cargas se movimentam sob a ação do campo efetivo de modo que, em geral,

$$\mathbf{J} = g\mathbf{E}_{ef} \text{ ou } \mathbf{E}_{ef} = \eta\mathbf{J}.$$

Então

$$\eta\mathbf{J} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{F}^*}{q}. \tag{3.14}$$

Multiplicando escalarmente por $d\mathbf{l}$ e integrando em um percurso de a até b fica

$$\int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \frac{1}{q}\int_a^b \mathbf{F}^* \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \eta\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} \tag{3.15}$$

onde:
a 1^a integral é a diferença de potencial $V_a - V_b$;
a 2^a integral é a $f.e.m$ desenvolvida no trecho ab, ε_{ab};
a 3^a integral é o produto da resistência no trecho ab pela corrente que passa por esse trecho, $R_{ab}i$, veja a equação (3.9).

$$\int_a^b \eta\,\mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \eta\, J_t\, dl = \int_a^b \eta\frac{i}{A}\, dl = \int_a^b i\, dR = R_{ab}\, i$$

então

$$V_a - V_b + \varepsilon_{ab} = R_{ab}\, i$$

$$\therefore V_b - V_a = \varepsilon_{ab} - R_{ab}\, i. \tag{3.16}$$

Se considerarmos um dq de carga que atravesse o trecho ab teremos (com $dq = i\, dt$)

$$dq\,(V_b - V_a) = (\varepsilon_{ab}\, i - R_{ab}\, i^2)\, dt.$$

Podemos interpretar $dq\,(V_b - V_a)$ como a energia adquirida pelo elemento de carga dq, $\varepsilon_{ab}\, i$ como a potência produzida no trecho ab e $R_{ab}\, i^2$ como a potência dissipada irreversivelmente.

Se o ponto b concidir com o ponto a teremos um circuito fechado e $V_b - V_a = 0$. A eq. (3.16) fica então

$$\varepsilon_{ab} = R_{ab}i \qquad \text{ou mesmo} \qquad \varepsilon = Ri. \tag{3.17}$$

Nessa expressão, ε e R estão distribuidas ao longo do percurso de integração. Caso, as fontes de $f.e.m$ e as resistências possam ser individualizadas teremos

$$\sum_j \varepsilon_j = \sum_k R_k i \tag{3.18}$$

que é conhecida como a lei das malhas de Kirchhoff.

No regime estacionário, em um ponto do espaço $div\mathbf{J} = 0$ e a corrente que sai desse ponto (ou mesmo que flui para esse ponto) vale

$$i = \oint_s \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, ds = \int_V div\mathbf{J}\, dv = 0.$$

Se a corrente flui por fios que se unem em um ponto formando um "nó"(Fig. 3.6) teremos

$$\sum_j i_j = 0 \tag{3.19}$$

que é conhecida como lei dos nós, onde i_j é a corrente no j-ésimo fio que sai (ou que chega) ao nó .

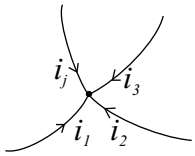


Figura 3.6: Correntes concorrentes em um ponto ou nó.

3.6 Eq. de Laplace para meios condutores

Consideremos um meio condutor que não possua fontes internas de $f.e.m$, que seja homogêneo, ôhmico, e esteja sob regime estacionário de condução.

Como $div\mathbf{J} = 0$ e $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$, teremos $div\mathbf{E} = 0$ e, nesse caso, o campo é puramente eletrostático pois não há fonte de $f.e.m$, portanto

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$$

e

$$div\mathbf{E} = -div\mathbf{grad}V = 0$$

ou seja,

$$\nabla^2 V = 0. \tag{3.20}$$

Portanto, o potencial será determinado a partir da resolução da equação de Laplace, usando as mesmas técnicas dos problemas de eletrostática e as condições de contorno serão dadas pelos potenciais ou pelas densidades de corrente nas superfícies dos condutores. Especificar $\mathbf{J}$ é o mesmo que especificar $\mathbf{E}$ já que $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$. Se o meio condutor tiver regiões de diferentes condutividades utilizamos ainda as equações (3.11) e (3.12) na fronteira entre esses meios

$$g_1 E_{1n} = g_2 E_{2n}$$

$$E_{1t} = E_{2t}.$$

Exemplo

Considere uma linha coaxial cujo condutor interno de raio a possui uma condutividade $g \neq 0$ e o condutor externo, de raio interno b, possui uma condutividade infinita (Fig. 3.7). A linha é curto circuitada em um dos extremos e submetida a uma difereça de potencial V_1 no outro extremo.

Determinemos o potencial no espaço entre os condutores.

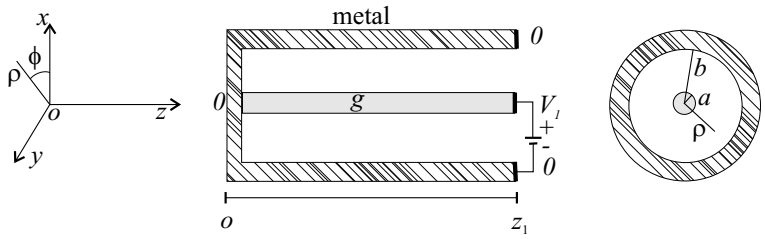


Figura 3.7: Linha coaxial curto-circuitada em um extremo.

Condições de contorno em coordenadas cilíndricas:

$V = 0$ para $z = 0$ e $0 \leq \rho \leq b$

$V = 0$ para $\rho = b$ e $0 \leq z \leq z_1$

$V = V_1$ para $z = z_1$ $0 < \rho < a$.

O problema possui simetria axial, de modo que o potencial não pode depender da variável ϕ e a equação de Laplace nas variáveis z e ρ fica (ver (2.27))

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{dV}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Fazendo $V = PZ$, $P = P(\rho)$ e $Z = Z(z)$ teremos

$$\frac{1}{\rho P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} = \alpha \quad \text{e} \quad \frac{1}{\rho P}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) = -\alpha. \tag{3.21}$$

Na superfície do fio de condutividade g teremos que satisfazer a condição da componente normal de $\mathbf{J}$ (fio = meio 1, vácuo = meio 2, $g_2 = 0$)

$$g_1 E_{1n} = g_2 E_{2n} = 0$$

então

$$g_1 E_{1n} = 0 \Longrightarrow E_{1n} = 0$$

já que $g_1 \neq 0$.

Logo

$$\left[\frac{\partial V}{\partial \rho}\right]_{\rho=a} = 0 \Longrightarrow Z\left[\frac{\partial P}{\partial \rho}\right]_{\rho=a} = 0 \ \therefore \left[\frac{\partial P}{\partial \rho}\right]_{\rho=a} = 0.$$

Sendo assim, de acordo com (3.21), somos obrigados a concluir que a constante de separação α deve ser nula . Portanto, no interior do fio deveremos ter

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0. \tag{3.22}$$

$$\Longrightarrow Z = C_1 z + C_2$$

e

$$\frac{1}{\rho P}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dP}{d\rho}\right) = 0 \Longrightarrow P = C_3 \ln\rho + C_4.$$

Como a solução não pode divergir em $\rho = 0$ teremos que ter $C_3 = 0$. Assim, o potencial no interior do fio será (redefinindo os valores das constantes C_1 e C_2)

$$V = C_1 z + C_2.$$

Mas $V = 0$ em $z = 0$ e $V = V_1$ em $z = z_1$, logo $C_2 = 0$ e $C_1 = V_1/z_1$.

Portanto, no interior do fio teremos

$$V = \frac{V_1}{z_1}\, z. \tag{3.23}$$

Utilizemos (3.21) para calcular o potencial no espaço entre os condutores. O potencial é uma função que varia continuamente na fronteira entre dois meios, de forma que, se no interior do fio a variação é linear, $V = (V_1/z_1)z$, imediatamente na superfície externa do fio, a variação deve ser da mesma forma. Como no interior do fio

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = P\frac{d^2 Z}{dz^2},$$

imediatamente na superfície externa do fio deveremos ter também $\partial^2 Z/dz^2 = 0$, ou seja, a constante de separação α deve ser nula também para o potencial no vácuo.

Então, entre os condutores também valem as equações (3.22)

$$Z = C_1 z + C_2,\ P = C_3 \ln\rho + C_4,\ \ V = ZP$$

$$V = C_5\, z \ln\rho + C_6\, z + C_7 \ln\rho + C_8$$

aplicando a condição de contorno $V = 0$ em $z = 0$, $a \le \rho \le b$

$$0 = C_7 \ln\rho + C_8$$

que só pode ser satisfeita para os diversos valores de ρ se $C_7 = C_8 = 0$.

Então

$$V = C_5 z\ ln\ \rho\ +\ C_6 z$$

e da condição $V = 0$ em $\rho = b$ $0 \le z \le z_1$ temos

$$0 = C_5\, z \ln b + C_6\, z \qquad \therefore C_6 = -C_5 \ln b$$

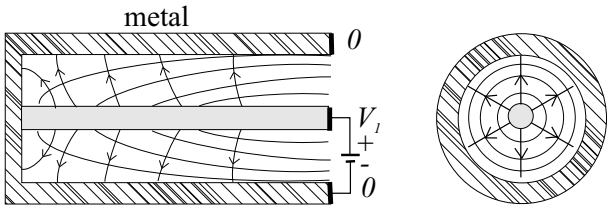


Figura 3.8: Linhas equipotenciais e linhas de campo.

e de $V = V_1$ em $z = z_1$ e $\rho = a$

$$V_1 = C_5\, z_1 \ln a + C_6\, z_1$$

$$\therefore V_1 = C_5\, z_1 \ln a - C_5\, z_1 \ln b$$

$$\therefore C_5 = \frac{V_1}{z_1 \ln \frac{a}{b}}$$

e

$$C_6 = -\frac{V_1 \ln b}{z_1 \ln \frac{a}{b}}.$$

Finalmente,

$$V = \frac{V_1}{z_1 \ln \frac{a}{b}}\, z \ln \rho - \frac{V_1 \ln b}{z_1 \ln \frac{a}{b}}\, z = \frac{V_1 \ln \frac{\rho}{b}}{z_1 \ln \frac{a}{b}}\, z. \tag{3.24}$$

Veja (Fig. 3.8). Nessa figura estão representadas as linhas equipotenciais e as linhas de campo elétrico calculadas pela expressão $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$ onde o gradiente nesse caso é dado por

$$\mathbf{grad}V = \frac{\partial V}{\partial \rho}\hat{\mathbf{a}}_\rho + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{a}}_z. \tag{3.25}$$

Portanto,

$$\mathbf{E} = -\frac{V_1}{z_1 \ln \frac{a}{b}}\frac{z}{\rho}\hat{\mathbf{a}}_\rho + \frac{V_1}{z_1 \ln \frac{a}{b}}(\ln b - \ln \rho)\hat{\mathbf{a}}_z. \tag{3.26}$$

Capítulo 4

O campo magnetostático de correntes estacionárias

4.1 Indução magnética B

Estudamos anteriormente os fenômenos relacionados com as cargas elétricas em repouso (problemas eletrostáticos). Nesse contexto, definimos o campo elétrico como sendo a razão entre a força que age em uma carga e o valor desta carga no limite em que ela é muito pequena, estando a mesma em repouso. Contudo, a experiência mostra que sobre cargas em movimento (correntes elétricas) podem aparecer forças que dependem não só do valor da carga como também da velocidade e da direção que essa carga se move. Isso pode ser observado, por exemplo, ao passarmos uma corrente elétrica por um fio nas vizinhanças de um imã natural ou de outro fio onde exista uma outra corrente.

Os resultados que apresentaremos são a síntese de um número muito grande de experimentos sobre correntes em fios retos e curvos, espiras circulares e retangulares e, até mesmo, feixes de cargas elétricas em gases a baixa pressão na presença de fontes de magnetismo natural ou artificial. De uma maneira um tanto artificial consideraremos os efeitos sobre um pequeno segmento de um circuito por onde passa uma corrente quando, na verdade, os efeitos normalmente são medidos em grandes extensões, muitas vezes, em todo o circuito.

Observa-se experimentalmente que, em um pequeno pedaço de fio $d\mathbf{l}$ por onde passa uma corrente i, atua uma força $d\mathbf{F}$ com as seguintes características:

- $d\mathbf{F}$ é proporcional à i.
- $d\mathbf{F}$ é proporcional à $d\mathbf{l}$.
- $d\mathbf{F}$ depende da posição de $d\mathbf{l}$.
- $d\mathbf{F}$ depende da orientação de $d\mathbf{l}$. Existe sempre uma direção de $d\mathbf{l}$ para a qual $d\mathbf{F}$ se anula, mesmo se invertermos a corrente, e não há outra direção na qual $d\mathbf{F}$ se anule (a menos que se anule em todas as direções).
- $d\mathbf{F}$ é proporcional ao senθ onde θ é o ângulo entre $d\mathbf{l}$ e a direção na qual $d\mathbf{F}$ se anula.
- A direção de $d\mathbf{F}$ é sempre perpendicular à $d\mathbf{l}$ e à direção na qual $d\mathbf{F}$ se anula.

- $d\mathbf{F}$ muda de sentido quando invertemos a corrente.

Para dar conta dessas observações definimos o vetor indução magnética $\mathbf{B}$ como sendo um vetor orientado na direção em que $d\mathbf{F}$ se anula e que satisfaça as observações acima.

Podemos então escrever

$$d\mathbf{F} \equiv id\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \tag{4.1}$$

Essa equação define a indução $\mathbf{B}$ como positiva quando for satisfeita a "regra da mão direita".

Em termos da densidade de corrente $\mathbf{J}$, notando que

$$id\mathbf{l} = \mathbf{J}Adl = \mathbf{J}dv \tag{4.2}$$

onde A é a área atravessada pela corrente e dv é o elemento de volume, teremos

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}dv. \tag{4.3}$$

Em termos da carga elétrica a equação (4.1) torna-se escrita como:

$$d\mathbf{F} = \frac{dq}{dt}d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = dq\mathbf{V} \times \mathbf{B} \tag{4.4}$$

onde $\mathbf{V}$ é a velocidade da carga.

A unidade da indução magnética $\mathbf{B}$ é o N/(Am), tesla ou weber/m^2.

4.2 A lei de Biot-Savart

Inicialmente, as fontes de indução magnética eram os imãs naturais. Em 1820 Oersted demonstrou que as correntes elétricas podiam defletir a agulha de uma bússola de modo semelhante a um imã natural e, poucas semanas após ter anunciado a sua descoberta, Ampére apresentou os resultados de uma série de experiências que podem ser sintetizadas em uma expressão atualmente conhecida como a lei de Biot-Savart. Essa lei afirma que a indução magnética $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, produzida por um circuito onde passa uma corrente i, pode ser considerada como a superposição de induções magnéticas elementares $d\mathbf{B}$ produzidas pelos pequenos pedaços do circuito, $d\mathbf{l}$ (Fig. 4.1).

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = Ci\frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \tag{4.5}$$

A constante C depende do sistema de unidades e a unidade de corrente, o ampére, é obtida fazendo $C \equiv 10^{-7}$N/amp^2. É conveniente fazer $C = \mu_0/(4\pi)$, onde $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$N/amp^2 é a permeabilidade magnética do vácuo.

Podemos também escrever, (já que $id\mathbf{l} = \mathbf{J}dv$)

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}dv' \tag{4.6}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}dv' \tag{4.7}$$

V' é o volume onde existe a densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ (que pode ser todo o espaço!).

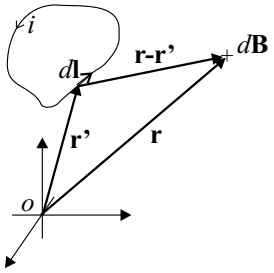


Figura 4.1: Elemento infinitesimal de indução magnética produzido por um elemento de fio.

Em coordenadas cartesianas

$$\mathbf{J} = J_x\hat{\mathbf{x}} + J_y\hat{\mathbf{y}} + J_z\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{1/2} \equiv R.$$

Assim, a projeção em ox de $\mathbf{B}$ será

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{(z - z')J_y - (y - y')J_z}{R^3} dv'.$$

Observando que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) = -\left(\frac{y - y'}{R^3}\right) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right) = -\left(\frac{z - z'}{R^3}\right)$$

teremos

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \left[J_z\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) - J_y\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{R}\right)\right] dv'$$

mas J_z e J_y são funções de x', y' e z' e não de x, y e z, então

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{J_z}{R}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{J_y}{R}\right)\right] dv'$$

como a integral é feita na variável "linha" podemos escrever

$$B_x(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{V'} \frac{J_z}{R} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{V'} \frac{J_y}{R} dv'.$$

Definiremos agora um campo vetorial, $\mathbf{A}(x, y, z)$, chamado de "potencial vetorial" como

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}}{R} dv' \tag{4.8}$$

ou

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'.$$

Em termos desse vetor

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

procedendo de modo análogo para as outras componentes encontraremos:

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

e

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Vemos portanto que

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A} \tag{4.9}$$

e como $div\mathbf{rotF} \equiv 0$ teremos

$$div\mathbf{B} \equiv 0. \tag{4.10}$$

Em problemas de cálculo de indução magnética prefere-se calcular primeiro o potencial vetorial magnético e posteriormente calcular $\mathbf{B}$ tomando-se o rotacional, por ser o potencial mais simples de calcular do que determinar $\mathbf{B}$ através da lei de Biot-Savart.

4.3 O potencial escalar

Mostremos agora que existem situações onde a indução magnética $\mathbf{B}$ pode ser calculada a partir de um potencial escalar. Calculemos o rotacional de $\mathbf{B}$ utilizando (4.9) supondo o caso de correntes estacionárias, $div\mathbf{J} = 0$. Temos que

$$\mathbf{rotB} = \mathbf{rot\ rotA} = \mathbf{grad}div\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A} \tag{4.11}$$

Calculemos $\mathbf{grad}div\mathbf{A}$ e $\nabla^2\mathbf{A}$ a partir de (4.8)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

$$div\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} div\left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dv'$$

mas $div(\varphi\mathbf{F}) = \varphi div\mathbf{F} + \mathbf{grad}\varphi\cdot\mathbf{F}$

$$div\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}div\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \mathbf{grad}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')\right]dv'$$

mas $div\mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ pois $\mathbf{J}$ é apenas função da variável "linha"e

$$\mathbf{grad}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} = -\mathbf{grad}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

então

$$div\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} -\mathbf{grad}'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}')dv'$$

usando novamente a identidade

$$div'(\varphi\mathbf{F}) = \varphi div'\mathbf{F} + \mathbf{grad}'\varphi \cdot \mathbf{F}$$

ficamos com

$$div\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\left[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}div'\mathbf{J}(\mathbf{r}') - div'\left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\right]dv'$$

mas $div'\mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ (correntes estacionárias), então

$$div\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'} div'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

V' = volume que contém $\mathbf{J}$ ou mesmo um volume maior.

Usando o teorema da divergência

$$div\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{S'}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot\hat{\mathbf{n}}ds'.$$

A densidade de corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$ é confinada no espaço, por hipótese, ao volume V'. Se estendermos a superfície S' para uma superfície envolvendo um volume maior que V' teremos $\mathbf{J} = 0$ nessa superfície e, portanto, a integral se anula. Então

$$div\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{grad}\ div\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0.$$

Calculemos agora $\nabla^2\mathbf{A} = \nabla^2 A_x\hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\hat{\mathbf{z}}$. De acordo com (4.8)

$$A_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{J_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv' = \int_{V'}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{J_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'.$$

Comparando com o potencial eletrostático

$$V = \int_{V'}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

e a equação de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

podemos dizer que

$$\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x.$$

Analogamente

$$\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y \qquad \text{e} \qquad \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z.$$

Portanto

$$\nabla^2\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{J}$$

e, de acordo com a equação (4.11), temos

$$\mathbf{rotB} = \mu_0\mathbf{J} \tag{4.12}$$

conhecida como forma diferencial da lei de Ampére.

Nas regiões do espaço onde $\mathbf{J} = 0$ teremos $\mathbf{rotB} = 0$ e nessas pontos podemos definir uma função $V^*(\mathbf{r})$ conhecida como potencial escalar magnético e dizer que

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{grad} V^* \tag{4.13}$$

e como $div\mathbf{B} = 0$ teremos

$$div\mathbf{B} = -\mu_0 div\mathbf{grad} V^* = 0 \tag{4.14}$$

ou

$$\nabla^2 V^* = 0.$$

Ou seja o potencial escalar magnético também satisfaz uma equação de Laplace!

4.4 O fluxo da indução magnética

Uma propriedade fundamental da indução magnética foi apresentada na equação (4.10), $div\mathbf{B} = 0$. Tomando uma superfície S que envolva um volume V e integrando o $div\mathbf{B}$ nesse volume teremos

$$\int_V div\mathbf{B} dv \equiv 0 \qquad \forall, V.$$

Pelo teorema da divergência fica

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \equiv 0 \qquad \forall, S \text{ fechada.} \tag{4.15}$$

O fluxo da indução magnética por uma superfície fechada é nulo. Em outras palavras, o fluxo que entra na superfície é igual ao fluxo que sai, outra maneira de retratar o fato de que não existe o monopolo magnético.

4.5 A lei de Ampère

A lei circuital de Ampère relaciona a integral de caminho fechado da indução magnética com a corrente (estacionária).

De acordo com o teorema de Stokes e a equação (4.12), $\mathbf{rotB} = \mu_0 \mathbf{J}$,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{rotB} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

sendo S qualquer superfície aberta que se apoie no caminho C (Fig. 4.2), ou seja,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \tag{4.16}$$

onde i é a corrente que atravessa a superfície S no sentido estipulado pela regra da mão direita.

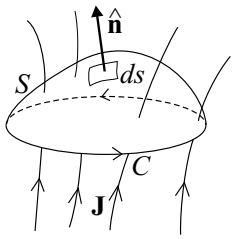


Figura 4.2: Caminho de integração e uma superfície apoiada nesse caminho e atravessada pela densidade de corrente **J**.

4.6 Torque sobre uma espira e momento magnético

Vimos que o elemento infinitesimal de força que age sobre um elemento infinitesimal de fio por onde passa uma corrente i, na presença de uma indução magnética **B**, era dado pela equação (4.1)

$$d\mathbf{F} = id\mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Para um circuito fechado (um "loop") teremos (Fig. 4.3)

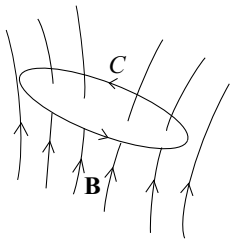


Figura 4.3: Laço (loop) de corrente em um campo de indução magnética.

$$\mathbf{F} = \oint_C id\mathbf{l} \times \mathbf{B}$$

Se **B** for uniforme (ou um loop muito pequeno, de forma que **B** seja praticamente constante)

$$\mathbf{F} = \left(i \oint_C d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B}.$$

Mas

$$\oint_C d\mathbf{l} \equiv 0!.$$

Portanto,

$$\mathbf{F} = 0.$$

O mesmo não pode ser afirmado se **B** não for constante ao longo do percurso.

Apesar da força ser nula, o mesmo não pode ser dito sobre o torque em um circuito ou em uma espira conforme veremos a seguir.

Consideremos uma espira retangular de área infinitensinal situada no plano xy, por simplicidade, conforme o desenho (Fig. 4.4). Sobre a espira $\mathbf{B}$ é praticamente uniforme

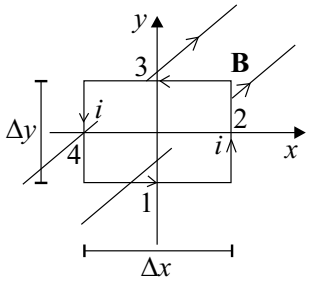


Figura 4.4: Espira retangular em um campo de indução magnética uniforme.

pois a mesma é infinitensinal. A força no lado 1 será

$$d\mathbf{F}_1 = idx\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}$$

$$d\mathbf{F}_1 = idx(B_y\hat{\mathbf{z}} - B_z\hat{\mathbf{y}}).$$

O torque de uma força é definido por $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, sendo $\mathbf{r}$ o vetor posição (torque com relação à origem). Então, o torque devido a $d\mathbf{F}_1$ será

$$d\tau_1 = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}_1 = \left(-\frac{1}{2}dy\hat{\mathbf{y}}\right) \times \left(idx(B_y\hat{\mathbf{z}} - B_z\hat{\mathbf{y}})\right)$$

$$d\tau_1 = -\frac{1}{2}dxdy\ iB_y\hat{\mathbf{x}}.$$

De modo análogo, o torque produzido pela força $d\mathbf{F}_3$no segmento 3 será

$$d\tau_3 = -\frac{1}{2}dxdy\ iB_y\hat{\mathbf{x}} = d\tau_1$$

$$d\tau_1 + d\tau_3 = -dxdy\ iB_y\hat{\mathbf{x}}.$$

Para os lados 2 e 4 teremos

$$d\tau_2 + d\tau_4 = dxdy\ iB_x\hat{\mathbf{y}}$$

e o torque total será

$$d\boldsymbol{\tau} = idxdy\left(B_x\hat{\mathbf{y}} - B_y\hat{\mathbf{x}}\right)$$

ou seja

$$d\boldsymbol{\tau} = idxdy\left(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}\right).$$

Se definirmos

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}ds = dxdy\hat{\mathbf{z}}$$

teremos

$$d\boldsymbol{\tau} = id\mathbf{S} \times \mathbf{B}$$

ou

$$d\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B}, \qquad d\mathbf{m} \equiv id\mathbf{S} = ids\hat{\mathbf{n}} \tag{4.17}$$

sendo $d\mathbf{m}$ definido como o momento magnético diferencial.

Para uma espira plana em um campo uniforme teremos

$$\boldsymbol{\tau} = i\mathbf{S} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \tag{4.18}$$

Observe que o momento magnético é uma característica geométrica da espira por onde passa a corrente i.

Pode-se mostrar que o momento magnético de uma espira vale, em geral,

$$\mathbf{m} = i\frac{1}{2}\oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \tag{4.19}$$

mesmo que a espira não seja plana.

4.7 Indutância

Vimos que a corrente elétrica produz a indução magnética $\mathbf{B}$. No regime estacionário, onde não há acúmulo de cargas elétricas em nenhum ponto do espaço, só é possível existir corrente elétrica em um circuito fechado, ou seja, está definida uma "espira" que limita uma certa superfície S . A passagem da corrente elétrica produz uma indução magnética $\mathbf{B}$ através dessa superfície, criando um fluxo

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds.$$

Como $\mathbf{B}$ é uma função da corrente, o fluxo também o será, $\Phi_B = \Phi_B(i)$.

Definimos a indutância de um circuito como a derivada desse fluxo com relação à corrente

$$L \equiv \frac{d\Phi_B}{di}.$$

Se um circuito é composto por N espiras idênticas,

$$L \equiv N\frac{d\phi_B}{di}, \tag{4.20}$$

onde ϕ_B é o fluxo por uma espira.

Unidades da indutância: webber/A, tesla-m^2/A, Nm/A^2 e henry.

Em um número grande de situações importantes, o fluxo ϕ_B é proporcional à corrente, para esses casos podemos escrever $L \equiv N\phi_B/i$ e a indutância (4.20) não dependerá da corrente, dependerá apenas da geometria uma vez que o fluxo depende da geometria e é proporcional à corrente.

Em muitos circuitos elétricos existem regiões do espaço onde ocorrem grandes concentrações de linhas de campo de indução magnética acompanhadas por fluxos intensos quando

comparados com outras regiões de menores fluxos. É o caso dos circuitos que contém bobinas com muitas espiras de fio. O fluxo no circuito pode então ser aproximado pelos fluxos nessas regiões de maiores concentrações de campo de forma que a indutância do circuito é praticamente a indutância dessas regiões. Falamos então na indutância de um elemento do circuito. Os indutores são dispositivos ou elementos de circuito caracterizados por sua indutância L, construidos especificamente para armazenar energia na forma de um campo de indução magnética, confinando essa indução $\mathbf{B}$ em uma certa região do espaço. Indutores de geometria simples como solenóides longos e toróides são importantes e suas indutâncias são facilmente calculáveis.

Exemplo 1

Considere um toróide de secção retangular, raio interno a raio externo b e altura h com N espiras de fio bastante unidas (Fig. 4.5). Pela simetria do problema, as linhas de indução

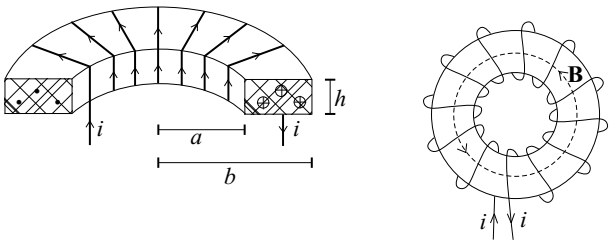


Figura 4.5: Indutor toroidal.

$\mathbf{B}$ devem ser circulares. A utilização da lei de Ampère em um caminho idêntico às linhas de indução $\mathbf{B}$ permitirá determinar este valor.

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 N i$$

onde Ni é a corrente total que "fura" uma superfície apoiada no caminho C.

Sobre o caminho circular, $\mathbf{B}$ é paralelo a $d\mathbf{l}$ e B deve ser constante

$$B \oint_C \hat{\mathbf{B}} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 N i$$

$$B 2\pi r = \mu_0 N i \qquad r \equiv \text{raio do caminho circular}$$

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{2\pi r}. \tag{4.21}$$

Representada na figura (Fig. 4.6).

Observe que se b for muito próximo à a ou se $b - a << a$, o módulo da indução magnética $\mathbf{B}$ será praticamente constante.

O fluxo de $\mathbf{B}$ através da secção retangular será

$$\phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_a^b \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} h dr, \qquad \text{para } \hat{\mathbf{n}} // \mathbf{B}.$$

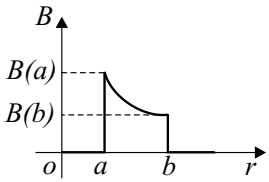


Figura 4.6: Indução magnética no toróide.

$$\phi_B = \frac{\mu_0 N h i}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

e a indutância L

$$L = N\frac{d\phi_B}{di} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{4.22}$$

Se

$$b - a << a, \ \ln\left(\frac{b}{a}\right) \approx \frac{b}{a} - 1 = \frac{b-a}{a}$$

e a é aproximadamente igual ao raio médio do toróide

$$R = \frac{b+a}{2} \approx 2\frac{a}{2}$$

então

$$L \simeq \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} \frac{h\,(b-a)}{a} \simeq \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} \frac{A}{R} \tag{4.23}$$

A =área de seção,
R =raio médio.

Exemplo 2

Considere uma linha de transmissão coaxial longa cujo condutor interno possui raio a e o externo possui raio interno b (Fig. 4.7). Determinemos a indutância por unidade de comprimento. Para efetuar o cálculo suponhamos que uma corrente i entre no condutor interno e retorne pelo condutor externo.

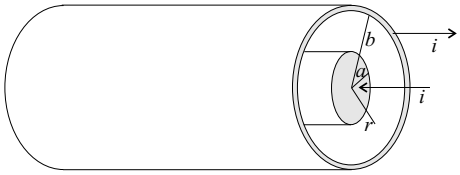


Figura 4.7: Linha coaxial.

A simetria axial do problema indica que as linhas de **B** devem ser circulares. Aplicando a lei de Ampère em um caminho circular idêntico à linha de **B** teremos

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \Longrightarrow B.2\pi r = \mu_0 i \qquad \therefore B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}.$$

O fluxo de **B** por uma superfície retangular plana, paralela ao eixo da linha, entre os dois condutores e para um comprimento l da linha é

$$\phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \frac{\mu_0 i}{2\pi} l \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 i}{2\pi} l \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Portanto, a indutância desse pedaço de linha vale

$$L = \frac{d\phi_B}{di} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\therefore \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ H/m.} \tag{4.24}$$

Exemplo 3

Considere uma linha de transmissão longa, de fios paralelos com seção circular de raio a e separados por uma distância d entre centros.

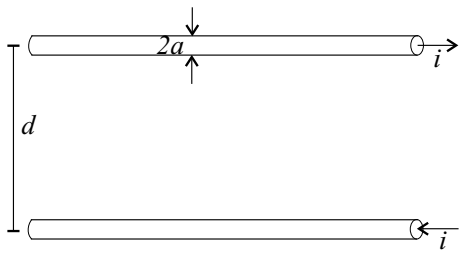


Figura 4.8: Linha paralela.

A indução **B** produzida por um fio apenas vale

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

para os pontos exteriores ao fio. Desprezaremos a indução **B** no interior do fio.

O fluxo de **B**, produzido por apenas um fio, na superfície entre os fios para uma linha de comprimento l será:

$$\phi_{B1} = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_a^{d-a} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} l dr$$

$$\phi_{B1} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} l \ln \frac{d-a}{a}.$$

O fluxo total será a soma dos fluxos produzidos por cada fio, ou seja, o dobro da expressão anterior

$$\phi_B = 2\phi_{B1} = \frac{\mu_0 i}{\pi} l \ln \frac{d-a}{a}.$$

Portanto, a indutância desse pedaço de linha vale

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}$$

$$\therefore \frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d-a}{a}.$$

Para $d >> a$ fica

$$\frac{L}{l} \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{a} \text{ H/m}. \tag{4.25}$$

4.8 Indutância mútua

Quando existem vários circuitos, próximos um aos outros, pode ocorrer que a corrente que passa por um dos circuitos produza um fluxo magnético em outro circuito. Tomemos, por exemplo, uma situação em que existam dois circuitos próximos.

Definimos a indutância mútua entre os dois circuitos, M_{21}, como:

$$M_{21} = N_2 \frac{d\phi_{B_{21}}}{di_1} \tag{4.26}$$

$\phi_{B_{21}}$ = fluxo em uma espira do circuito 2 devido a uma corrente no circuito 1,
N_2 = número de espiras idênticas do circuito 2,
i_1 = corrente no circuito 1.

Se o fluxo for proporcional à corrente podemos escrever

$$M_{21} = N_2 \frac{\phi_{B_{21}}}{i_1}.$$

Da mesma maneira podemos definir

$$M_{12} = N_1 \frac{d\phi_{B_{12}}}{di_2}.$$

Exemplo 4

Considere uma bobina toroidal com N_1 espiras, de secção circular A cujo raio é muito menor que raio médio, R, do toroide.

Uma segunda bobina com N_2 espiras é enrolada sobre a primeira. Determinemos a indutância mútua, supondo duas situações: primeiro, que passe apenas uma corrente i_1 na primeira bobina e, segundo, que, passe apenas uma corrente i_2 na segunda bobina.

A indução B_1 produzida por i_1 será de acordo com (4.21).

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi R} \qquad B_1 = \text{campo médio}.$$

O fluxo

$$N_1 \phi_{B_{11}} = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi R} N_1 A \Longrightarrow L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 A}{2\pi R}$$

e

$$N_2 \phi_{B_{21}} = \frac{\mu_0 N_1 i_1}{2\pi R} N_2 A \Longrightarrow M_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{2\pi R}.$$

A indução B_2 produzida por i_2 será

$$B_2 = \frac{\mu_0 N_2 i_2}{2\pi R}.$$

O fluxo

$$N_2\phi_{B_{22}} = \frac{\mu_0 N_2 i_2}{2\pi R} N_2 A \Longrightarrow L_2 = \frac{\mu_0 N_2^2 A}{2\pi R}$$

e

$$N_1\phi_{B_{12}} = \frac{\mu_0 N_2 i_2}{2\pi R} N_1 A \Longrightarrow M_{12} = \frac{\mu_0 N_2 N_1 A}{2\pi R}.$$

Observe que $M_{12} = M_{21}$. Essa relação é válida sempre que o fluxo for proporcional à corrente. Além disso, podemos verificar que, para esse exemplo,

$$M = M_{12} = M_{21} = \sqrt{L_1.L_2}. \tag{4.27}$$

Em geral, verifica-se que

$$M = k\sqrt{L_1.L_2}, \qquad |k| \leq 1 \tag{4.28}$$

onde k é o coeficiente de acoplamento determinado, normalmente, por meios experimentais. O valor de k pode ser menor que a unidade devido ao fato de nem todas as linhas de **B** produzidas por uma bobina atravessarem a outra bobina.

4.9 A matéria magnetizada. A magnetização.

Vimos que espiras de corrente produzem indução magnética **B** em todos os pontos do espaço. A experiência mostra que essa indução pode ser modificada pelo meio material que circunda as espiras. Além disso, uma fonte natural de **B** (imãs) não está associada à presença de correntes macroscópicas. A perturbação causada pelo meio bem como a existência da fonte natural pode ser melhor compreendida se admitirmos, como um modelo, que no interior da matéria existam "loops" de correntes microscópicas capazes de produzir, no seu conjunto, uma indução **B** adicional, além da produzida pelas correntes macroscópicas. Esses "loops" de corrente dão origem a momentos magnéticos microscópicos que, na matéria comum, deverão estar aleatoriamente orientados para não produzir uma indução **B** macroscópica detectável. Contudo, esses momentos magnéticos poderão se orientar na presença de uma indução **B** externa (produzida por uma espira de corrente por exemplo) de modo produzir uma indução **B** adicional alterando o valor que existiria na ausência do meio material.

Nas fontes naturais (imãs) esses momentos deverão estar previamente orientados e mantidos em suas posições (como se estivessem "colados") de modo produzir uma indução **B** macroscópica permanente. A experiência mostra também que o aquecimento e o choque mecânico contribuem para o enfraquecimento da indução **B** produzida pelas fontes naturais, o que parece indicar que essas ações físicas desorientam os momentos magnéticos.

As correntes que originam os momentos magnéticos devem ser correntes a nível atômico, de modo que, podemos associar um momento magnético **m** a cada átomo. Definamos agora uma grandeza vetorial macroscópica que meça a densidade dos momentos magnéticos no interior da matéria, a magnetização **M**.

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta v \longrightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_i \mathbf{m}_i.$$

M é o momento magnético por unidade de volume e Δv é um elemento de volume infinitesimal do ponto de vista macroscópico.

Procuremos relacionar a magnetização **M** com as correntes que existem no interior da matéria. Consideremos que existam "loops" de corrente no interior da matéria e que a densidade desses loops seja variável (Fig. 4.9).

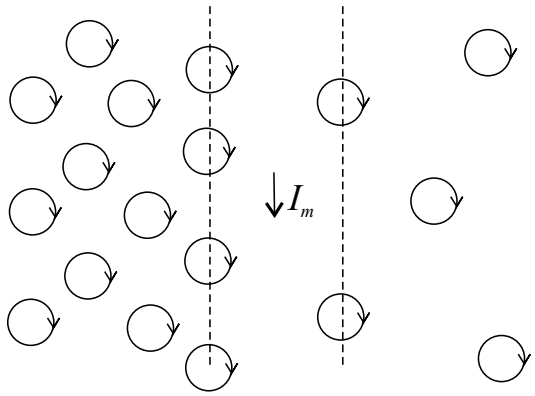


Figura 4.9: Laços de corrente no interior da matéria.

Devido ao fato da distribuição não ser constante, existem regiões de espaço onde as correntes dos loops adjantes não se cancelam, dando origem a uma corrente I_m como mostrado na figura no espaço entre as linhas interrompidas.

Essa corrente é chamada de corrente de magnetização e, apesar de não haver transporte de cargas livres, é equivalente a uma movimentação efetiva das cargas.

Consideremos dois elementos de volume adjacentes, no interior da matéria magnetizada conforme a figura (Fig. 4.10).

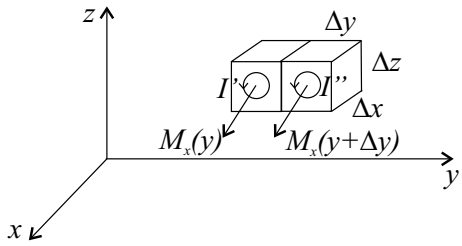


Figura 4.10: Laços de corrente nas faces de dois elementos de volume adjacentes no interior da matéria.

Se a magnetização no primeiro elemento de volume vale $\mathbf{M}(x, y, z)$, no segundo elemento ela valerá

$$\mathbf{M}(x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{M}(x, y, z)}{\partial y} \Delta y + ...$$

analisando por componentes, teremos para a projeção M_x do primeiro elemento de volume,

a relação:

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = m_x.$$

Mas, pela definição de momento magnético, equação (4.17), temos

$$m_x = I' \Delta y \Delta z, \qquad I' \text{ orientado de acordo com a figura.}$$

Logo,

$$M_x \Delta x \Delta y \Delta z = I' \Delta y \Delta z.$$

Para o segundo elemento de volume teremos

$$\left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x \Delta y \Delta z = I'' \Delta y \Delta z$$

e a corrente "líquida" para cima entre os dois elementos vale

$$I' - I'' = -\frac{\partial M_x}{\partial y} \Delta x \Delta y.$$

Se nós considerarmos agora dois elementos de volume adjacentes, na direção do eixo x encontraremos que

$$I'''' - I''' = \frac{\partial M_y}{\partial x} \Delta x \Delta y.$$

Essas são as únicas correntes na direção do eixo z de modo que

$$\frac{I'''' - I''' + I' - I''}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}.$$

O termo da esquerda é uma densidade de corrente na direção do eixo z, que chamaremos de $(\mathbf{J}_M)_z$

$$(\mathbf{J}_M)_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}.$$

Calculando para os outras componentes encontraremos

$$(\mathbf{J}_M)_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad (J_M)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z},$$

ou seja,

$$\mathbf{J}_M = \mathbf{rotM}. \tag{4.29}$$

A densidade de corrente de magnetização é o rotacional da magnetização.

4.10 O vetor intensidade magnética, H

Na ausência de matéria magnetizável, a indução magnética é caracterizada por duas equações fundamentais:

$$div\mathbf{B} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{rotB} = \mu_0 \mathbf{J}.$$

A primeira equação está ligada ao fato das linhas de indução de **B** serem fechadas, uma propriedade fundamental desse campo, que independe de que corrente o produziu, correntes

verdadeiras ou correntes de magnetização. Isso pode ser denotado pela possibilidade de se escrever **B**, sempre, como o rotacional de um potencial vetorial. A segunda equação foi deduzida considerando que a única fonte para a indução magnética **B**, era a densidade de corrente verdadeira. Na presença de matéria magnetizável, devemos levar em consideração a densidade de corrente de magnetização e escrever:

$$\mathbf{rotB} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{J}_M). \tag{4.30}$$

Substituindo (4.29) teremos

$$\mathbf{rotB} = \mu_0(\mathbf{J} + \mathbf{rotM})$$

$$\therefore \left(\mathbf{rot}\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{rotM}\right) = \mathbf{J}$$

$$\therefore \mathbf{rot}\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right) = \mathbf{J}.$$

Definimos o vetor intensidade magnética **H** como:

$$\mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \tag{4.31}$$

Portanto,

$$\mathbf{rotH} = \mathbf{J} \tag{4.32}$$

que é a forma diferencial da lei de Ampère para a matéria magnetizada.

Por essa expressão, vemos que o vetor **H** é que está diretamente associado à densidade de corrente verdadeira.

Integrando (4.32) em uma superfície aberta S qualquer (Fig. 4.11),

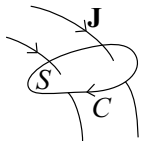


Figura 4.11: Densidade de corrente atravessando uma superfície S.

$$\int_S \mathbf{rotH} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = i$$

e utilizando o Teorema de Stokes teremos

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i \tag{4.33}$$

que é a lei de Ampère na forma integral para a matéria magnetizada onde i é a corrente que "fura" S e C é o contorno de S.

4.11 Permeabilidade magnética, histerese ferromagnética

Observe que ao definirmos o vetor **H** pudemos relaciona-lo diretamente com as fontes verdadeiras (**J** ou i). Contudo, ainda não podemos determinar a indução magnética **B**, pois ainda não conhecemos o valor da magnetização (ou a densidade de corrente de magnetização). Necessitamos, portanto, de uma ligação entre a magnetização **M** e a intensidade magnética **H**. Essa relação depende da natureza do material magnético e é normalmente obtida da experiência. Em muitos materiais existe uma relação aproxiamdamente linear entre **M** e **H**, podemos escrever.

$$\mathbf{M} = X_m \mathbf{H} \tag{4.34}$$

X_m é uma quantidade adimensional chamada susceptibilidade magnética.

Quando X_m é positivo o material é dito paramagnético. Quando X_m é negativo o material é dito diamagnético. Em geral $|X_m| << 1$ para os materiais paramagnéticos e diamagnéticos. Veja (Tab. 4.1).

Material	X_m
Alumínio	$2,3 \times 10^{-5}$
Cobre	$-0,98 \times 10^{-5}$
Ouro	$-3,6 \times 10^{-5}$
Prata	$-2,6 \times 10^{-5}$
Titanio	$7,06 \times 10^{-5}$
Tungstenio	$6,8 \times 10^{-5}$

Tabela 4.1: Susceptibilidade magnética de alguns metais.

Das equações (4.31) e (4.34) temos

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - X_m \mathbf{H}$$

$$(1 + X_m)\,\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \qquad \therefore \mathbf{B} = \mu_0\,(1 + X_m)\,\mathbf{H}$$

$$\therefore \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \qquad \mu \equiv \mu_0\,(1 + X_m) \tag{4.35}$$

$\mu \equiv$permeabilidade magnética do meio.

Define-se também a permeabilidade relativa k_m

$$k_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + X_m. \tag{4.36}$$

Observe que para substâncias paramagnéticas e diamagnéticas $k_m \simeq 1$ ou seja $\mu \simeq \mu_0$.

Em resumo, **H** está diretamente relacionado a corrente verdadeira i (ou **J**) e **B** está relacionada a **H** através da permeabilidade μ.

Uma classe especial de materiais magnéticos é formada pelos ferromagnéticos. Esses materiais podem possuir uma magnetização permanente, são altamente não lineares e sua presença causa mudanças profundas na indução magnética. As equações (4.35) e (4.36)

não são aplicáveis com X_m e μ constantes mas ainda é possível definir uma permeabilidade $\mu = \mu(\mathbf{H})$ tomando um certo cuidado.

Vejamos o comportamento típico de um material ferromagnético inicialmente desmagnetizado ($\mathbf{M} = 0$) colocado no interior de um solenóide (ou de um toróide) por onde passa uma corrente i. A lei Ampère

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i$$

permite relacionar $\mathbf{H}$ diretamente à i.

Inicialmente, partindo de $i = 0$ no sentido crescente (e positivo) será estabelecido um campo $\mathbf{H}$ crescente no material ferromagnético. A magnetização começa a se formar e a indução magnética $\mathbf{B}$ segue a curva típica a seguir (Fig. 4.12).

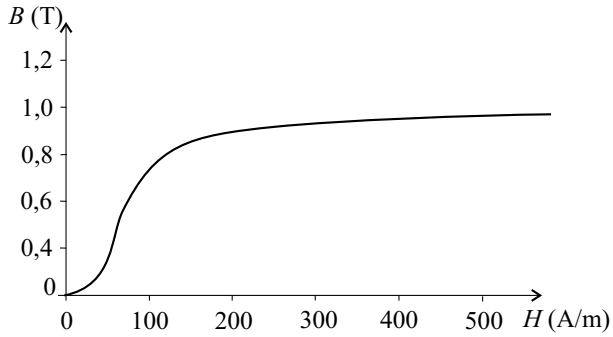


Figura 4.12: Curva de magnetização para o ferro doce comercial (annealed).

A magnetização cresce rapidamente no ínicio fazendo com que a indução $\mathbf{B}$ se eleve com grande inclinação. Como a magnetização está relacionada à orientação dos momentos magnéticos no interior da matéria, o valor máximo ocorrerá quando todos os momentos estiverem orientados (alinhados) atingindo uma situação de saturação. Pela relação (4.31)

$$\mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{H} + \mathbf{M} \right),$$

a partir dessa situação, o aumento em $\mathbf{B}$ será devido ao termo $\mu_0 \mathbf{H}$ e ocorre com pequena inclinação no trecho final aproximadamente reto.

Suponhamos agora que, a partir desse estado de magnetização, a corrente no solenoide seja diminuida (diminuição de $\mathbf{H}$). Observa-se que a indução magnética diminuie o seu valor segundo uma curva diferente da curva inicial, alcançando o ponto r quando $H = 0$ no gráfico seguinte (Fig. 4.13).

O valor $B = r$ é chamado de retentividade ou campo remanente.

Esse fenômeno chama-se "histerese", a magnetização segue atrasada com relação ao campo excitante.

Invertendo-se a corrente, a indução $\mathbf{B}$ diminue até anular-se. Quando isso ocorre, denominamos o valor de $\mathbf{H}$ correspondente de coercitividade do material (Fig. 4.14). $c \equiv$coercitividade.

Proseguindo com a diminuição da corrente (sentido negativo) e depois aumentando obteremos um "loop de histerese"(Fig. 4.15).

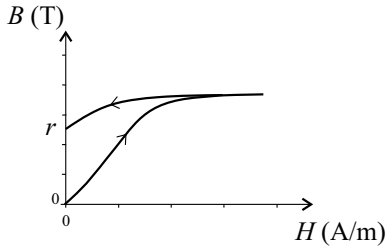


Figura 4.13: Campo remanente na curva de magnetização.

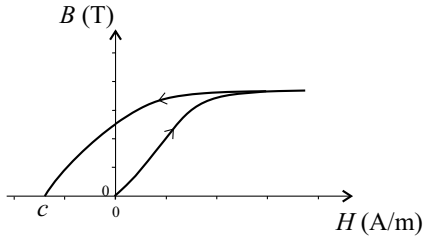


Figura 4.14: Coercitividade na curva de magnetização.

Para levar o material novamente ao estado desmagnetizado é necessário realizar vários ciclos de histerese com correntes máximas descrescentes (Fig. 4.16).

Os materiais ferromagnéticos são normalmente utilizados para aumentar a indução magnética produzida por circuitos de corrente e como fonte de indução magnética (no caso dos imãs permanentes). No primeiro caso, procura-se utilizar materiais com valores elevados de permeabilidade relativa enquanto que no segundo caso busca-se por valores elevados de campo remanente.

Algumas ligas utilizadas para a fabricação de imãs permanentes podem ser vistas na tabela (Tab. 4.2).

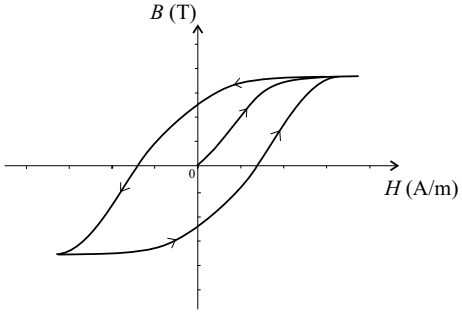


Figura 4.15: Laço ou "loop" de histerese.

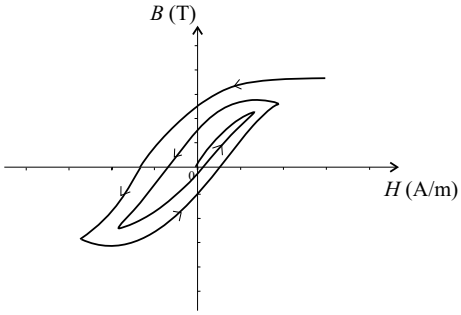


Figura 4.16: Laço ou "loop" de histerese decrescente.

Material	r (W/m^2)	c (A/m)
Alnico 12	$0,6$	$7,6 \times 10^4$
Alnico 5	$1,25$	$4,4 \times 10^4$
Aço Cobalto 35%	$0,9$	$1,6 \times 10^4$
Ferrite de Estrôncio FXD400	$0,4$	$2,4 \times 10^5$

Tabela 4.2: Ligas utilizadas em imãs.

4.12 Condições de contorno

Consideremos dois meios materiais com permeabilidades magnéticas diferentes e vejamos como os vetores **B** e **H** mudam os valores na fronteira entre esses dois meios.

Aplicando a integral de fluxo de **B** em um pequeno cilindro de seção Δs conforme a figura (Fig. 4.17) teremos

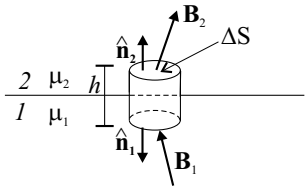


Figura 4.17: Fluxo da indução magnética em um pequeno cilindro na fronteira entre dois meios.

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 0 \Longrightarrow \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \Delta s + \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \Delta s = 0, \qquad \hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{n}}_2$$

$$\therefore \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \Delta s - \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \Delta s = 0$$

$$\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n} = 0 \qquad \therefore \mathbf{B}_{2n} = \mathbf{B}_{1n}. \tag{4.37}$$

Ou seja, o componente normal de **B** é contínuo através da fronteira.

Se aplicarmos a lei de Ampère em um caminho retangular conforme a figura (Fig. 4.18) teremos

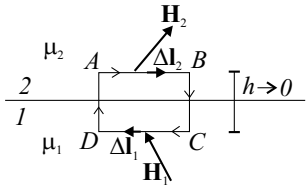


Figura 4.18: Integral de caminho na fronteira entre dois meios.

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i$$

i é a corrente que fura a superfície delimitada pelo caminho.

Como a altura do retângulo é infinitamente pequena, por hipotése, essa corrente só pode ser uma corrente superficial na fronteira entre os dois meios, se houver tal corrente.

$$\mathbf{H}_1 \cdot \Delta\mathbf{l}_1 + \mathbf{H}_2.\Delta\mathbf{l}_2 = i, \qquad \Delta\mathbf{l}_1 = -\Delta\mathbf{l}_2 = \Delta\mathbf{l}$$

$$\therefore H_{1t} - H_{2t} = \frac{i}{\Delta l}$$

definamos

$$j_s \equiv \frac{i}{\Delta l}$$

como a densidade linear de corrente superficial, então

$$H_{1t} - H_{2t} = j_s. \tag{4.38}$$

Se não houver tal corrente teremos uma continuidade no componente tangencial de $\mathbf{H}$,

$$H_{1t} = H_{2t}$$

$$\therefore \frac{B_{1t}}{\mu_1} = \frac{B_{2t}}{\mu_2}. \tag{4.39}$$

4.13 Os circuitos magnéticos

Vimos anteriormente que uma bobina de forma toroidal vazia (sem núcleo) produzia uma indução magnética cujas linhas acompanham a forma circular mantendo-se praticamente no interior do toróide (Fig. 4.19). A aplicação da lei de Ampère resulta em

$$Hl = Ni$$

l =comprimento do caminho circular no interior do toroide, $2\pi r$
N =número de espiras.

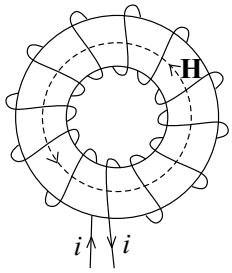


Figura 4.19: Bobina toroidal.

Como o interior do toróide é vazio,

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \qquad \text{e} \qquad B = \mu_0 \frac{Ni}{l}$$

Preenchendo o interior do toroide com material magnetizável linear passaremos a ter a contribuição da magnetização, ou seja,

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \qquad H = \frac{Ni}{l}$$

portanto,

$$B = \mu \frac{Ni}{l} = \mu_0 \frac{Ni}{l} + \mu_0 M. \tag{4.40}$$

Para núcleos ferromagnéticos a magnetização é elevada, a indução B é muitas vezes maior que no vazio e as linhas são praticamente confinados ao interior do toróide mesmo que as espiras não estejam muito unidas ou que haja regiões sem espiras. Observando que as linhas de indução formam um "tubo de fluxo" e que o fluxo em cada seção do toróide deve ter o mesmo valor, falamos então em um circuito magnético.

O interior do toróide pode ser preenchido com materiais diversos, digamos $1, 2$ e 3 conforme a figura (Fig. 4.20).

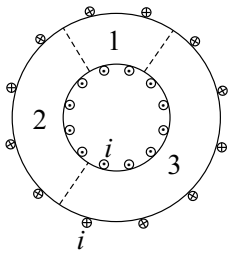


Figura 4.20: Bobina toroidal com diversos materiais do núcleo.

A aplicação da lei Ampère

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = Ni$$

não permite determinar o valor H, pois o mesmo não é mais constante durante a integração em virtude de haver materiais diversos. Contudo, em cada material, podemos escrever

$$H = \frac{B}{\mu}, \qquad B = \frac{\phi}{A}$$

$\phi \equiv$fluxo pela seção (constante em todas as seções)
$A =$área da seção.

Portanto,

$$\oint_C \frac{\phi}{\mu A} dl = Ni \qquad \therefore \phi \oint_C \frac{d\mathbf{l}}{\mu A} = Ni$$

$$\phi = \frac{Ni}{\oint_C \frac{d\mathbf{l}}{\mu A}}. \tag{4.41}$$

Em função da semelhança existente com a lei de ohm define-se as seguintes grandezas:

$$Ni \equiv \text{“força magnetomotriz”}, \; f.m.m.$$

$$\oint_C \frac{dl}{\mu A} \equiv \text{“relutância”}, \; \widetilde{R} \tag{4.42}$$

$$\phi = \frac{f.m.m.}{\widetilde{R}}. \tag{4.43}$$

A cada material que compõe o núcleo podemos associar uma relutância

$$\widetilde{R}_i = \int \frac{dl_i}{\mu_i A_i}$$

e

$$\widetilde{R} = \sum_i \widetilde{R}_i \text{ , pois } \oint_C \frac{dl}{\mu A} = \sum_i \int \frac{dl_i}{\mu_i A_i}. \tag{4.44}$$

Ou seja, as relutâncias estão em “série” em um circuito magnético simples.

Para materiais magnéticos lineares o cálculo da relutância é simples de ser realizado em virtude da permeabilidade de cada trecho ser constante. Em materiais ferromagnéticos (os mais utilizados nos circuitos magnéticos) a permeabilidade μ é uma função da intensidade magnética H, que por sua vez é desconhecida, até que o circuito esteja resolvido e o fluxo ϕ determinado. Nesse caso, o circuito deve ser resolvido de modo iterativo:

- Estima-se o valor inicial de H como $H = Ni/l_{total}$ sendo l_{total} o comprimento de todo o percurso.
- Utilizando-se a curva de magnetização de cada material determinam-se os valores das permeabilidades para o valor de H estimado.
- Calcula-se a relutância total do circuito a partir da relutância de cada trecho.
- Calcula-se então o fluxo ϕ utilizando a equação (4.43).
- Determina-se a indução $\mathbf{B}$ a partir do fluxo através da seção em cada trecho.
- Com os valores de B encontram-se os valores de H e μ nas curvas de magnetização.

- Volta-se ao terceiro passo e passos seguintes seguintes até que a variação do fluxo fique num intervalo de erro determinado.

As relutâncias dos materiais ferromagnéticos são normalmente da ordem de 10^3 vezes menores que outros materiais de mesmas dimensões de forma que, se tivermos dois caminhos magnéticos em paralelo (ferro e ar por exemplo), a maior parte do fluxo se dará pelo caminho ferromagnético. Assim, o circuito magnético representado a seguir (Fig 4.21) é essencialmente idêntico ao anterior (Fig 4.20) desde que os materiais sejam ferromagnéticos.

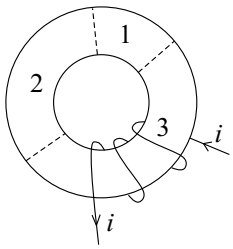


Figura 4.21: Bobina toroidal com poucas espiras e diversos materiais do núcleo.

Apesar da bobina não ter sido enrolada em toda a extensão do toróide, as linhas de **B** (ou **H**) permanecem concentradas no interior do material. O pouco fluxo que "escapa" para o exterior do material magnético é conhecido como "fluxo disperso".

Consideremos agora um circuito magnético que possua uma interrupção, um "gap" ou um entreferro de comprimento l_e suposto, por hipótese, muito menor que o comprimento l_n do núcleo de material ferromagnético (Fig. 4.22).

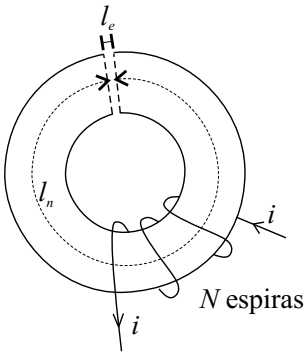


Figura 4.22: Bobina toroidal com entreferro.

Teremos então a partir da lei de Ampère:

$$Ni = H_n l_n + H_{\mathbf{e}} l_{\mathbf{e}}, \qquad \text{supondo } H_n \text{ e } H_{\mathbf{e}} \text{ constantes.}$$

O fluxo é uma constante em qualquer seção, contudo na região do entreferro ocorre um espraiamento das linhas de **B** (ou **H**) de modo que esse fluxo deve ser calculado em uma

área maior que a área do núcleo. Se o núcleo for de seção retangular com dimensões a e b, uma área aparente pode ser encontrada, empíricamente, com boa aproximação como

$$A_e = (a + l_e)(b + l_e) \tag{4.45}$$

de modo que

$$H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\phi}{A_e}$$

$$\therefore H_e l_e = \frac{l_e}{\mu_0}\frac{\phi}{A_e}. \tag{4.46}$$

Portanto,

$$Ni = \frac{l_n}{\mu}\frac{\phi}{A} + \frac{l_e}{\mu_0}\frac{\phi}{A_e}, \qquad A = ab, \qquad A_e = (a + l_e)(b + l_e). \tag{4.47}$$

Exemplo 5

Um núcleo magnético fabricado em ferro fundido tem uma seção $A_n = 6,0$ cm^2 e um comprimento médio $0,3$ m como mostrado na figura (Fig. 4.23) . O entreferro de 2 mm tem uma área aparente $A_e = 6,88$ cm^2. Para uma $f.m.m$ igual a 500 A determinemos o fluxo ϕ no entreferro.

Façamos uma estimativa inicial dos valores das relutâncias supondo $\mu \approx 10^3\mu_o$.

$$\frac{l_e}{\mu_0 A_e} \approx \frac{2 \times 10^{-3}}{\mu_0 \times 6,88 \times 10^{-4}} \approx \frac{2,9}{\mu_0}$$

$$\frac{l_n}{\mu A_n} \approx \frac{0,3}{10^3\mu_0 \times 6,0 \times 10^{-4}} \approx \frac{0,5}{\mu_0}.$$

Esse resultado justifica considerar, inicialmente, que toda $f.m.m$ esteja aplicada no entreferro

$$Ni = \frac{l_e}{\mu_0}\frac{\phi}{A_e}$$

$$500 = \frac{2 \times 10^{-3}\phi}{4\pi \times 10^{-7} \times 6,88 \times 10^{-4}} \qquad \therefore \phi_1 = 2,16 \times 10^{-4}\ \mathrm{W_b}.$$

Utilizemos esse valor de ϕ para determinar μ no núcleo a partir do gráfico,

$$\phi_1 = 2,16 \times 10^{-4}\ \mathrm{Wb} \Longrightarrow B_n = \frac{\phi_1}{A_n} = \frac{2,16 \times 10^{-4}}{6,0 \times 10^{-4}} = 0,36\ \mathrm{T}$$

$$B_n = 0,36\ \mathrm{T} \Longrightarrow H_n = 900\ \mathrm{A/m} \Longrightarrow \mu = 4,0 \times 10^{-4}\ \mathrm{H/m}.$$

Recalculemos ϕ com esse valor de μ em (4.47)

$$500 = \left(\frac{2,9}{4\pi \times 10^{-7}} + \frac{500}{4,0 \times 10^{-4}}\right)\phi_2$$

$$500 = \left(2,3 \times 10^6 + 1,25 \times 10^6\right)\phi_2$$

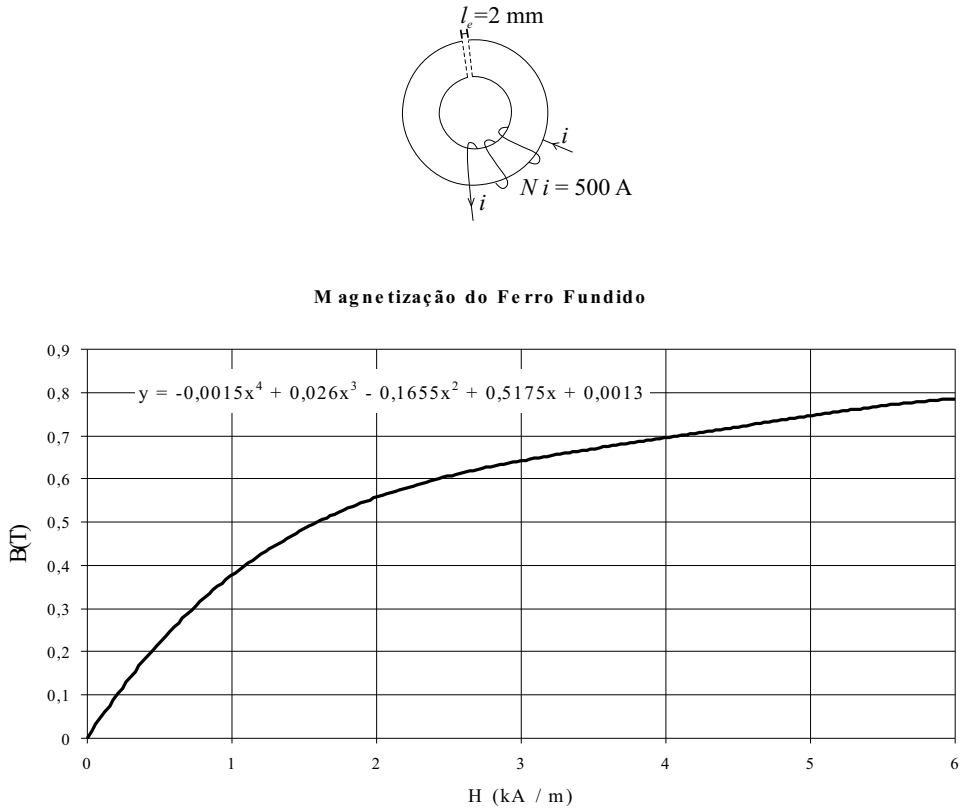


Figura 4.23: Bobina toroidal com entreferro e curva de magnetização do Ferro Fundido.

$$\therefore \phi_2 \approx 1,41 \times 10^{-4} \text{ Wb} \Longrightarrow B_n = 0,235 \text{ T}$$

para

$$B_n = 0,235 \text{ T} \Longrightarrow H_n = 525 \text{ A/m} \Longrightarrow \mu = 4,47 \times 10^{-4}\text{H/m}.$$

Recalculemos ϕ

$$500 = \left(2,3 \times 10^6 + \frac{500}{4,47 \times 10^{-4}}\right)\phi_3$$

$$\therefore \phi_3 = 1,47 \times 10^{-4} \Longrightarrow B_n = 0,245 \text{ T}$$

para

$$B_n = 0,245 \text{ T} \Longrightarrow H_n = 550 \text{ A/m} \Longrightarrow \mu = 4,46 \times 10^{-4}\text{H/m}.$$

Recalculemos ϕ

$$500 = \left(2,3 \times 10^6 + \frac{500}{4,46 \times 10^{-4}}\right)\phi_4$$

$$\therefore \phi_4 = 1,47 \times 10^{-4}\text{Wb} \Longrightarrow B_n = 0,245 \text{ T}$$

$$\therefore \phi = 1,47 \times 10^{-4} \text{ Wb}$$

e

$$B_n = 0,245 \text{ T}.$$

Exemplo 6

Um circuito magnético toroidal cuja seção transversal possui uma área de $3,0$ cm^2 é composto de um setor circular de 90° de ferro fundido e um setor de aço fundido onde existe uma bobina de fio circulando uma corrente igual a 4,0 A, figura (Fig. 4.24). O raio médio do toroide vale $15,0$ cm. Determinemos a quantidade de espiras da bobina de modo que a indução magnética no ferro fundido seja $B = 0,30$ T.

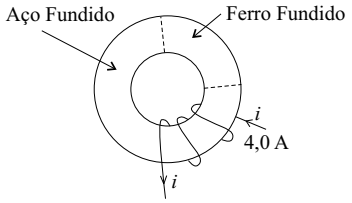


Figura 4.24: Bobina toroidal composta de Aço Fundido e Ferro Fundido.

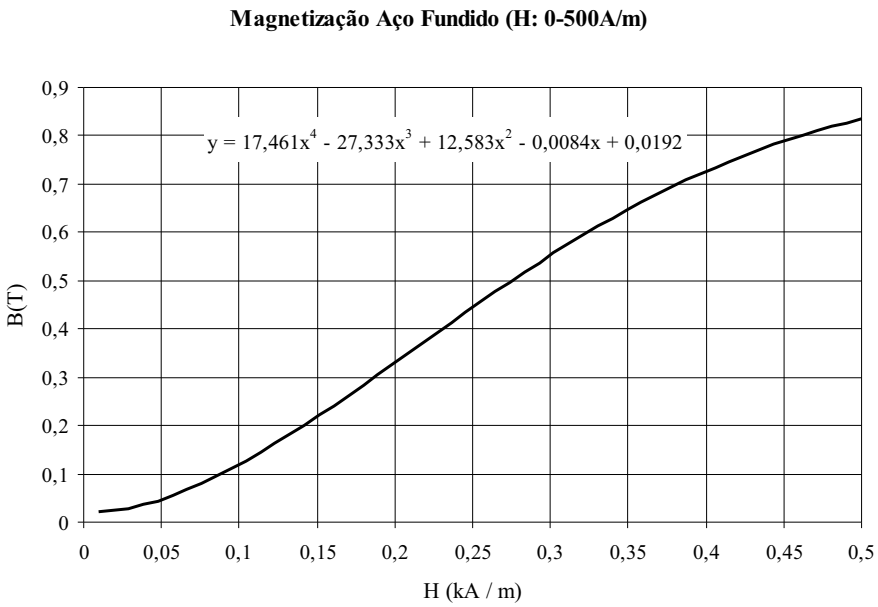


Figura 4.25: Curva de Magnetização do Aço Fundido.

O fluxo é constante e vale $\phi_B = B.A = 0,3 \times 3,0 \times 10^{-4} = 0,9 \times 10^{-4}$ Wb.
O comprimento médio do setor 270°: $l_1 = 3/4 \times 2\pi R = 3/2 \times \pi \times 0,15 = 0,707$ m.
O comprimento médio do setor 90°: $l_2 = 1/4 \times 2\pi R = 0,236$ m.
Pela curva $B - H$ para o ferro fundido, para $B_1 = 0,30$ T$\Longrightarrow H_1 = 720$ A/m.
O valor de B no aço fundido deverá ser o mesmo do ferro fundido pois a seção é constante.
Pela curva $B - H$ para aço fundido (Fig. 4.25), para $B_2 = 0,30$ T$\Longrightarrow H_2 \approx 185$ A/m. Então

$$f.m.m = Ni = H_1 l_1 + H_2 l_2$$

$$N = \frac{720 \times 0,236 + 185 \times 0,707}{4,0} \approx 75,1 \text{ espiras.}$$

Exemplo 7

O circuito magnético da figura (Fig. 4.26) é fabricado em ferro fundido com comprimento médio $l_n = 0,20$ m, seção quadrada de $3,0$ cm $\times$ $3,0$ cm e um entreferro de comprimento $l_e = 2,0$ mm. Determinemos a corrente que deve circular pelo enrolamento de 600 espiras para produzir um fluxo de $0,12$ mW$_\text{b}$ no entreferro.

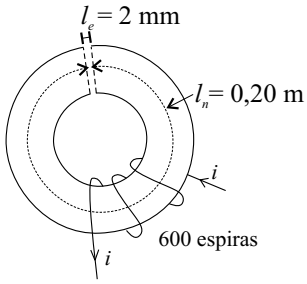


Figura 4.26: Circuito magnético de Ferro Fundido com entreferro.

Temos

$$Ni = H_n \mathbf{l}_n + H_e \mathbf{l}_e.$$

Como o fluxo é constante, a indução magnética será

$$B_n = \frac{\phi}{A_n} = \frac{0,12\ 10^{-3}}{9,0 \times 10^{-4}} = 0,133 \text{ T.}$$

Pela curva $B - H$ (Fig. 4.23) $\Longrightarrow H_n = 290$ A/m $\quad \therefore H_n l_n = 290 \times 0,20 = 58$ A.
No entreferro

$$A_e = (0,03 + 0,002) \times (0,03 + 0,002) = 1,02 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$B_e = \frac{\phi}{A_e} = \frac{0,12 \times 10^{-3}}{1,02 \times 10^{-3}} = 0,117 \text{ T} \qquad \therefore H_e = \frac{B_e}{\mu_0} = \frac{0,117}{4\pi \times 10^{-7}} = 9,31 \times 10^4$$

$$H_e = 9,31 \times 10^4 \text{ A/m} \qquad \therefore H_e l_e = 186 \text{ A}$$

logo

$$i = \frac{186 + 58}{600} \approx 0,41 \text{ A}.$$

Curvas de magnetização para outros materiais podem ser encontradas no apêndice A com os respectivos polinômios interpoladores. Na maioria dos materiais as curvas estão separadas por trechos, para garantir um bom ajuste dos polinômios.

Capítulo 5

Campos magnéticos e elétricos variáveis no tempo

Nos itens anteriores tratamos dos campos estacionários, a eletrostática e a magnetostática. Estudemos agora os campos variáveis no tempo e algumas consequências importantes devidas a essas variações.

5.1 A lei de Faraday

É mais uma lei experimental independente (não pode ser demonstrada a partir de outras leis) descoberta por Faraday em Londres e Henry em Albany separadamente, por volta de 1831, relacionando a variação do fluxo da indução magnética no tempo e o campo elétrico induzido.

Consideremos um caminho fechado C que pode ser, inclusive, um circuito resistivo que esteja sendo atravessado por uma indução magnética, $\mathbf{B}$, dando origem a um fluxo ϕ_B por uma superfície S apoiada nesse caminho (Fig. 5.1).

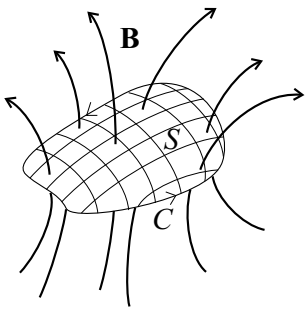


Figura 5.1: Fluxo da indução magnética.

$$\phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

Esse fluxo poderá variar no tempo caso **B** varie no tempo, caso a geometria esteja variando no tempo ou ambos simultaneamente.

A lei de Faraday afirma que a variação do fluxo no tempo dá origem a um campo elétrico induzido tal que a integral desse campo ao longo do caminho (integral de linha) ou "força eletromotriz induzida"é diretamente proporcional à taxa de variação do fluxo da indução magnética **B** no tempo, com uma constante de proporcionalidade igual a -1 no sistema SI.

$$\oint_C \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} \ = - \frac{d}{dt} \left(\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \right) \tag{5.1}$$

Notar que o caminho C e a normal $\hat{\mathbf{n}}$ são associados pela regra da mão direita.

Mais simplesmente,

$$\varepsilon_{ind} = - \frac{d\ \phi_B}{dt}. \tag{5.2}$$

A presença de tal campo elétrico induzido pode ser evidenciada em um circuito resistivo pelo aparecimento de uma corrente induzida que deverá satisfazer a lei de Ohm. Somos obrigados a concluir a existência de um campo induzido que dê origem a $f.e.m.$

Observe que o campo elétrico induzido não é conservativo uma vez que a integral de linha fechada não é nula.

Consideremos, inicialmente, que a variação de fluxo seja devido apenas a variação da indução **B** no tempo, sendo o circuito rígido e estacionário. Nesse caso, a derivação pode ser posta como:

$$\oint_C \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} \ = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

ou aplicando o T. de Stokes

$$\int_S \mathbf{rot}\mathbf{E}_{ind} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \ = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds \ , \ \forall \ S$$

$$\therefore \ \mathbf{rot}\mathbf{E}_{ind} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ou

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} \ = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.3}$$

uma vez que, se houver componente eletrostática,

$$\mathbf{rot}\mathbf{E}_{esta} = 0.$$

Considere agora que o circuito se movimente sendo o circuito feito de material condutor. Uma carga elétrica q desse condutor que possua uma velocidade **V** estará sujeita a uma força dada pela equação (4.4) $\mathbf{F} \ = q\mathbf{V} \times \mathbf{B}$. Podemos definir um campo elétrico (não eletrostático) como

$$\mathbf{E}'_{ind} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{V} \times \mathbf{B}.$$

Integrando esse campo ao longo do circuito teremos a $f.e.m.$ associada à movimentação do circuito com a consequente variação do fluxo de $\mathbf{B}$ no tempo

$$\oint_C \mathbf{E}'_{ind} \cdot d\mathbf{l} \; = \oint_C \; (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \; \cdot d\mathbf{l}.$$

Essa $f.e.m$ é conhecida como $f.e.m$ induzida de movimento e não está associada a variação da indução magnética $\mathbf{B}$ no tempo.

Como a variação do fluxo no tempo possui essas duas contribuições, a $f.e.m.$ induzida total será a soma das duas anteriores, ou seja

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{E}'_{ind} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \; (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \; \cdot d\mathbf{l} \; - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \; \cdot \hat{n} ds. \tag{5.4}$$

A $f.e.m$ de movimento está presente na maioria dos equipamentos onde existe movimentação de fios em campo de indução magnética (geradores, motores etc.) enquanto que a $f.e.m$ devido à variação de $\mathbf{B}$ é a que existe nos transformadores e em alguns motores e alternadores.

Exemplo1

Aquecimento por indução.

Uma espira de fio resistivo possui 40 cm^2 de área e uma resitência de 10 Ω. Uma indução magnética $\mathbf{B}$ uniforme no espaço e perpendicular ao plano da espira varia senoidalmente no tempo com amplitude $B_0 = 1,2$ T. Determinar a frequência da indução $\mathbf{B}$ para que a potência média dissipada na espira seja igual a 100 W.

Nesse exemplo, a espira é fixa e a indução $\mathbf{B}$ varia no tempo produzindo um fluxo variável

$$B = B_0 \text{sen} \omega t$$

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = B \; A, \qquad \text{pois } \mathbf{B} \text{ é paralelo à } \hat{\mathbf{n}} \text{ e é uniforme,}$$

$$\phi = B_0 \; A \; \text{sen} \; \omega t = \phi_0 \; \text{sen} \; \omega t, \;\; \phi_0 = B \; A$$

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -\; B_0 \; A \; \omega \cos \omega t = -\varepsilon_0 \cos \omega t.$$

A potência média é dada por

$$< P > = \frac{\varepsilon_{ef}^2}{R}, \quad \varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}}$$

$$< P > = \frac{(B_0 \; A \; \omega)^2}{2R} \qquad \therefore < P > = \frac{(B_0 \; A \; 2\pi f)^2}{2R}$$

$$\therefore \; \sqrt{2R < P >} = B_0 \; A \; 2\pi f$$

$$\therefore \; f = \frac{\sqrt{2R < P >}}{B_0 \; A \; 2\pi} \quad f = \frac{\sqrt{2 \times 10 \times 100}}{1,2 \times 40 \times 10^{-4} \times 2\pi} \; \approx 1483\text{Hz}.$$

Poderiamos ter calculado a $f.e.m$ diretamente de

$$\varepsilon = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \text{sen}\, \omega t$$

$$\varepsilon = -\int_S \mathbf{B}_0 \omega \cos \omega t \,.\, \hat{\mathbf{n}} ds = -B_0 \omega A \cos \omega t, \;\; \mathbf{B}_0 \text{ paralelo a } \hat{\mathbf{n}}.$$

Exemplo2

Determine a f.e.m induzida num fio reto que se move perpendicularmente a um campo uniforme **B** (constante no tempo e no espaço) com uma velocidade V como mostra a figura (Fig. 5.2). O campo está restrito ao raio R das peças polares de um imã circular.

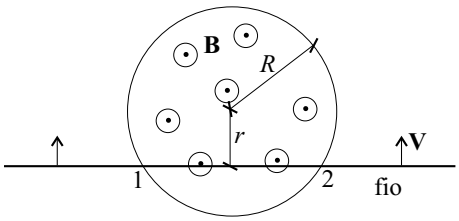


Figura 5.2: Fio em movimento em um campo de indução magnética.

Nesse caso, B é constante no tempo, podemos calcular a f.e.m a partir da taxa de variação do fluxo pela área "varrida"pelo fio no interior do círculo ou diretamente pela expressão

$$\varepsilon = \oint_C (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_1^2 (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}, \qquad \text{pois, fora desse trecho, } \mathbf{B} = 0.$$

Mas $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ é paralelo a d**l** além de **V** ser perpendicular à **B**. Então

$$\varepsilon = \int_1^2 VBdl = VB \int_1^2 dl = VBl.$$

Porém,

$$(\frac{l}{2})^2 + r^2 = R^2 \;\therefore (\frac{l}{2})^2 = R^2 - r^2 \;\therefore l = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Sendo assim,

$$\varepsilon = 2VB\sqrt{R^2 - r^2}.$$

5.2 Indutância e Lei de Faraday

Vimos anteriormente que a indutância L de um circuito mede a variação do fluxo da indução magnética nesse circuito com relação a variação na corrente que o originou.

$$L = N \frac{d\phi_B}{di}$$

sendo ϕ_B o fluxo por espira do circuito e N o número de espiras.

Agora, a Lei de Faraday permitirá encontrar uma relação entre a $f.e.m$ nesse circuito e a taxa de variação da corrente no tempo. Da Lei de Faraday

$$\varepsilon = -\,N\,\frac{d\phi_B}{dt} = -\,N\,\frac{d\phi_B}{di}\,\frac{di}{dt}$$

ou

$$\varepsilon = -\,L\,\frac{di}{dt}. \tag{5.5}$$

Assim, uma variação da corrente no tempo induz uma $f.e.m.$ ou mesmo, uma $f.e.m.$ aplicada provoca uma variação na corrente.

Essa expressão sugere uma outra unidade para a indutância, volt s/ampére ou Henry.

Em circuitos onde existem indutores próximos e magneticamente acoplados dando origem à indutância mútua M, a $f.e.m.$ em um dos indutores dependerá das variações das correntes em ambos como veremos:

Considere dois indutores magneticamente acoplados (Fig. 5.3):

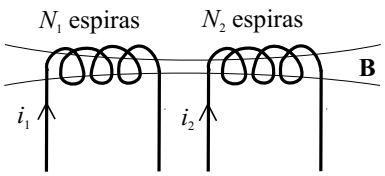


Figura 5.3: Indutores magneticamente acolplados.

O fluxo total por espira no indutor 1 terá duas contribuições, uma devida à corrente que passa por ele e outra devida à corrente que passa pelo outro indutor

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

ϕ_{11} fluxo em 1 devido à i_1
ϕ_{12} fluxo em 1 devido à i_2

$$\varepsilon_1 = -\,N_1\frac{d\phi_1}{dt} = -\,N_1\frac{d}{dt}\,(\phi_{11}+\phi_{12}) = -\,N_1\,\frac{d\phi_{11}}{dt} - \,N_1\frac{d\phi_{12}}{dt}$$

$$\therefore\ \varepsilon_1 = -\,N_1\frac{d\phi_{11}}{di_1}\,\frac{di_1}{dt}\,-N_1\frac{d\phi_{12}}{di_2}\,\frac{di_2}{dt}$$

$$\therefore\ \varepsilon_1 = -\,L_1\frac{di_1}{dt}\,-M\frac{di_2}{dt}\,, \qquad M = N_1\frac{d\phi_{12}}{di_2}. \tag{5.6}$$

Do mesmo modo

$$\varepsilon_2 = -\,L_2\,\frac{di_2}{dt}\,-M\frac{di_1}{dt}\,, \qquad M = N_2\frac{d\phi_{21}}{di_1}. \tag{5.7}$$

Veja que, em ambos os casos, a $f.e.m.$ em um indutor depende do que se passa nesse e no outro indutor.

5.3 O transformador

Tomemos dois circuitos magneticamente acoplados, ou seja, com indutância mútua M (Fig. 5.4). Das equações (5.6) e (5.7) temos

$$\varepsilon_1 = -\, L_1 \, \frac{di_1}{dt} \; - \; M \, \frac{di_2}{dt}$$

$$\varepsilon_2 = -\, L_2 \, \frac{di_2}{dt} \; - \; M \, \frac{di_1}{dt}.$$

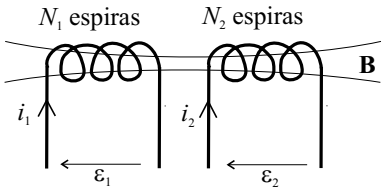


Figura 5.4: Tensões em indutores magneticamente acolplados.

Encontraremos após eliminarmos di_1/dt que

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{M^2 - L_1 L_2}{L_1} \right) \frac{di_2}{dt} \; + \; \frac{M}{L_1} \, \varepsilon_1$$

onde verificamos que a tensão induzida ε_2 depende da tensão ε_1 (considerada aqui como tensão primária) e da derivada da corrente i_2. Observemos que, se os circuitos forem perfeitamente acoplados, pela equação (4.26),

$$M = K\sqrt{L_1 L_2} \qquad \text{com } K = 1$$

portanto,

$$M^2 - L_1 L_2 = 0.$$

Sendo assim,

$$\varepsilon_2 = \frac{M}{L_1} \, \varepsilon_1 \quad \text{ou} \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \varepsilon_1 \tag{5.8}$$

ou seja, quando a acoplamento magnético é perfeito (não existe fluxo disperso), a relação entre as tensões nas duas bobinas ou enrolamentos depende apenas da relação entre as indutâncias. Como as indutâncias são proporcionais aos quadrados dos números de espiras dos seus respectivos enrolamentos, $L \, \alpha \, N^2$, teremos

$$\varepsilon_2 = \frac{N_2}{N_1} \, \varepsilon_1 \tag{5.9}$$

Um transformador ideal é um dispositivo que permite transformar tensões de acordo com essa equação. Transformadores reais podem ser construídos com características muito próximas do transformador ideal e essa equação é amplamente utilizada.

5.4 A energia associada à indução magnética

O estabalecimento da indução **B** em um circuito e a consequente formação de um fluxo magnético envolve uma variação no tempo acompanhada de uma f.e.m de acordo com a Lei de Faraday. Um dq de carga que atravesse o circuito armazenará no campo uma energia

$$dw = -\,\varepsilon dq = \frac{d\phi_B}{dt}\,dq$$

$$\therefore\; dw = i\,d\phi_B \tag{5.10}$$

Para circuitos rígidos em meios lineares, a variação do fluxo é devida à variação da indução **B** e esta indução é uma função linear da corrente de modo que o fluxo também será. Ou seja, supondo que não exista fluxo remanente,

$$\phi_B = L\,i \qquad \therefore\; d\phi_B = L\,di.$$

Então

$$dw = Lidi.$$

A energia do campo quando a corrente é levada de zero a um valor i será então

$$\int_0^W dw = L\int_0^i i'\,d\,i'$$

$$W = L\,\frac{i^2}{2} \;=\; \frac{\phi_B i}{2} \tag{5.11}$$

sendo ϕ_B o fluxo por espira.

Consideremos um toroide preenchido com material magnético linear. Da eq. (4.22)

$$L \approx \frac{\mu\,N^2}{2\pi R}\,A$$

A = área da seção, R = raio médio
e

$$B = \frac{\mu\,Ni}{2\pi R} \qquad \therefore\; i = \frac{2\pi R\,B}{\mu\,N}.$$

Da eq. (5.11) teremos então

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{\mu\,N^2 A}{2\pi R}\,\left(\frac{2\pi R\,B}{\mu\,N}\right)^2 \;=\; \frac{1}{2}\,A\,2\pi R\,\frac{B^2}{\mu} \;=\frac{1}{2}\,B\,H\,V$$

onde V é o volume do toróide.

Assim, a energia por unidade de volume w_B, ou densidade de energia, será dada por

$$\omega_B = \frac{1}{2}\,B\,H. \tag{5.12}$$

Pode-se mostrar que, no caso geral, teremos

$$\omega_B = \frac{1}{2}\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}. \tag{5.13}$$

5.5 Os efeitos da tensão alternada nos materiais ferromagnéticos

Suponhamos que uma bobina toroidal com núcleo ferromagnético seja conectada a uma fonte de tensão alternada senoidal $\varepsilon = \varepsilon_0 \operatorname{sen} \omega t$ (Fig. 5.5).

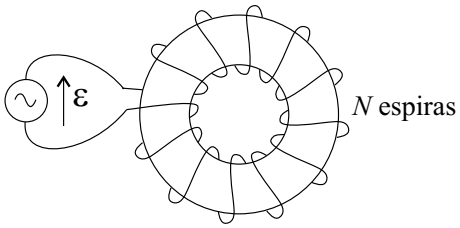


Figura 5.5: Tensão alternada aplicada a um indutor toriodal.

Pela Lei de Faraday

$$\varepsilon = -\, N\, \frac{d\phi_B}{dt}$$

segue que

$$\phi_B = \phi_0 \cos(\omega t + \phi'), \qquad \phi_0 = \frac{\varepsilon_0}{\omega N}, \qquad \phi' = \text{cte.}$$

Logo, o fluxo também é alternado. O valor constante ϕ' pode ser devido a uma magnetização permanente do núcleo ou mesmo um fluxo constante produzido por uma corrente contínua em um outro enrolamento. Consideremos, inicialmente, que o fluxo constante seja nulo.

$$\phi_0 = B_0\, A = \frac{\varepsilon_0}{\omega N} \qquad \therefore\ B_0 = \frac{\varepsilon_0}{A\, \omega N}. \tag{5.14}$$

Vemos, portanto, que o fluxo máximo e a indução magnética máxima ficam determinados pela tensão máxima. A intensidade magnética H e a corrente i serão determinados a partir da curva de magnetização. ε e B são causas, i e H são consequências.

Como o material ferromagnético é fortemente não linear e possui histerese, a variação de H e a variação da corrente i não serão senoidais, serão muito distorcidas.

A indutância

$$L = N\, \frac{d\phi}{di}$$

não será constante (Fig. 5.6), pois,

$$d\phi = A\, dB \ \text{ e } di = \frac{l}{N}\, dH, \text{ já que } H = \frac{Ni}{l}$$

$$\therefore\ L = N\, \frac{A\, dB}{l/N\, dH} \ \therefore\ L = N^2\, \frac{A}{l}\, \frac{dB}{dH}, \tag{5.15}$$

observe que dB/dH varia ao longo da curva.

Pode-se definir uma indutância média a partir de

$$L_{\text{med}} = N^2\, \frac{A}{l}\, \left(\frac{dB}{dH}\right)_{\text{med}}, \qquad \left(\frac{dB}{dH}\right)_{\text{med}} = \frac{B_{\max}}{H_{\max}} = \mu_{B\,\max}$$

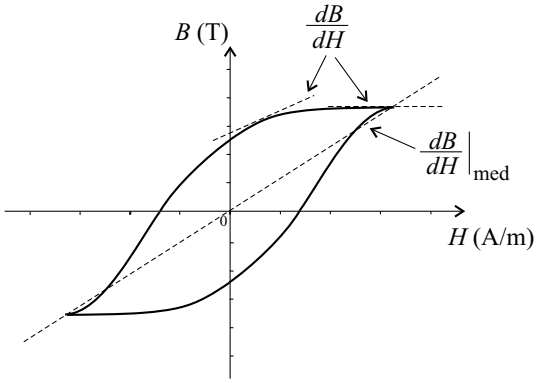


Figura 5.6: Indutância variável ao longo da curva de histerese.

$$L_{\text{med}} = N^2 \, \frac{A}{l} \, \mu_{B\,\max}. \tag{5.16}$$

Considere agora a existência de um fluxo constante superposto a um fluxo variável de pequena amplitude.

O valor constante estabelecerá um ponto de trabalho na curva $B - H$ enquanto que a parte variável produzirá um pequeno ciclo de histerese (Fig.5.7).

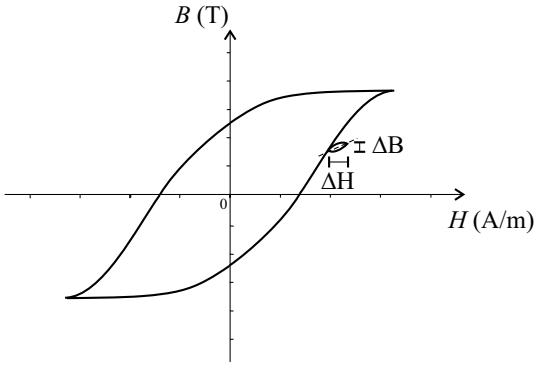


Figura 5.7: Indutância média para pequenas variações sobre a curva de histerese.

Uma permeabilidade incremental pode ser definida

$$\mu_{\text{inc}} = \frac{\Delta B}{\Delta H}, \qquad \text{permeabilidade incremental.}$$

$$L_{\text{med}} = N^2 \, \frac{A}{l} \, \mu_{\text{inc}}. \tag{5.17}$$

Modificando o valor do fluxo constante podemos modificar o ponto de operação e consequentemente o valor da indutância.

5.6 A lei de Ampère generalizada

Vimos no item 4.3 que a expressão do potencial vetorial para **B** juntamente com a condição de regime estacionário $div\mathbf{J} = 0$ resultava na lei de ampère, equação (4.11), $\mathbf{rotB} = \mu_0\mathbf{J}$. Nos meios magnéticos lineares essa equação toma a forma

$$\mathbf{rot}\,\frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{J}, \qquad \therefore\ \mathbf{rotH} = \mathbf{J}. \tag{5.18}$$

Desejamos agora estender essa equação para o caso não estácionário onde

$$div\mathbf{J} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0.$$

Se aplicarmos o divergente em (5.18) obteremos

$$div\ \mathbf{rotH} = div\mathbf{J}$$

ou

$$0 = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

que contradiz nosso pressuposto.

Para corrigir esse fato, adicionamos um vetor $\mathbf{J}_D$ ao vetor **J** de forma tornar consistente com o pressuposto inicial.

$$\mathbf{rotH} = \mathbf{J}_D + \mathbf{J}$$

$$\therefore\ 0 = div\mathbf{J} + div\mathbf{J}_D$$

como

$$div\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

teremos

$$div\mathbf{J}_D = \frac{\partial\rho}{\partial t}.$$

Mas $\rho = div\mathbf{D}$

$$\therefore div\mathbf{J}_D = \frac{\partial\,(\,div\mathbf{D})}{\partial t}$$

$$\therefore div\mathbf{J}_D = div\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

Uma solução possível é

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \tag{5.19}$$

e assim

$$\mathbf{rot\ H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \tag{5.20}$$

conhecida como lei de Ampère generalizada na forma diferencial.

O termo

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

é chamado de densidade de "corrente de deslocamento".

Integrando (5.20) em uma superfície S e usando o Teorema de Stokes teremos

$$\int_S \mathbf{rot}\mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

$$\therefore \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds, \tag{5.21}$$

conhecida como a forma integral da lei de Ampère generalizada.

5.7 Dielétricos na presença de campos variáveis no tempo

Os dielétricos, por definição, são meios que não permitem a existência de correntes (movimentação de cargas livres). Contudo, quando sujeito a campos alternados, as variações do vetor $\mathbf{D}$ no tempo ($\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$) dão origem à correntes de deslocamento que contribuem para as eq. (5.20) ou (5.21).

Podemos evidenciar esse efeito supondo que as variações nos campos sejam harmônicas no tempo. As equações para os campos são lineares, de forma que podemos considerá-las como equações em variáveis complexas para facilitar a álgebra, sabendo que os vetores que tem realidade física são as partes reais e imaginárias do vetor complexo.

Assim, a equação (5.20) será escrita como:

$$\mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{H}} = \widetilde{\mathbf{J}} + \frac{\partial \widetilde{\mathbf{D}}}{\partial t} \tag{5.22}$$

onde

$$\mathbf{H} = Re\{\widetilde{\mathbf{H}}\}, \qquad \mathbf{J} = Re\{\widetilde{\mathbf{J}}\} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = Re\{\widetilde{\mathbf{D}}\},$$

ou então

$$\mathbf{H} = Img\{\widetilde{\mathbf{H}}\}, \qquad \mathbf{J} = Img\{\widetilde{\mathbf{J}}\} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = Img\{\widetilde{\mathbf{D}}\}.$$

Quando um dielétrico está na presença de um campo oscilante, verifica-se experimentalmente que a polarização $\mathbf{P}$ oscila, em geral, defasada do campo oscilante $\mathbf{E}$. Isso faz com que o vetor $\mathbf{D}$ seja defasado do vetor $\mathbf{E}$ de modo que a permissividade elétrica ε torna-se um número complexo

$$\widetilde{\mathbf{D}} = \widetilde{\varepsilon}\, \widetilde{\mathbf{E}} \qquad \widetilde{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon''. \tag{5.23}$$

O sinal negativo é apenas uma questão de coveniência como veremos a seguir. Em geral, $\widetilde{\varepsilon}$ é uma função da frequência, $\varepsilon' = \varepsilon'(\omega)$ e $\varepsilon'' = \varepsilon''(\omega)$.

Suponhamos que o meio material seja caracterizado pela condutividade g e pela permissividade complexa $\widetilde{\varepsilon}$.

O campo elétrico oscilante será escrito como

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{j\omega t}.$$

Como

$$\widetilde{\mathbf{J}} = g\widetilde{\mathbf{E}} \quad \text{e} \quad \widetilde{\mathbf{D}} = \widetilde{\varepsilon}\, \widetilde{\mathbf{E}},$$

a eq. (5.22) torna-se

$$\mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{H}} = g\widetilde{\mathbf{E}} + \frac{\partial\left(\widetilde{\varepsilon}\,\widetilde{\mathbf{E}}\right)}{\partial t} = g\widetilde{\mathbf{E}} + j\omega\widetilde{\varepsilon}\,\widetilde{\mathbf{E}}$$

$$\therefore \mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{H}} = g\widetilde{\mathbf{E}} + j\omega\left(\varepsilon' - j\varepsilon''\right)\widetilde{\mathbf{E}}$$

$$\therefore \mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{H}} = \left(g + \omega\varepsilon''\right)\,\widetilde{\mathbf{E}} + j\omega\varepsilon'\,\widetilde{\mathbf{E}}. \tag{5.24}$$

Definimos então uma condutividade equivalente g' como

$$g' \equiv g + \omega\varepsilon''. \tag{5.25}$$

Definimos também uma densidade de corrente complexa total $\widetilde{\mathbf{J}}_{\text{total}}$ e uma condutividade complexa $\widetilde{g}$ como

$$\widetilde{\mathbf{J}}_{\text{total}} = \left(g' + j\omega\varepsilon'\right)\widetilde{\mathbf{E}} \tag{5.26}$$

e

$$\widetilde{g} = \left(g' + j\omega\varepsilon'\right), \tag{5.27}$$

de modo que

$$\mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{H}} = \widetilde{\mathbf{J}}_{\text{total}}. \tag{5.28}$$

A representação da amplitude complexa de $\widetilde{\mathbf{J}}_{\text{total}}$ no plano complexo (Fig. 5.8) é

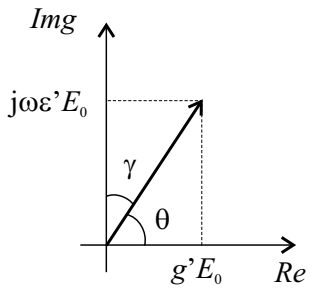


Figura 5.8: Representação da densidade de corrente total complexa.

Podemos escrever

$$\widetilde{\mathbf{J}}_{\text{total}} = \left(g' + j\omega\varepsilon'\right)\widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{j\omega t} = \widetilde{\mathbf{J}}_{\text{t0}} e^{j\omega t}.$$

Define-se o fator de potência do dielétrico como

$$FP = \cos\theta = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + \omega^2\varepsilon'^2}}. \tag{5.29}$$

Se $g' << \omega\varepsilon'$ teremos

$$\cos\theta \approx \frac{g'}{\omega\varepsilon'} = \tan\gamma \tag{5.30}$$

conhecida como "tangente de perda".

A potência por unidade de volume dissipada pelo meio pode ser determinada a partir da potência dissipada em uma impedância representativa do meio submetida à uma fonte

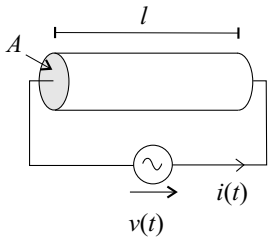


Figura 5.9: Impedância de forma cilíndrica representativa do meio dielétrico.

de tensão senoidal. No regime permanente, a corrente que atravessa a impedância (Fig. 5.9) está defasada com relação à tensão

$$P = v\,(t)\;\; i(t) = v_0\; sen\;(\omega t)\; i_0\; sen\;(\omega t + \phi).$$

A potência média em um período é dada por

$$< P >= \frac{v_0\; i_0}{2} \cos\phi = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \frac{i_0}{\sqrt{2}} \cos\phi = v_{\rm ef} i_{\rm ef} \cos\phi$$

onde o índice *ef* signinifica valor eficaz.

Se considerarmos que o meio é isotrópico e homogêneo, o campo elétrico e a densidade de corrente são facilmente associados com as variáveis macroscópicas tensão e corrente

$$v = El \text{ e } i = JA$$

ou

$$v_0 = E_0 l \text{ e } i_0 = J_{t0} A$$

e a diferença de fase entre a corrente e a tensão corresponde à diferença de fase entre a densidade de corrente e o campo, $\cos\phi = \cos\theta$.

A potencia média será então

$$< P >= \frac{E_0\; J_0}{2}\; A\; l\;\; \cos\theta.$$

Substituindo os valores de E_0 e $\cos\theta$ teremos

$$\therefore\;\; \frac{< P >}{Al} \;=\; \frac{E_0\; J_0}{2}\;\cos\theta \;=\; \frac{E_0 \left(g'^2 + \omega^{2'} \varepsilon'^2\right)^{1/2} E_0}{2}\; \frac{g'}{\left(g'^2 + \omega^{2'} \varepsilon'^2\right)^{1/2}}$$

$$\frac{< P >}{Al} \;=\; g'\; \frac{E_0^2}{2} \;=\; g'\; \frac{E_0}{\sqrt{2}}\; \frac{E_0}{\sqrt{2}} \;=\; g'\; E_{\rm ef}^2.$$

A potencia média por unidade de volume vale então

$$\frac{< P >}{V} = g'\; E_{\rm ef}^2. \tag{5.31}$$

Observe que, mesmo que o meio seja totalmente dielétrico ($g = 0$), pela eq. (5.27), $g' = g + \omega\ \varepsilon''$ teremos $g' = \omega\ \varepsilon''$ e haverá potência dissipada pelo dielétrico na forma de calor devido à movimentação das cargas de polarização. Esse fenômeno é utilizado nas máquinas de soldagem de plásticos por radiofreqüência onde o calor produzido é suficiente para fundir o plástico. É também o fenômeno responsável pela perda de energia na forma de calor nos isolantes que separam os condutores nos cabos coaxiais operando em radiofreqüências.

5.8 As equações de Maxwell e as condições de contorno

Podemos agora sintetizar as equações que relacionam os vetores E, B, D e H para os campos variáveis no tempo, as chamadas equações de Maxwell, e as equações que relacionam os vetores e as propriedades do meio, as chamadas equações constitutivas.

$$div\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \tag{5.32}$$

$$div\mathbf{H} = 0, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{5.33}$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.34}$$

$$\mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \mathbf{J} = g\mathbf{E}. \tag{5.35}$$

A expressão do **rotE** permite ainda escrevermos uma relação importante:

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

mas

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} \text{ é potencial vetorial}$$

$$\therefore\ \mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{rot}\mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{rot}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\therefore\ \mathbf{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Logo

$$\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{grad}\phi.$$

No caso estático, sabemos que

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$$

e

$$\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = 0.$$

Portanto, podemos escrever

$$\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\mathbf{grad}V$$

$$\therefore\ \mathbf{E} = -\mathbf{grad}V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \tag{5.36}$$

ou seja, o campo elétrico tem uma componente estática e uma componente proveniente de uma variação no tempo.

5.8.1 A teoria dos campos e teoria dos circuitos

Consideremos um circuito que possua fontes, capacitores, resistores e indutores, todos em série. O campo elétrico $\mathbf{E}_{total}$ em um ponto do circuito terá uma contribuição devido às fontes de f.e.m. (geradores, baterias, etc.) e uma contribuição devido às cargas e às correntes variáveis no tempo.

$$\mathbf{E}_{\text{total}} = \mathbf{E}^* + \mathbf{E}, \qquad \therefore\ \mathbf{E}^* = \mathbf{E}_{\text{total}} - \mathbf{E}.$$

Notando que

$$\mathbf{E}_{total} = \frac{\mathbf{J}}{g} \ \text{ e } \ \mathbf{E} = -\mathbf{grad}\ V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

e integrando ao longo do circuito teremos

$$\oint_C \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} = \oint_C \frac{\mathbf{J}}{g} \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \mathbf{grad}\ V \cdot d\mathbf{l} + \oint_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l}.$$

Contudo,

1. $$\oint_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{rot}\ \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds$$

2. $$\therefore \oint_C \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} = L\frac{di}{dt}, \qquad L = \text{indutância do circuito.}$$

3. $$\oint_C \mathbf{grad} V \cdot d\mathbf{l} = \oint_C -\mathbf{E}_{\text{est.}} \cdot d\mathbf{l}.$$

   Se o campo estático estiver confinado apenas em uma região do espaço (num capacitor de placas paralelas) teremos

   $$\oint_C -\mathbf{E}_{\text{est.}} \cdot d\mathbf{l} = E_{\text{est.}} d = \frac{D_{\text{est.}}}{\varepsilon} d = \frac{Qd}{A\varepsilon} = \frac{Q}{C}$$

   onde $C =$ é a capacitância do circuito e $Q = \int i dt$.

4. $$\oint_C \frac{\mathbf{J}}{g} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Jl}{g} = JA\frac{l}{gA} = R\,i$$

   $R =$ resistência do circuito.

5. $$\oint_C \mathbf{E}^* \cdot d\mathbf{l} = \varepsilon$$

   é a f.e.m do gerador.

Então

$$\varepsilon = Ri + \frac{1}{C}\int i dt + L\frac{di}{dt},$$

que é a equação de uma malha RLC em série.

5.9 As condições de contorno

As equações de Maxwell na forma diferencial expressam as relações existentes entre os vetores **E**, **D**, **H** e **B** nos pontos interiores a um meio cujas propriedades variem continuamente. Na interface entre dois meios as propriedades dos mesmos podem variar abruptamente causando descontinuidade nos campos nessa transição. A forma diferencial das equações de Maxwell é, portanto, inadequada nessas situações uma vez que as mesmas envolvem derivadas espaciais.

A utilização da foram integral nas interface entre esses dois meios permite-nos determinar como os campos variam ao passarem de um meio para o outro.

Consideremos dois meios caracterizados por ε_1, μ_1, g_1, ε_2, μ_2 e g_2 respectivamente. Uma pequena região na interface entre esses dois meios pode ser tomada como plana. Tomemos um caminho retangular infinitensinal com lados paralelos e perpendiculares ao plano conforme a figura (Fig. 5.10).

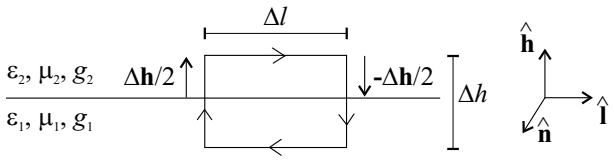


Figura 5.10: Caminho de integração na interface entre dois meios dielétricos.

Da equação de Maxwell correspondente à lei de Faraday (5.1)

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds$$

aplicada a esse caminho, no limite em que Δl e $\Delta h \to 0$ mantendo a superfície de descontinuidade entre os lados paralelos à mesma e supondo que **B** sejam sempre finito teremos:

$$\mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\Delta\mathbf{h}}{2} + \mathbf{E}_2 \cdot \frac{\Delta\mathbf{h}}{2} + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{l}_2 - \mathbf{E}_2 \cdot \frac{\Delta\mathbf{h}}{2} - \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\Delta\mathbf{h}}{2} = 0.$$

Ou seja,

$$\mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{l}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{l}_2 = 0.$$

Contudo,

$$\Delta\mathbf{l}_1 = -\Delta\mathbf{l}_2 = \Delta\mathbf{l}$$

$$\therefore\ \mathbf{E}_1 \cdot \Delta\mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \Delta\mathbf{l} = 0$$

ou

$$E_1|| = E_2||, \tag{5.37}$$

as componentes tangenciais de **E** são contínuas na interface.

De modo semelhante, utilizemos o mesmo caminho de integração para avaliar a equação de Maxwell correspondente à lei de Ampère generalizada equação (5.18).

$$\oint_C \mathbf{H}.d\mathbf{l} \;=\; \int_S (\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \,.\, \hat{\mathbf{n}} ds$$

Teremos então

$$\mathbf{H}_1 \cdot \Delta \mathbf{l_1} + \mathbf{H}_1 \cdot \Delta \frac{\mathbf{h}}{2} + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta \frac{\mathbf{h}}{2} + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta \mathbf{l_2} \;-\; \mathbf{H}_2 \cdot \Delta \frac{\mathbf{h}}{2} - \mathbf{H}_1 \cdot \Delta \frac{\mathbf{h}}{2} =$$

$$(\mathbf{J}_1 + \frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial t}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta l \frac{\Delta h}{2} + (\mathbf{J}_2 + \frac{\partial \mathbf{D}_2}{\partial t}) \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta l \frac{\Delta h}{2} \tag{5.38}$$

Supondo que a densidade de corrente $\mathbf{J}$ e a variação temporal de $\mathbf{D}$ sejam finitas teremos na situação limite $\Delta l \to 0$ e $\Delta h \to 0$ que

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{\Delta l_1} + \mathbf{H}_2 \cdot \Delta \mathbf{l_2} = 0, \qquad \mathbf{\Delta l}_1 = -\Delta \mathbf{l_2} = \Delta \mathbf{l}$$

$$\therefore \mathbf{H}_1 \cdot \Delta \mathbf{l} = \mathbf{H}_2 \cdot \Delta \mathbf{l} \qquad \text{ou} \qquad H_1|| = H_2||. \tag{5.39}$$

Em situações envolvendo bons condutores e campos alternados pode ocorrer a existência de uma corrente em uma camada bastante fina na interface, sendo coveniente definir uma densidade de corrente superficial $\mathbf{j}_s$ tal que

$$\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_C \mathbf{j_s} \cdot d\mathbf{l}.$$

Sendo assim, o termo

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta l \Delta h$$

torna-se

$$\mathbf{j_s} \cdot \hat{n} \Delta l, \qquad \mathbf{J} = \frac{\mathbf{j_s}}{\Delta h}.$$

Observe que para $\mathbf{j_s}$ ser finito deveremos ter $\mathbf{J}$ infinito (podemos imaginar uma situação limite).

Nesse caso, a equação (5.38) toma a forma

$$\mathbf{H}_1 \Delta \mathbf{l} - \mathbf{H_2} \cdot \Delta \mathbf{l} = \mathbf{j_s} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta l$$

$$\therefore (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \Delta \mathbf{l} = \mathbf{j_s} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta l$$

ou

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \Delta l \hat{l} = \mathbf{j_s} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta l$$

Observando as direções de $\hat{\mathbf{l}}$, $\hat{\mathbf{h}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$ temos que $\hat{\mathbf{l}} = \hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{n}}$.

Então

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \left(\hat{\mathbf{h}} \times \hat{\mathbf{n}} \right) = \mathbf{j_s} \cdot \hat{\mathbf{n}} \qquad \therefore \left((\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \hat{\mathbf{h}} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{j_s} \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Como $\hat{\mathbf{n}}$ é arbitrário, desde que seja paralelo à superfície, deveremos ter

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{j_s} \tag{5.40}$$

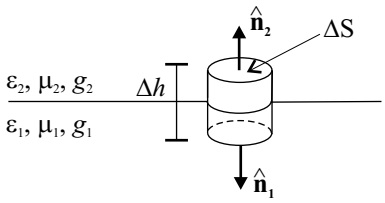


Figura 5.11: Volume infinitesimal na interface entre dois meios dielétricos.

ou seja, a descontinuidade na componente tangencial de $\mathbf{H}$ vale $\mathbf{j_s}$.

Tomemos agora uma superfície cilíndrica infinitensinal na interface entre os dois meios conforme a figura (Fig. 5.11).

A aplicação da eq. de maxwell correspondente à lei de Gauss para a indução magnética $\mathbf{B}$ equação (4.14)

$$\oint_S \mathbf{B}.\hat{\mathbf{n}}.\, ds \;\equiv\; 0$$

nos leva a

$$\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \Delta s + \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \Delta s + \text{fluxo pela superfície lateral do cilindro } = 0.$$

Para um cilindro de altura infinitesimal, $\Delta h \to 0$ e para valores finitos de $\mathbf{B}$, teremos que o fluxo lateral tende a zero e as duas normais podem ser escritas como $\hat{\mathbf{n}}_1 = -\hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{n}}$.

Então

$$\mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{B}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \qquad \therefore B_{1n} = B_{2n}. \tag{5.41}$$

Ou seja, as componentes normais da indução $\mathbf{B}$ serão contínuas na passagem de um meio para o outro.

Aplicando agora a equação de Maxwell correspondente à lei de Gauss para $\mathbf{D}$, equação (2.60),

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_V \rho dv$$

teremos, de modo semelhante,

$$\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}}_1 \Delta s + \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}}_2 \Delta s + \text{fluxo lateral} = \rho \Delta s \Delta h.$$

Para valores finitos de $\mathbf{D}$ e ρ (ou seja, a densidade volumétrica de carga não degenera em densidade superficial) teremos que, no limite $\Delta h \to 0$,

$$\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \qquad \therefore D_{1n} = D_{2n}. \tag{5.42}$$

Ou seja, a componente normal de $\mathbf{D}$ é contínua na passagem de um meio para o outro.

No caso de um dos meios ser um metal, a carga elétrica deverá estar na superfície formando uma densidade superficial de cargas σ tal que

$$\rho = \frac{\sigma}{\Delta h}$$

e, na situação limite em que $\Delta h \to 0$ e $\rho \to \infty$, teremos

$$lim_{\Delta h \to 0} \rho \Delta h = \sigma.$$

Supondo que a carga superficial se mantenha entre as duas "tampas" do cilindro enquanto a altura tende a zero teremos que

$$\mathbf{D}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta s - \mathbf{D}_2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta s = \sigma \Delta s$$

$$\therefore D_{1n} - D_{2n} = \sigma. \tag{5.43}$$

Em outras palavras, a descontinuidade na componente normal de $\mathbf{D}$ na passagem de um meio para o outro é a densidade superficial de cargas.

Para condutores metálicos, o campo elétrico no interior é muito pequeno tornando-se zero para condutores perfeitos, de modo que $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ é praticamente zero no interior desse condutor (digamos, o meio 2). Portanto, se $D_{2n} = 0$ teremos $D_{1n} = \sigma$.

Resumo

1. A componente tangencial de $\mathbf{E}$ é contínua na transição.

2. A componente tangencial de $\mathbf{H}$ é contínua na transição excetuando o caso de condutor perfeito onde pode haver uma densidade de corrente superficial que será igual à descontinuidade da componente tangencial de $\mathbf{H}$.

3. A componente normal de $\mathbf{B}$ é contínua na transição.

4. A descontinuidade na componente normal de $\mathbf{D}$ é a densidade superficial de cargas, se esta existir.

Capítulo 6

A onda eletromagnética

As equações de Maxwell sintetizam as propriedades dos vetores dos campos relacionando-os entre si e com suas respectivas fontes. Uma constatação importante é que a variação temporal de um dos vetores do campo está relacionada com a variação espacial de outro vetor do campo e vice-versa. Esse fato sugere a possibilidade da existência simultânea e auto-sustentada dos vetores do campo, a chamada onda eletromagnética, como demonstraremos a seguir. Observe que não estamos falando da geração inicial dos vetores dos campos, o problema da radiação, mas assim da manutenção destes vetores após terem sido gerados. Estudaremos o problema da radiação em um capítulo posterior.

6.1 A equação diferencial da onda eletromagnética

Temos as equações de Maxwell e as equações materias para os meios lineares, isotrópicos e homogêneos (equações constitutivas) dadas pelas equações (5.27),

$$div\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \tag{6.1}$$

$$div\mathbf{B} = 0, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{6.2}$$

$$\mathbf{rotE} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{6.3}$$

$$\mathbf{rotH} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \mathbf{J} = g\mathbf{E} \tag{6.4}$$

com ε, μ e g constantes.

Consideremos, inicialmente, a situação simples e importante do espaço livre de cargas e correntes de condução. As equações (6.1) a (6.4) tomarão a forma:

$$div\mathbf{D} = 0, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \tag{6.5}$$

$$div\mathbf{B} = 0, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{6.6}$$

$$\mathbf{rotE} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{6.7}$$

$$\mathbf{rotH} = \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \mathbf{J} = 0 \text{ pois } g = 0. \tag{6.8}$$

O vácuo é um caso particular em que $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $\mu = \mu_0$.

Tomando o rotacional do rotacional de $\mathbf{E}$ teremos

$$\mathbf{rot\ rot E} = \mathbf{rot}\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$$

mas

$$\mathbf{rot\ rot E} = \mathbf{grad}\ div\mathbf{E} - \nabla^2\mathbf{E}$$

então

$$\mathbf{grad}\ div\mathbf{E} - \nabla^2\mathbf{E} = \mathbf{rot}\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right).$$

Por outro lado,

$$div\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} div\mathbf{D} = 0$$

e o rotacional, que é composto por derivadas espaciais, pode permutar a ordem com a derivada temporal ficando, então,

$$-\nabla^2\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{rotB})$$

mas

$$\mathbf{rotB} = \mu\mathbf{rotH} = \mu\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mu\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Então

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore \nabla^2\mathbf{E} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{6.9}$$

De modo semelhante, tomando o rotacional do rotacional de $\mathbf{H}$ chegaremos a

$$\nabla^2\mathbf{H} = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \tag{6.10}$$

Ou seja, tanto $\mathbf{E}$ quanto $\mathbf{H}$ deverão satisfazer essas equações diferenciais vetoriais, significando que, as funções que descrevem o comportamento espaço-temporal destes dois vetores, quando substituidos nessas duas equações diferenciais, devem reduzi-la a uma identidade.

Essas duas equações são conhecidas como equações diferenciais vetoriais de onda. Cada equação é desmembrada em três equações diferenciais escalares para cada componente do campo. Assim,

$$\nabla^2 E_x = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{6.11}$$

$$\nabla^2 E_y = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 E_z = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

e

$$\nabla^2 H_x = \mu\varepsilon\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \tag{6.12}$$

$$\nabla^2 H_y = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 H_z = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}.$$

Essas equações possuem a mesma forma das equações para as ondas mecânicas ordinarias (onda na corda, onda sonora, etc), daí vem a certeza que os vetores do campo eletromagnético possam propagar suas perturbações na forma de uma onda, a onda eletromagnética.

6.1.1 Soluções da equação de onda

Cada componente dos vetores do campo obedece a uma equação diferencial escalar genérica do tipo

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{6.13}$$

onde $\mu\varepsilon$ foi convenientemente substituído por $1/v^2$.

Dentre as muitas soluções possíveis para essa equação destaca-se a solução onda plana. Tal solução é da forma

$$\phi = \phi(\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}, t) \tag{6.14}$$

sendo $\mathbf{r}$ o vetor posição e $\hat{\mathbf{K}}$ a normal unitária a um plano, cuja equação é dada por $\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} = cte$. Para um determinado instante de tempo, t, os pontos deste plano são tais que a função ϕ é uma constante, $\phi = \phi\ (cte,\ cte)$.

Em outras palavras, a função ϕ é constante em todos os pontos do plano perpendicular ao vetor $\hat{\mathbf{K}}$ para cada instante de tempo, t.

A equação (6.13) nas variáveis espaciais $x,\ y$ e z pode ser reescrita em função de uma única variável espacial por uma mudança conveniente do sistema de referência. Como $\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}$ é a projeção de $\mathbf{r}$ na direção de $\hat{\mathbf{K}}$, introduziremos a nova variável p tal que $p = \hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}$. Sendo assim, $\phi = \phi(p, t)$ será a equação da onda plana.

Com

$$p = \hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} = \frac{K_x}{K} x + \frac{K_y}{K} y + \frac{K_z}{K} z$$

sendo $K_x/K, K_y/K$ e K_z/K os cossenos diretores do vetor $\mathbf{K} = K\hat{\mathbf{K}}$.

As derivadas com relação às variáveis x, y e z serão dadas por:

$$\frac{\partial\,()}{\partial x} = \frac{\partial\,()}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial\,()}{\partial p}\frac{K_x}{K}, \quad \therefore \frac{\partial^2\,()}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\,()}{\partial p^2}\frac{K_x^2}{K^2}$$

$$\frac{\partial\,()}{\partial y} = \frac{\partial\,()}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial\,()}{\partial p}\frac{K_y}{K}, \quad \therefore \frac{\partial^2\,()}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\,()}{\partial p^2}\frac{K_y^2}{K^2}$$

$$\frac{\partial\,()}{\partial z} = \frac{\partial\,()}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial_z} = \frac{\partial\,()}{\partial p}\frac{K_z}{K} \quad \therefore \frac{\partial^2\,()}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\,()}{\partial p^2}\frac{K_z^2}{K^2}$$

Portanto, o laplaceano será dado por

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial p^2}\left(\frac{K_x^2}{K^2} + \frac{K_y^2}{K^2} + \frac{K_z^2}{K^2}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial p^2}.$$

Logo, a equação de onda toma a forma unidimensional

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial p^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \tag{6.15}$$

cujas soluções são quaisquer funções de $p \pm vt$ que sejam deriváveis, pelo menos, até 2ª ordem com relação a p e t.

A solução geral será, portanto, a superposição dessas funções

$$\phi = \phi_1\left(p - vt\right) + \phi_2\left(p + vt\right), \qquad \phi_1 \text{ e } \phi_2 \text{ quaisquer,}$$

ou mesmo,

$$\phi = \phi_1(\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} - vt) + \phi_2(\hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} + vt). \tag{6.16}$$

Raciocinemos apenas com a função ϕ_1. Como o argumento de ϕ_1, é $p - vt$, para que a função ϕ_1 matenha o seu valor fixo, deveremos ter $p - vt = cte$, $\therefore p = vt + cte$ ou seja, a variável espacial p deve crescer linearmente no tempo, à medida que este cresce, com uma velocidade v. Podemos dizer, portanto, que a função ϕ_1 propaga com uma velocidade v na direção do crecimento de p.

De modo semelhante, a função ϕ_2 propaga com uma velocidade v na direção do decrescimento de p.

Nota: Estamos considerando que o tempo t seja sempre crescente!

Como

$$\frac{1}{v^2} = \mu\varepsilon$$

teremos

$$v = \pm\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \tag{6.17}$$

mostrando que a velocidade de propagação da onda plana depende das propriedades do meio caracterizado por μ e ε. A velocidade v é conhecida como velocidade de fase da onda.

Outra solução importante da equação de onda equação (6.13) é a solução na forma de onda esférica dada por

$$\phi = \phi\left(r, t\right), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Escrevendo o laplaceano em coordenadas esféricas, apenas na variável r, teremos

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial\phi\left(r,t\right)}{\partial r}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[r\phi(r,t)\right]. \quad \text{Verifique!}$$

A equação de onda fica

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2},$$

ou

$$\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial t^2}.$$

Fazendo

$$\psi = r\phi$$

terermos

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

que é da mesma forma da equação (6.15). Portanto a solução será

$$\psi = \psi_1(r - vt) + \psi_2(r + vt)$$

e como

$$\phi = \frac{\psi}{r}$$

teremos

$$\phi = \frac{\phi_1(r - vt)}{r} + \frac{\phi_2(r + vt)}{r}. \tag{6.18}$$

A função $\phi_1(r-vt)/r$ é uma onda esférica que se afasta da origem enquanto $\phi_2(r+vt)/r$ é uma onda esférica que se aproxima da origem, ambas com a mesma velocidade v, sendo ϕ_1 e ϕ_2 funções arbitrárias.

Entre as diversas soluções da equação de onda, nos restringiremos à solução onda plana e, em particular, às funções de variação harmônica devido à sua simplicidade e importância.

Podemos construir funções mais complexas a partir das funções harmônicas através da série de Fourier, ou mesmo da transformada de Fourier, de modo que, formas de ondas diversas podem ser construídas por superposição de ondas planas harmônicas uma vez que a equação diferencial de onda é uma equação linear.

Tomemos para a onda plana harmônica uma função do tipo:

$$\phi = \phi_{10}\cos\left[K\left(\widehat{\mathbf{K}}.\mathbf{r} - vt\right) + \delta\right] + \phi_{20}\cos\left[K(\widehat{\mathbf{K}}.\mathbf{r} + vt) + \delta)\right] \tag{6.19}$$

Sem perda de generalidade, desenvolveremos os cálculos apenas para a onda que se afasta da origem sabendo que a solução geral envolve a onda que se afasta e a onda que se aproxima. Tomemos, portanto,

$$\phi = \phi_0\cos\left[K\left(\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r} - vt\right) + \delta\right] \tag{6.20}$$

ϕ_0 é definido como a amplitude da onda, K é uma constante com dimensão L^{-1} de modo a tornar adimensional a parte $K\left(\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r} - vt\right)$ do argumento da função cossenoidal e δ é um ângulo qualquer, constante. Em breve determinaremos uma expressão para K.

Pelo fato de ser uma função periódica do espaço e do tempo é coveniente introduzirmos os conceitos de período espacial, λ, e período temporal, T.

Para um tempo fixo a função varia apenas com a variável espacial $\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r}$ (projeção de $\mathbf{r}$ sobre $\widehat{\mathbf{K}}$)

$$\phi = \phi_0\cos\left(K\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r} - cte\right).$$

O período espacial λ é definido como a distância (intervalo espacial) que devemos percorrer ao longo da direção $\widehat{\mathbf{K}}$ para que a variação de $\widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}$ seja tal que a função repita seu valor (Fig. 6.1), ou seja,

$$\phi\left(\widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} + \lambda\right) = \phi\left(\widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}\right).$$

Isso ocorre quando o argumento da função cosseno tem uma variação de 2π rad.

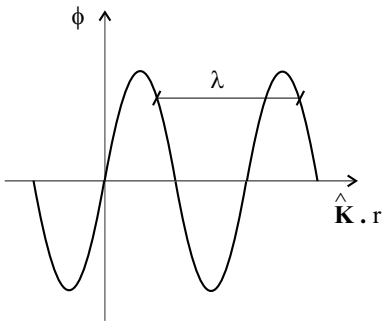


Figura 6.1: Definição do comprimento de onda.

$$\cos\left[K\left(\widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} + \lambda\right) - cte\right] = \cos\left[K\left(\widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}\right) - cte\right] \Longrightarrow$$

$$K\left(\widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r} + \lambda\right) - cte = K\left(\widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}\right) - cte + 2\pi$$

$$\Longrightarrow K\lambda = 2\pi \qquad \therefore K = \frac{2\pi}{\lambda} \ \ (\text{rad/m}) \tag{6.21}$$

$\mathbf{K}$ é chamado de vetor de onda e seu módulo, K, de número de onda. Pelo fato de $\mathbf{K}$ ser perpendicular ao plano em que a função é constante, $\mathbf{K}$ indica a direção de propagação dessa onda.

Obs: Existe ainda, *o número de onda espectroscópico* definido por $K' = 1/\lambda$ comum em textos de espectroscopia.

O período temporal, T, é definido como o intervalo de tempo necessário para que a função repita seu valor quando mantemos um ponto fixo no espaço (Fig. 6.2).

Da equação (6.20) temos

$$\phi\left[cte - Kv\left(t + T\right)\right] = \phi\left[cte - Kvt\right]$$

$$\therefore \cos\left[cte - Kv\left(t - T\right)\right] = \cos\ \left[cte - Kvt\right]$$

ou

$$\cos\left[Kv\left(t - T\right) - cte\right] = \cos\left[Kvt - cte\right], \qquad \text{pois } \cos\theta = \cos(-\theta).$$

Como a repetição da função ocorre quando o argumento varia de 2π rad teremos

$$\Longrightarrow Kv\left(t - T\right) - cte = Kvt - cte + 2\pi$$

$$\therefore Kv = \frac{2\pi}{T}.$$

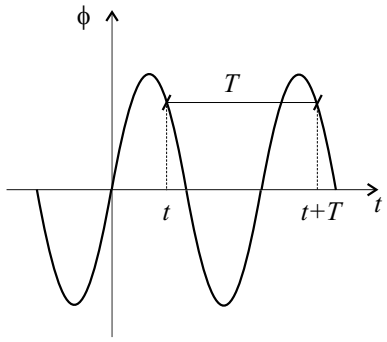


Figura 6.2: Definição do período temporal da onda.

Definimos

$$\omega = Kv = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \text{ (rad/s)}, \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi}{\lambda} v = 2\pi f \quad \therefore v = \lambda\, f,$$

ω é a frequência angular, de modo que, podemos escrever a equação (6.20) como

$$\phi = \phi_0 \cos\left[\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta\right]. \tag{6.22}$$

6.2 Notação complexa

Da representação de Euler para um número complexo,

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\ \text{sen}\theta$$

podemos reescrever a expressão da onda plana harmônica equação (6.20), com $\delta = 0$ por simplicidade, como

$$\phi = \text{Re}\{\phi_0 e^{j(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\} = \text{Re}\ \{\phi_0\ e^{j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}} e^{-j\omega t}\}$$

ou

$$\phi = \text{Re}\{\mathbf{\Phi}_0\ e^{-j\omega t}\}, \qquad \text{onde } \mathbf{\Phi}_0 = \phi_0\ e^{j\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}},$$

$\mathbf{\Phi}_0$ é chamado de amplitude complexa.

Em virtude linearidade da equação de onda, equação (6.13)

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

podemos escrever

$$\nabla^2\text{Re}\{\mathbf{\Phi}_0\ e^{-j\omega t}\} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\text{Re}\{\mathbf{\Phi}_0\ e^{-j\omega t}\}}{\partial t^2}$$

ou

$$\text{Re}\{\nabla^2\mathbf{\Phi}_0\ e^{-j\omega t}\} = \frac{1}{v^2}\text{Re}\frac{\partial^2\{\mathbf{\Phi}_0\ e^{-j\omega t}\}}{\partial t^2}.$$

Caso tivessemos tomado a solução senoidal encontraríamos uma equação semelhante para a parte imaginária, de modo que, a equação de onda pode ser escrita como uma equação de onda complexa cuja solução que tem significado físico é a parte real ou a parte imaginária da solução complexa.

Teremos então a equação diferencial de onda harmônica em variáveis complexas

$$\nabla^2(\mathbf{\Phi}_0\, e^{-j\omega t}) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2(\mathbf{\Phi}_0\, e^{-j\omega t})}{\partial t^2}$$

$$\therefore\, e^{-j\omega t}\nabla^2\mathbf{\Phi}_0 = -\frac{1}{v^2}\omega^2\mathbf{\Phi}_0\, e^{-j\omega t},$$

ou seja,

$$\nabla^2\mathbf{\Phi}_0 + \frac{\omega^2}{v^2}\mathbf{\Phi}_0 = 0. \tag{6.23}$$

Que é a equação diferencial para a amplitude complexa (observe que não envolve mais a variação temporal) de uma onda harmônica.

A notação complexa será utilizada com frequência nesse capítulo e nos capítulos seguintes em virtude da simplificação algébrica nas operações envolvidas. Contudo, um cuidado especial deve ser tomado quando operações não lineares estiverem sendo realizadas. Nesses casos, devemos trabalhar com a parte real da representação complexa da onda, diretamente, não sendo mais verdade que a parte real do resultado da operação não linear possua significado físico.

6.3 A velocidade de fase e a velocidade de grupo

Vimos que a solução onda plana para a equação de onda pode ter, em princípio, qualquer frequência e qualquer comprimento de onda desde que a relação $v = \lambda f$ seja satisfeita, com a velocidade v dependente das propriedades do meio segundo a equação (6.17). É um fato experimental que a velocidade de propagação da onda depende da frequência (ou do comprimento de onda) em muitos materiais. Esses meios são conhecidos como meios dispersivos por razões que veremos posteriormente. O vácuo tem a propriedade interessante de manter a mesma velocidade de propagação para todos as ondas e o valor dessa velocidade é comumente designado por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 2,998 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

A relação entre a velocidade da onda eletromagnética no vácuo e a velocidade da mesma onda em um determinado meio é o índice de refração $n = c/v$ e como v, em geral, depende da frequência, teremos também uma dependência do índice com a frequência (ou com o comprimento de onda) $n = n(f)$ ou $n = n(\lambda)$. Como mencionamos anteriormente, a velocidade de propagação da onda plana harmônica é chamada de velocidade de fase, pois os planos que caminham com essa velocidade mantêm a fase (o argumento da função cosseno) constante.

A superposição, discreta ou contínua, de ondas planas resulta em uma onda, que ainda satisfaz a equação diferencial de onda devido a sua linearidade. A forma da onda resultante difere de suas componentes podendo resultar em uma velocidade de propagação diferente

da velocidade de suas componentes. A velocidade de propagação dessa nova forma de perturbação é chamada de velocidade de grupo, quando é possível defini-la.

Uma onda periódica não carrega em si mesma nenhuma informação, pois a perturbação ocorre de modo períodico não sendo possível distinguir qual é a perturbação que tem algum significado. Para que possamos atribuir uma informação a uma onda eletromagnética é necessário que exista uma perturbação distinta das demais para que possa ser reconhecida. Para que possamos associar a essa perturbação uma velocidade de propagação é necessário ainda que possamos reconhece-la em dois instantes de tempo sucessivos para que seja possível medir a velocidade. Caso a perturbação mude de forma de modo que não seja possível acompanhar um determinado ponto, o conceito de velocidade fica impreciso.

Uma perturbação não períodica, como por exemplo um único pulso ou mesmo uma salva ou "pacote de ondas" pode ser representada pela transformada cosseno de Fourier

$$\phi(\mathbf{r},t) = \int_0^\infty \phi_0(\omega)\ \cos\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} - \omega t\right)\ d\omega, \tag{6.24}$$

ou em notação complexa,

$$\phi(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\int_0^\infty \phi_0(\omega)\ e^{j(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\ d\omega. \tag{6.25}$$

Se a região de integração for pequena, isto é, se as amplitudes $\phi_0(\omega)$ forem apreciavelmente diferentes de zero em uma pequena faixa de frequências $\Delta\omega$ nas vizinhanças de uma frequência central $\overline{\omega}$, a onda é dita "quase monocromática" e é comum utilizar o termo grupo de ondas ou pacote de ondas.

Por simplicidade de raciocínio consideremos uma onda unidimensional dada em função da variável p, por exemplo, já previamente definida (p pode coincidir, inclusive, com uma das variáveis x, y ou z),

$$\phi(p,t) = \mathrm{Re}\left\{\int_{\triangle\omega} \phi_0(\omega)\ e^{j(Kp-\omega t)}\ d\omega\right\}$$

onde restringimos o limite de integração a uma pequena faixa de frequências $\Delta\omega$ ao redor de $\overline{\omega}$ $(\triangle\omega/\overline{\omega} << 1)$.

Façamos

$$\phi(p,t) = \mathrm{Re}\left\{\int_{\triangle\omega} \phi_0(\omega) e^{j\left[p\left(K+\overline{K}-\overline{K}\right)-(\omega+\overline{\omega}-\overline{\omega})t\right]} d\omega\right\}$$

$$\phi(p,t) = \mathrm{Re}\left\{\int_{\triangle\omega} \phi_0(\omega) e^{j\left[\left(K-\overline{K}\right)p-(\omega-\overline{\omega})t\right]}\ e^{j(p\overline{K}-\overline{\omega}t)}\ d\omega\right\}$$

$$\therefore \phi(p,t) = \mathrm{Re}\left\{\int_{\triangle\omega} \phi_0(\omega) e^{j\left[\left(K-\overline{K}\right)p-(\omega-\overline{\omega})t\right]}\ d\omega\ e^{j(p\overline{K}-\overline{\omega}t)}\right\}$$

ou

$$\phi(p,t) = \mathrm{Re}\left\{A(p,t)e^{j(p\overline{K}-\overline{\omega}t)}\right\}, \qquad A(p,t) = \int_{\triangle\omega} \phi_0(\omega)e^{j\left[\left(K-\overline{K}\right)p-(\omega-\overline{\omega})t\right]}\, d\omega.$$

Podemos encarar $A\ (p,t)$ como a amplitude da onda plana de frequência angular $\overline{\omega}$ e número de onda $\overline{K}$ e, desde que $\triangle\omega$ seja suficientemente pequeno, podemos aproximar a expressão de $A(p,t)$

$$A(p,t) \approx \int_{\triangle\omega} \phi_0(\omega)e^{j\left\{(\omega-\overline{\omega})\left[\left[\frac{dK}{d\omega}\right]_{\overline{\omega}} p-t\right]\right\}} d\omega$$

pois

$$\left(K-\overline{K}\right)p-(\omega-\overline{\omega})\,t = (\omega-\overline{\omega})\left(\frac{K-\overline{K}}{\omega-\overline{\omega}}p-t\right) \approx$$

$$(\omega-\overline{\omega})\left(\left[\frac{dK}{d\omega}\right]_{\overline{\omega}} p-t\right).$$

A amplitude $A\ (p,t)$ é obtida por superposição de ondas planas de frequência $\omega-\overline{\omega}$ e, como foi assumido que $\triangle\omega << \overline{\omega}$, a variação de $A\ (p,t)$ no decorrer do tempo é muito menor que a variação da onda plana $e^{j(p\overline{K}-\overline{\omega}t)}$, ou seja, a amplitude da onda varia mais lentamente do que a onda (também chamada de portadora).

Observe que $\left[\frac{dK}{d\omega}\right]_{\overline{\omega}}$ tem dimensão de inverso de velocidade e portanto $\left[\frac{d\omega}{dK}\right]_{\overline{K}}$ tem dimensão de velocidade. $A\ (p,t)$ se mantêm constante se

$$\left[\frac{dK}{d\omega}\right]_{\overline{\omega}} p-t = cte,$$

ou seja,

$$p = \left[\frac{d\omega}{dK}\right]_{\overline{K}} t + cte.$$

Vemos, portanto, que a velocidade de propagação de $A(p,t)$ é dada por $\left[\frac{d\omega}{dK}\right]_{\overline{K}}$ e a chamamos de velocidade de grupo (Fig. 6.3)

$$v_g = \left[\frac{d\omega}{dK}\right]_{\overline{K}}. \tag{6.26}$$

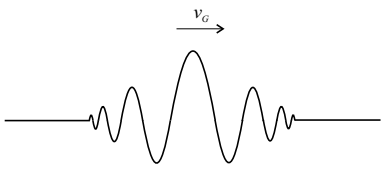


Figura 6.3: Pacote de ondas.

Um meio em que as componentes de Fourier (ondas planas) de frequências diversas propagam com velocidades diferentes é chamado de meio dispersivo. Em um meio dispersivo,

um pacote de ondas, em geral, muda de forma ao propagar pois suas componentes propagam com velocidades diferentes. Se o intervalo de integração, $\Delta\omega$, for pequeno, o pacote percorrerá uma distância maior antes de mudar apreciavelmente sua forma, pois, apenas ondas de frequências muito próximas (e velocidades parecidas) contribuem para a formação do pacote.

Nos meios não dispersivos todas as ondas planas propagam com a mesma velocidade valendo a relação $\omega = kv$, com v independente da frequência. Sendo assim, a velocidade de grupo dada por (6.26) será igual à velocidade de fase, $v_g = v$, e o pacote de ondas não mudará de forma durante a propagação.

6.4 Ondas vetoriais

Os conjuntos de equações (6.11) e (6.12) nos mostram que cada componente dos vetores dos campos, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ devem satisafazer o mesmo tipo de equação de onda. Admitindo soluções do tipo onda plana para cada um desses componentes, podemos construir uma onda plana vetorial onde os vetores de onda $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ são constantes em um plano perpendicular ao vetor de onda $\mathbf{K}$ em cada instante de tempo.

Por exemplo, para a onda plana harmônica, podemos escrever em notação complexa, para a onda que se afasta da origem,

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 e^{j(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\delta)} \tag{6.27}$$

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_0 e^{j(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\gamma)} \tag{6.28}$$

onde $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{H}_0$ são amplitudes vetoriais reais.

Voltamos a lembrar que as grandezas que possuem significado físico são as partes reais ou imaginárias dos vetores complexos $\widetilde{\mathbf{E}}$ e $\widetilde{\mathbf{H}}$.

Consideremos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ de uma onda plana real qualquer, não necessariamente harmônica.

Calculando o rotacional de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ notando que $\mathbf{E} = \mathbf{E}\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\omega t\right)$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\omega t\right)$, para qualquer onda plana, harmônica ou não, e utilizando a variável $u = \mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\omega t$, sendo

$$\frac{\partial(\ )}{\partial x} = \frac{\partial(\ )}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = K_x\frac{\partial(\ )}{\partial u}$$

$$\frac{\partial(\ )}{\partial y} = K_y\frac{\partial(\ )}{\partial u}$$

$$\frac{\partial(\ )}{\partial z} = K_z\frac{\partial(\ )}{\partial u},$$

teremos para a coordenada x do rotacional

$$\{\mathbf{rotE}\}_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = K_y\frac{\partial E_z}{\partial u} - K_z\frac{\partial E_y}{\partial u} = \left\{\mathbf{K}\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial u}\right\}_x.$$

De modo análogo para as outras coordenadas,

$$\{\mathbf{rotE}\}_y = \left\{\mathbf{K}\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial u}\right\}_y \text{ e } \{\mathbf{rotE}\}_z = \left\{\mathbf{K}\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial u}\right\}_z.$$

Logo

$$\mathbf{rotE} = \left\{ \mathbf{K} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} \right\}. \tag{6.29}$$

Para o rotacional de **H** teremos do mesmo modo

$$\mathbf{rotH} = \left\{ \mathbf{K} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u} \right\}. \tag{6.30}$$

Por outro lado, se derivarmos **E e H** com relação ao tempo teremos

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} \tag{6.31}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = -\omega \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u}. \tag{6.32}$$

Substituindo nas equações de Maxwell, equações (6.7) e (6.8)

$$\mathbf{rotE} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \text{com } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

e

$$\mathbf{rotH} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \qquad \text{com } \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

teremos

$$\mathbf{K} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu\left(-\omega\right)\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u} = \mu\omega \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u}$$

e

$$\mathbf{K} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon\left(-\omega\right)\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} = -\varepsilon\omega \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u}.$$

Resumindo:

$$\mathbf{K} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} = \mu\omega \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u}$$

$$\mathbf{K} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial u} = -\varepsilon\omega \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u}$$

Integrando com relação a variável u e tomando a constante de interação como zero, pois não nos interessa um campo constante, ficaremos com:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{K}}{\mu\omega} \times \mathbf{E}$$

e

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{K}}{\varepsilon\omega} \times \mathbf{H}.$$

Como

$$\omega = Kv = \frac{K}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

teremos

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\widehat{\mathbf{K}} \times \mathbf{E} \tag{6.33}$$

$$\mathbf{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,\widehat{\mathbf{K}} \times \mathbf{H}. \tag{6.34}$$

Multiplicando escalarmente por $\widehat{\mathbf{K}}$ teremos

$$\mathbf{H} \cdot \widehat{\mathbf{K}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\widehat{\mathbf{K}} \times \mathbf{E}\right) \cdot \widehat{\mathbf{K}} = 0$$

e

$$\mathbf{E} \cdot \widehat{\mathbf{K}} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\widehat{\mathbf{K}} \times \mathbf{H}\right) \cdot \widehat{\mathbf{K}} = 0,$$

ou seja, ambos os vetores são perpendiculares a $\mathbf{K}$ e de (6.33) ou de (6.34), também são perpendiculares entre si. Assim, $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ e $\widehat{\mathbf{K}}$ são mutuamente perpendiculares em uma onda plana (harmônica ou não).

A razão entre o módulo de $\mathbf{E}$ e o módulo de $\mathbf{H}$

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z \tag{6.35}$$

é chamada de *impedância intrínseca* do meio, pois esta razão tem dimensão de impedância. No vácuo,

$$Z = Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 376,8\ \Omega\ (\approx 120\pi\ \Omega). \tag{6.36}$$

Observe que, para o caso da onda plana harmônica dada por (6.27) ou (6.28), as equações (6.33) e (6.34) preveem que as fases iniciais δ e γ devem ser iguais uma vez que $\widehat{\mathbf{K}}$ é um vetor real. Ou seja, no espaço livre $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ estão em fase (Fig. 6.4).

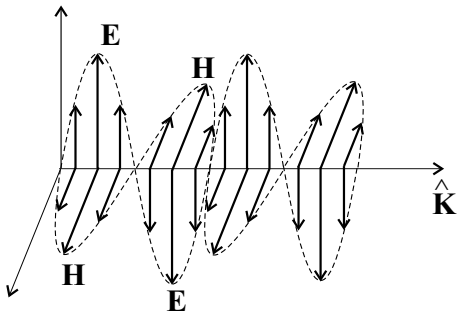


Figura 6.4: Onda eletromagnética harmônica no espaço livre. Vetores representados em escalas diferentes.

Exemplo: Uma onda plana harmônica possui, para o vetor do campo elétrico, uma amplitude vetorial dada por $\mathbf{E}_0 = (1\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}})$ V/m, a frequência é $3,75 \times 10^{14}$ Hz e propaga na direção do versor $\widehat{\mathbf{K}} = 1/\sqrt{3}(1\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}} - 1\hat{\mathbf{z}})$ em um meio, cujo índice de refração vale $n = 1,6$. Determinar as expressões para a onda plana, em notação complexa, tanto para $\mathbf{E}$ quanto para $\mathbf{H}$. Considerar $\mu \simeq \mu_0$.

Resolução:

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 e^{j(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

$$\mathbf{K} = K\widehat{\mathbf{K}} \text{ onde } K = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{c/n} = \frac{n2\pi f}{c}$$

$$K = \frac{1,6 \times 2\pi \times 3,75 \times 10^{14}}{3 \times 10^{8}} = 12,56 \times 10^{6} \text{ rad/m.}$$

$$\omega = 2\pi f = 2,35 \times 10^{15} \text{ rad/s}$$

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \left(1\hat{\mathbf{x}} + 1\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}\right) e^{j\left[\frac{12,6\times10^{6}}{\sqrt{3}}(x+y-z)-2,35\times10^{15}t\right]} \text{ V/m}$$

x, y e z em metros e t em segundos.

Calculemos H.

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\widehat{\mathbf{K}} \times \mathbf{E} \qquad \text{e} \qquad n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}, \quad \text{com } \mu \approx \mu_0$$

ou

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\widehat{\mathbf{K}} \times \mathbf{E}_0\, e^{j(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \qquad \text{e} \qquad n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}, \qquad \therefore \varepsilon = n^2\varepsilon_0$$

$$\widehat{\mathbf{K}} \times \mathbf{E}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{y}} + 0\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_0 n^2}{\mu_0}} = n\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{1,6}{120\pi}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1,6}{120\pi}\frac{\left(3\hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{y}} + 0\hat{\mathbf{z}}\right)}{\sqrt{3}} e^{j\left[7,2\times10^{6}(x+y-z)-2,35\times10^{15}\ t\right]}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1,6\sqrt{3}}{120\pi}\left(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\right) e^{j\left[7,210^{6}(x+y-z)-2,35\times10^{15}\ t\right]}$$

$$\mathbf{H} = 7,3 \times 10^{-3}\left(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}\right) e^{j\left[7,210^{6}(x+y-z)-2,35\times10^{15}\ t\right]} \text{ A/m.}$$

6.5 Ondas estacionárias

Como vimos anteriormente, a solução da equação de onda envolve a superposição de duas ondas que propagam em sentidos opostos. Podemos admitir a existência prévia dessas duas ondas ou podemos supor que uma delas pode ser obtida pela reflexão da outra na interface entre dois meios. Este é, normalmente, o caso usual encontrado na maioria dos problemas de interesse prático.

Por simplificação algébrica, suponhamos que as duas ondas que propagam em sentidos opostos tenham suas amplitudes vetoriais na mesma direção de modo que possamos tratá-las como escalares.

Tomemos as expressões correspondentes ao vetores dos campos elétricos para as duas ondas

$$E_1 = E_{0_1} \cos\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} - \omega t\right)$$

e

$$E_2 = E_{0_2} \cos\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} + \omega t + \gamma\right).$$

A onda 1 foi tomada como referência e a onda 2 como estando defasada de γ com relação a onda 1, em $t = 0$.

Em se tratando de reflexão, o valor assumido por γ dependerá dos dois meios envolvidos no processo, como veremos posteriormente, assumindo o valor 0 ou π rad para a reflexão ocorrendo na origem.

Expressões semelhantes podem ser escritas também para o vetor $\mathbf{H}$.

Para simplificar mais ainda o raciocínio digamos que a onda esteja propagando ao longo do eixo ox. Teremos então

$$E_1 = E_{0_1} \cos(Kx - \omega t), \qquad K = K_x \text{ nesse caso,}$$

$$E_2 = \pm E_{0_2} \cos(Kx + \omega t), \qquad \begin{cases} + \text{ para } \gamma = 0 \text{ rad} \\ - \text{ para } \gamma = \pi \text{ rad.} \end{cases}$$

A superposição de ambas as ondas dará um campo resultante

$$E = E_1 + E_2 = E_{01} \cos(Kx - \omega t) \pm E_{02} \cos(Kx + \omega t).$$

Apresentaremos duas maneiras equivalentes de encarar essa situação:

1ª Maneira:

Distinguimos duas possibilidades:

a) As duas ondas possuem a mesma amplitude

$$E_{01} = E_{02} = E_0$$

$$E = E_0 [\cos(Kx - \omega t) \pm \cos(Kx + \omega t)].$$

Mas,

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2},$$

então

$$E = 2E_0 \cos(Kx) \ \cos(\omega t). \tag{6.37}$$

Ou de

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \ \operatorname{sen} \frac{A-B}{2},$$

então

$$E = 2E_0 \operatorname{sen}(Kx) \operatorname{sen}(\omega t). \tag{6.38}$$

Ambas as equações (6.37) e (6.38) são equações de onda estacionária pura. Para cada instante de tempo t a função varia harmônicamente no espaço. Em (6.38), por exemplo, o termo $2E_0 \operatorname{sen}(Kx)$ pode ser visto como uma amplitude do termo $\operatorname{sen}(\omega t)$, sendo essa amplitude variável com a posição. Seu valor máximo vale $2E_0$ e seu valor mínimo $-2E_0$.

Nos pontos do espaço em que $\operatorname{sen}(Kx) = 0$, o campo E será nulo em todos os instantes de tempo. São os chamados nós ou nodos da onda estacionária e eles ocorrem a cada meio comprimento de onda, pois,

$$\operatorname{sen}(Kx) = 0 \Longrightarrow Kx = n\pi, \qquad n = 0, 1, 2, 3...$$

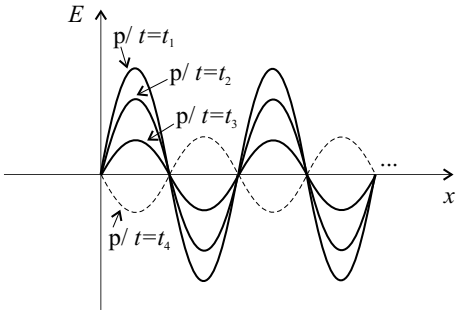


Figura 6.5: Onda estacionária.

$$\therefore \frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi, \qquad \therefore x = n\frac{\lambda}{2}.$$

A figura (Fig. 6.5) ilustra uma onda estacionária pura.

b) As duas ondas possuem amplitudes diferentes:
Tomemos a onda 1 com uma amplitude maior que a onda 2.

$$E_{01} > E_{02}$$

Podemos escrever $E_{01} = E_{02} + E_{03}$, de forma que a superposição da onda 1 com a onda 2 será

$$E = (E_{02} + E_{03})\cos(Kx - \omega t) + E_{02}\cos(Kx + \omega t + \gamma)$$
$$\therefore E = E_{02}\left[\cos(Kx - \omega t) + \cos(Kx + \omega t + \gamma)\right] + E_{03}\cos(Kx - \omega t).$$

O primeiro termo dará uma onda estacionária pura para $\gamma = 0$ ou $\gamma = \pi$ rad e o segundo termo é uma onda plana de menor amplitude que se afasta.

A representação gráfica desse segundo caso é mais facilmente obtida pela 2ª maneira de análise.

2ª Maneira:

Façamos a superposição dessas ondas para $\gamma = 0$ ou $\gamma = \pi$ rad desenvolvendo o cosseno da soma e da diferença

$$E_1 = E_{01}\cos(Kx - \omega t) = E_{01}\left[\cos(Kx)\cos(\omega t) + \text{sen}(Kx)\text{sen}(\omega t)\right]$$

$$E_2 = \pm E_{02}\cos(Kx + \omega t) = \pm E_{02}\left[\cos(Kx)\cos(\omega t) - \text{sen}(Kx)\text{sen}(\omega t)\right]$$

$$E = E_1 + E_2 = (E_{01} + E_{02})\cos(Kx)\cos(\omega t) + (E_{01} - E_{02})\,\text{sen}(Kx)\text{sen}(\omega t), \qquad \text{para } \gamma = 0$$

ou

$$E = E_1 + E_2 = (E_{01} - E_{02})\cos(Kx)\cos(\omega t) + (E_{01} + E_{02})\,\text{sen}(Kx)\text{sen}(\omega t), \qquad \text{para } \gamma = \pi.$$

No caso em que $\gamma = 0$ façamos

$$(E_{01} + E_{02})\cos(Kx) = A(x)$$

e

$$(E_{01} - E_{02})\,\mathrm{sen}(Kx) = B(x).$$

Então

$$E = A(x)\cos(\omega t) + B(x)\ \mathrm{sen}(\omega t)$$

que pode ser reescrito como

$$E = C(x)\cos(\omega t - \theta)$$

$$\therefore E = C(x)\cos(\omega t)\cos\theta + C(x)\ \mathrm{sen}(\omega t)\ \mathrm{sen}\theta$$

$$\therefore A(x) = C(x)\cos\theta \text{ e } B(x) = C(x)\ \mathrm{sen}\theta \implies A(x)^2 + B(x)^2 = C(x)^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)$$

$$\therefore C(x) = \sqrt{A(x)^2 + B(x)^2}$$

e

$$\frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{B(x)}{A(x)}, \qquad \therefore \theta = \arctan\frac{B(x)}{A(x)}, \qquad \theta = \theta(x).$$

Desse modo,

$$E = \sqrt{A(x)^2 + B(x)^2}\cos\left[\omega t - \theta(x)\right]$$

$$\therefore E = \sqrt{\left(E_{01} + E_{02}\right)^2\cos^2 Kx + \left(E_{01} - E_{02}\right)^2\ \mathrm{sen}^2 Kx}\ \cos\left[\omega t - \theta(x)\right].$$

O termo com a raiz pode ser encarado como uma "amplitude" da onda $\cos\left[\omega t - \theta(x)\right]$. O valor máximo dessa raiz será $(E_{01} + E_{02})$ que ocorre quando $\mathrm{sen}^2 Kx = 0$. O valor máximo do campo ocorrerá em um certo instante de tempo em que $\cos\left[\omega t - \theta(x)\right] = 1$.

O mínimo valor da amplitude será $(E_{01} - E_{02})$ que ocorre quando $\cos Kx = 0$. O mínimo valor positivo do campo ocorrerá em outro instante de tempo em que $\cos\left[\omega t - \theta(x)\right] = 1$

Define-se então a relação de onda estacionária (ROE) como

$$ROE = \frac{E_{\max}}{E_{\min}} = \frac{E_{01} + E_{02}}{E_{01} - E_{02}}. \tag{6.39}$$

Admitindo que E_{02} seja a amplitude da onda refletida na interface entre dois meios, esta poderá ser zero no mínimo (ausência de reflexão) ou igual a E_{01} no máximo (totalmente refletida). Portanto, a relação de onda estacionária varia entre 1 e ∞ respectivamente.

Raciocínio idêntico pode ser efetuado para a situação em que $\gamma = \pi$ rad.

A representação gráfica da amplitude da onda em função da posição é mostrada na figura (Fig. 6.6). A oscilação do campo em função do tempo ocorre entre a curva superior e a curva inferior para cada posição x.

6.6 Equação de onda em meios condutores

No item anterior, haviamos encontrado a equação diferencial de onda e sua solução para meios dielétricos perfeitos. Consideraremos agora os meios condutores caracterizados também por sua condutividade g.

Em tais meios existirão correntes de condução uma vez que $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$.

Voltando às eq. de Maxwell temos:

$$\mathbf{rotE} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \therefore \mathbf{rotE} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{6.40}$$

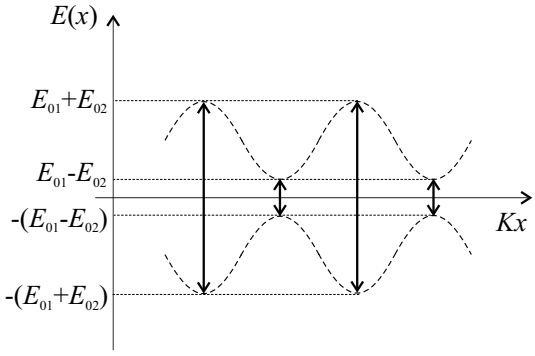


Figura 6.6: Onda estacionária mais onda propagante.

e

$$\mathbf{rotH} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \text{ e } \mathbf{J} = g\mathbf{E}, \qquad \therefore \mathbf{rotH} = g\mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Tomando o **rot** (**rotE**) teremos

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{rotE}) = \mathbf{grad}\ div\mathbf{E} - \nabla^2\mathbf{E} = \mathbf{rot}\left(-\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore \mathbf{grad}\ div\frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} - \nabla^2\mathbf{E} = -\mu\mathbf{rot}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{rotH})$$

ou

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{grad}\ div\mathbf{D} - \nabla^2\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(g\mathbf{E} + \varepsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

ou ainda

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{grad}\ div\mathbf{D} - \nabla^2\mathbf{E} = -\mu g\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Mas, $div\mathbf{D} = \rho$, portanto,

$$\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu g\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{grad}\rho. \tag{6.41}$$

A introdução de cargas livres no interior de um condutor causa uma densidade volumétrica de cargas, ρ que decai rapidamente com o tempo conforme discutimos anteriormente na seção 3.3, de forma que, em muito pouco tempo, podemos considerar que o interior do condutor será ausente de cargas livres. Como exemplo, se considerarmos o cobre com $\varepsilon_R = 1$ e $g = 5,8 \times 10^7$ (ohm m)$^{-1}$ teremos que a densidade cargas cairá a 37% do valor inicial em um intervalo de tempo igual a

$$\frac{\varepsilon}{g} = \frac{8,8\ \times\ 10^{-12}}{5,8\ \times\ 10^7} \approx 1,5 \times 10^{-19} \text{ s!}$$

Além disso, se admitirmos variações senoidais para o vetor do campo elétrico, podemos mostrar facilmente que $div\mathbf{D}\ = 0$ (e portanto, $\rho = 0$). Vejamos:

De

$$\mathbf{rotH} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \text{ com } \mathbf{J} = g\mathbf{E} \text{ e } \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

e supondo que $\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{j\omega t}$ teremos a equação complexa

$$\mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{H}} = g\widetilde{\mathbf{E}} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{j\omega t}\right)$$

$$\mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{H}} = g\frac{\widetilde{\mathbf{D}}}{\varepsilon} + \varepsilon j\omega \widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{j\omega t} = \frac{g}{\varepsilon}\widetilde{\mathbf{D}} + j\omega\varepsilon\widetilde{\mathbf{E}}$$

$$\therefore \mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{H}} = \frac{g}{\varepsilon}\widetilde{\mathbf{D}} + j\omega\widetilde{\mathbf{D}} = \left(\frac{g}{\varepsilon} + j\omega\right)\widetilde{\mathbf{D}}.$$

Tomando o divergente em ambos os lados

$$div\ \mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{H}} = \left(\frac{g}{\varepsilon} + j\omega\right) div\widetilde{\mathbf{D}}$$

mas $div\ \mathbf{rotF} = 0$ para qualquer $\mathbf{F}$ e, como a relação é válida para todos os valores de ω, deveremos ter

$$div\widetilde{\mathbf{D}} = 0$$

consequentemente,

$$\rho = 0.$$

A equação (6.41) ficará então

$$\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu g\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \tag{6.42}$$

que é a equação diferencial de onda para $\mathbf{E}$ nos meios condutores.

Podemos encontrar também uma equação de onda para $\mathbf{H}$ tomando o $\mathbf{rot}\,(\mathbf{rotH})$

$$\mathbf{rot}\,(\mathbf{rotH}) = \mathbf{rotJ} + \mathbf{rot}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{grad}\ div\mathbf{H} - \nabla^2\mathbf{H} = g\ \mathbf{rotE} + \varepsilon\ \mathbf{rot}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = g\ \mathbf{rotE} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{rotE}\right).$$

Como

$$div\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}div\mathbf{B} = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{rotE} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

teremos

$$-\nabla^2\mathbf{H} = g\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore \nabla^2\mathbf{H} - g\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

ou

$$\nabla^2\mathbf{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - g\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0 \tag{6.43}$$

que é uma equação diferencial de onda idêntica à equação para $\mathbf{E}$.

6.7 Solução da equação de onda para meios condutores

Procuremos soluções da equação diferencial de onda que possuam variação harmônica no tempo. Escrevendo em notação complexa

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \widetilde{\mathbf{E}}_0(r)e^{-j\omega t}$$

e

$$\widetilde{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) = \widetilde{\mathbf{H}}_0(r)e^{-j\omega t}.$$

Teremos de (6.42) e (6.43), generalizadas para a forma complexa, as equações vetoriais

$$\nabla^2\left(\widetilde{\mathbf{E}}_0(r)e^{-j\omega t}\right) - \varepsilon\mu\widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})\left(-j\omega\right)^2 e^{-j\omega t} - \mu g\widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})\left(-j\omega\right)e^{-j\omega t} = 0$$

e

$$\nabla^2\left(\widetilde{\mathbf{H}}_0(r)e^{-j\omega t}\right) - \varepsilon\mu\widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r})\left(-j\omega\right)^2 e^{-j\omega t} - \mu g\widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r})\left(-j\omega\right)e^{-j\omega t} = 0,$$

ou

$$\nabla^2\widetilde{\mathbf{E}}_0 + \left(\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu g\right)\widetilde{\mathbf{E}}_0 = 0 \tag{6.44}$$

e

$$\nabla^2\widetilde{\mathbf{H}}_0 + \left(\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu g\right)\widetilde{\mathbf{H}}_0 = 0. \tag{6.45}$$

Definindo a constante $\widetilde{K}$ tal que

$$\widetilde{K}^2 = \omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu g = \omega^2\mu\left(\varepsilon + j\frac{g}{\omega}\right), \tag{6.46}$$

as duas equações anteriores tomam a forma da equação de Helmholtz

$$\nabla^2\widetilde{\mathbf{E}}_0 + \widetilde{K}^2\widetilde{\mathbf{E}}_0 = 0 \tag{6.47}$$

e

$$\nabla^2\widetilde{\mathbf{H}}_0 + \widetilde{K}^2\widetilde{\mathbf{H}}_0 = 0. \tag{6.48}$$

A constante $\widetilde{K}$, chamada de constante de propagação, é um número complexo nesse caso.

As equações vetoriais (6.47) e (6.48) possuem componentes que devem satisfazer equações escalares idênticas à equação (6.23), onde

$$\frac{\omega^2}{v^2} = K^2$$

foi substituído por $\widetilde{K}^2$. Podemos, portanto, procurar soluções do tipo onda plana com vetor de onda complexo.

Para a amplitude complexa $\widetilde{\mathbf{E}}_0$ teremos

$$\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_0 e^{j(\widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})}, \qquad \text{onde } \widetilde{\mathbf{K}} = \widetilde{K}\,\widehat{\mathbf{K}}. \tag{6.49}$$

Fazendo

$$\widetilde{K} = \alpha + j\beta$$

teremos

$$\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_0 e^{j\left[(\alpha+j\beta)\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})\right]} = \mathbf{E}_0 e^{-\beta\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r}} e^{j\alpha\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r}}$$

ou

$$\widetilde{\mathbf{E}}_0 = e^{-\beta\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r}}\mathbf{E}_0 e^{j\alpha\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r}},$$

onde $e^{-\beta\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r}}$ é o fator de amortecimento e $e^{j\alpha\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r}}$ é o fator oscilatório.

Os valores de α e β são dados por

$$\alpha = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu g}\right\}$$

$$\beta = \mathrm{Im}\left\{\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu + j\omega\mu g}\right\}$$

ou

$$\alpha = \omega\mathrm{Re}\left\{\sqrt{\varepsilon\mu + \frac{j\mu g}{\omega}}\right\}$$

e

$$\beta = \omega\mathrm{Im}\left\{\sqrt{\varepsilon\mu + \frac{j\mu g}{\omega}}\right\}.$$

Desenvolvendo

$$\widetilde{K}^2 = (\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha j\beta - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha j\beta$$

e comparando com a equação(6.46) teremos

$$\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2\varepsilon\mu$$

e

$$j2\alpha\beta = j\omega\mu g.$$

Resolvendo esse sistema de equações

$$\beta = \frac{\omega\mu g}{2\alpha}$$

e

$$\alpha^2 - \frac{\omega^2\mu^2 g^2}{4\alpha^2} = \omega^2\varepsilon\mu,$$

fazendo $x = \alpha^2$ fica

$$x - \left(\frac{\omega\mu g}{2}\right)^2 \frac{1}{x} = \omega^2\varepsilon\mu$$

$$x^2 - \omega^2\varepsilon\mu x - \left(\frac{\omega\mu g}{2}\right)^2 = 0$$

$$x = \frac{\omega^2\varepsilon\mu \pm \sqrt{(\omega^2\varepsilon\mu)^2 + 4\left(\frac{\omega\mu g}{2}\right)^2}}{2}$$

$$x = \omega^2\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{(\omega\mu g)^2}{(\omega^2\varepsilon\mu)^2}}\right)$$

$$x = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2\varepsilon^2}}\right].$$

Portanto,

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+\frac{g^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right)} \tag{6.50}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+\frac{g^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)}. \tag{6.51}$$

Veja que α e $\beta > 0$.

Podemos proceder de modo análogo para a amplitude complexa $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ encontrando resultado semelhante

$$\widetilde{\mathbf{H}}_0 = \mathbf{H}_0 e^{j(\widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})} \tag{6.52}$$

com os mesmos valores de α e β.

Observe que o fato do meio ser condutor introduz um fator de amortecimento na onda, fator esse que depende das propriedades do meio e da freqüência.

Mostremos agora as relações existentes entre os vetores dos campos. Voltemos às equações de Maxwell para os meios condutores:

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

com $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{J} = g\mathbf{E}$, e $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$.

Para variações harmônicas no tempo nos vetores dos campos

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{-j\omega t}, \qquad \widetilde{\mathbf{H}} = \widetilde{\mathbf{H}}_0 e^{-j\omega t},$$

as equações tomam a forma

$$\mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \mu j\omega\widetilde{\mathbf{H}}_0 \tag{6.53}$$

e

$$\mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{H}}_0 = (g - j\omega\varepsilon)\,\widetilde{\mathbf{E}}_0. \tag{6.54}$$

Substituindo (6.49) em (6.53) teremos

$$\mathbf{rot}\left[\mathbf{E}_0 e^{j(\widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})}\right] = \mu j\omega\widetilde{\mathbf{H}}_0.$$

De acordo com a identidade

$$\mathbf{rot}\,(\phi\mathbf{F}) = \mathbf{grad}\phi\times\mathbf{F} + \phi\mathbf{rot}\mathbf{F}$$

teremos

$$\mathbf{rot}\left[\mathbf{E}_0 e^{j(\widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})}\right] = \mathbf{grad}\left[e^{j(\widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})}\right]\times\mathbf{E}_0 + e^{j(\widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})}\times\mathbf{rot}\mathbf{E}_0.$$

Mas

$$\mathbf{rot}\mathbf{E}_0 = 0$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\left[e^{j(\widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})}\right] &= j\left(\widetilde{K}_x\hat{\mathbf{x}} + \widetilde{K}_y\hat{\mathbf{y}} + \widetilde{K}_z\hat{\mathbf{z}}\right)e^{j(\widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})}\\ &= j\widetilde{\mathbf{K}}e^{j(\widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})}\end{aligned}$$

portanto,

$$\mathbf{rot}\left[\mathbf{E}_0 e^{j(\widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})}\right] = je^{j(\widetilde{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r})}\widetilde{\mathbf{K}}\times\mathbf{E}_0 = \mu j\omega\widetilde{\mathbf{H}}_0$$

$$\therefore \widetilde{\mathbf{K}}\times\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \mu\omega\widetilde{\mathbf{H}}_0$$

$$\therefore \widetilde{\mathbf{H}}_0 = \frac{\widetilde{\mathbf{K}}}{\mu\omega}\times\widetilde{\mathbf{E}}_0 \tag{6.55}$$

Dessa expressão observamos a perpendicularidade entre $\widetilde{\mathbf{H}}$ e $\widetilde{\mathbf{E}}$. Observe, contudo, que o fato de $\widetilde{K}$ ser complexo implica que existe uma diferença de fase entre dois vetores. Os módulos dos dois vetores estão relacionados por

$$|\widetilde{\mathbf{H}}_0| = \frac{\widetilde{K}}{\mu\omega}|\widetilde{\mathbf{E}}_0| = \frac{\alpha+j\beta}{\mu\omega}|\widetilde{\mathbf{E}}_0| \tag{6.56}$$

$$|\widetilde{\mathbf{H}}_0| = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\mu\omega}e^{j\theta}|\widetilde{\mathbf{E}}_0|, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{\beta}{\alpha}. \tag{6.57}$$

Observe que a diferença de fase entre $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ e $\widetilde{\mathbf{E}}_0$ é θ.

Além disso, se tomarmos o produto escalar de $\widetilde{\mathbf{H}}_0$ por $\widetilde{\mathbf{K}}$ encontraremos

$$\widetilde{\mathbf{H}}_0\cdot\widetilde{\mathbf{K}} = \left(\frac{\widetilde{\mathbf{K}}}{\mu\omega}\times\widetilde{\mathbf{E}}_0\right)\cdot\widetilde{\mathbf{K}} = 0$$

reafirmando a perpendicularidade entre $\mathbf{H}$ e $\mathbf{K}$.

Em resumo, *os três vetores continuam perpendiculares entre si porém, o vetor do campo elétrico encontra-se defasado do vetor do campo magnético.*

Um caso particular interessante é o dos meios bons condutores, onde a condutividade g é comparada com o produto $\omega\varepsilon$ sendo $g >> \omega\varepsilon$. Para o cobre, por exemplo, mesmo em altas freqüências como 30.000 MHz, a razão $g/(\omega\varepsilon)$ vale em torno de $3,5\times10^8$.

Considerando então que $g/(\omega\varepsilon) >> 1$ a expressão da constante de propagação, equação (6.46), pode ser escrita como

$$\widetilde{K} = \sqrt{j\omega\mu g(1-j\frac{\varepsilon\omega}{g})} \approx \sqrt{j\omega\mu g}$$

$$\widetilde{K} = \sqrt{\omega\mu g}\ \lfloor 45^{\mathrm{o}}, \text{ pois } \sqrt{j} = \sqrt{e^{j(\frac{\pi}{2})}} = e^{j(\frac{\pi}{4})}$$

ou

$$\widetilde{K} \approx \sqrt{\omega\mu g}\ \left(\frac{1+j}{\sqrt{2}}\right). \tag{6.58}$$

Logo, de $\widetilde{K} = \alpha + j\beta$ teremos

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\mu g}{2}} \qquad \text{e} \qquad \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu g}{2}}$$

e, como para bons condutores o valor de g é elevado, tanto α quanto β serão grandes e da equação (6.49) e seguintes vemos que o termo de amortecimento $e^{-\beta\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r}}$ decairá rapidamente

com a distância $\widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}$, ou seja, a onda será fortemente amortecida. Define-se então a *profundidade de penetração* como a distância δ percorrida ao longo da variável $\widehat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}$ de modo que o termo de amortecimento caia a $1/e$ (37%).

Ou seja,

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu g}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu g}}, \text{ pois } \omega = 2\pi f. \tag{6.59}$$

De modo geral, a "profundidade de penetração" vale

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\sqrt{1+\frac{g^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)}}. \tag{6.60}$$

A velocidade da onda em um condutor (velocidade de fase) é dada por

$$v = \frac{\omega}{\mathrm{Re}\left\{\widetilde{K}\right\}} = \frac{\omega}{\alpha}$$

que, para bons condutores, vale

$$v = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu g}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu g}}. \tag{6.61}$$

A impedância intrínseca de um condutor pode ser obtida de (6.56)

$$\widetilde{Z} = \frac{|\widetilde{\mathbf{E}}_0|}{|\widetilde{\mathbf{H}}_0|} = \frac{\mu\omega}{\widetilde{K}}$$

que, para bons condutores vale

$$\widetilde{Z} \approx \frac{\mu\omega}{\sqrt{\frac{\omega\mu g}{2}}(1+j)} = \frac{\sqrt{\frac{\mu\omega}{g}}}{\frac{(1+j)}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\mu\omega}{g}}\lfloor -45^{\circ}. \tag{6.62}$$

Em outras palavras, o campo elétrico está atrasado de $\pi/4$ rad com relação ao campo magnético.

Um outro caso particular também interessante é o do dielétrico com poucas perdas, ou seja, um bom dielétrico (porém, não um dielétrico perfeito). Nessa situação, $g/\omega\varepsilon << 1$ e as expressões para α e β podem ser aproximados expandindo a raiz:

$$\sqrt{1+\frac{g^2}{\omega^2\varepsilon^2}} \approx \left(1+\frac{g^2}{2\omega^2\varepsilon^2}\right), \qquad \text{pois } \sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}.$$

As equações (6.50) e (6.51) ficam então:

$$\alpha \approx \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[\left(1+\frac{g^2}{2\omega^2\varepsilon^2}\right)+1\right]} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1+\frac{g^2}{8\omega^2\varepsilon^2}\right) \tag{6.63}$$

e

$$\beta \approx \omega\sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{2}\left[\left(1+\frac{g^2}{2\omega^2\varepsilon^2}\right)-1\right]} = \frac{g}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \tag{6.64}$$

Observe em (6.63) que $\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ foi corrigido por um termo muito pequeno. No dielétrico perfeito o termo $\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ é o módulo do vetor de onda $\mathbf{K}$ $\left(K = \omega/v = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\right)$.

A velocidade de propagação da onda

$$v = \frac{\omega}{\mathrm{Re}\left\{\widetilde{K}\right\}} = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1+\frac{g^2}{8\omega^2\varepsilon^2}\right)} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(1-\frac{g^2}{8\omega^2\varepsilon^2}\right) \tag{6.65}$$

onde pode-se observar uma pequena diminuição do valor da velocidade quando comparado com o dielétrico perfeito.

6.8 Polarização da onda e os parâmetros de Stokes

Como vimos, anteriormente, os componentes dos vetores dos campos **E** e **H** satisfazem equações de onda independentes.

Isso significa que, admitindo soluções do tipo onda plana harmônica, pode haver diferença de fase entre os diversos componentes.

Consideremos, por simplicidade, uma onda propagando ao longo do eixo oz. Então

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{r} = K_z z = Kz, \qquad \text{fazendo } K = K_z.$$

As coordenadas do vetor **E** serão escritas como:

$$\begin{aligned}
&E_x = E_{x0}\cos(Kz-\omega t+\delta_1) = E_{x0}\cos(\gamma+\delta_1),\ \gamma = Kz-\omega t\\
&E_y = E_{y0}\cos(Kz-\omega t+\delta_2) = E_{yo}\cos(\gamma+\delta_2)\\
&E_z = 0 \qquad \text{(pois a onda é transversal!)}.
\end{aligned}$$

Expandindo os cossenos teremos

$$\begin{aligned}
E_x &= E_{x0}(\cos\gamma\cos\delta_1 - \mathrm{sen}\gamma\ \mathrm{sen}\delta_1)\\
E_y &= E_{yo}(\cos\gamma\cos\delta_2 - \mathrm{sen}\gamma\ \mathrm{sen}\delta_2)
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{E_x}{E_{x0}} = \cos\gamma\cos\delta_1 - \mathrm{sen}\gamma\ \mathrm{sen}\delta_1 \tag{6.66}$$

e

$$\frac{E_y}{E_{y0}} = \cos\gamma\cos\delta_2 - \mathrm{sen}\gamma\ \mathrm{sen}\delta_2. \tag{6.67}$$

Multiplicando a equação (6.66) por $\mathrm{sen}\delta_2$, a equação (6.67) por $\mathrm{sen}\delta_1$ e subtraindo uma da outra teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{E_x}{E_{x0}}\mathrm{sen}\delta_2 - \frac{E_y}{E_{y0}}\mathrm{sen}\delta_1 &= [\cos\gamma\cos\delta_1\ \mathrm{sen}\delta_2 - \mathrm{sen}\gamma\ \mathrm{sen}\delta_1\ \mathrm{sen}\delta_2] -\\
&[\cos\gamma\cos\delta_2\ \mathrm{sen}\delta_1 - \ \mathrm{sen}\gamma\ \mathrm{sen}\delta_2\ \mathrm{sen}\delta_1]\\
&= \cos\gamma\cos\delta_1\ \mathrm{sen}\delta_2 - \cos\gamma\ \mathrm{sen}\delta_2\ \mathrm{sen}\delta_1
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{E_x}{E_{x0}}\,\text{sen}\delta_2 - \frac{E_y}{E_{y0}}\,\text{sen}\delta_1 = \cos\gamma\ \text{sen}(\delta_2-\delta_1) = \cos\gamma\ \text{sen}\delta,\ \text{com}\ \delta = \delta_2 - \delta_1.$$

Multiplicando agora a equação (6.66) por $\cos\delta_2$, a equação (6.67) por $\cos\delta_1$ e subtraindo uma da outra teremos de modo semelhante

$$\frac{E_x}{E_{x0}}\cos\delta_2 - \frac{E_y}{E_{y0}}\cos\delta_1 = \text{sen}\gamma\ \text{sen}\delta.$$

Elevando as duas últimas equações ao quadrado e somando-as teremos

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{x0}}\frac{E_y}{E_{y0}}\cos\delta = \text{sen}^2\delta \tag{6.68}$$

que é a equação de uma cônica. Em particular é a equação de uma elípse, uma vez que o determinante associado é não negativo (Fig. 6.7).

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{E_{x0}}\right)^2 & \frac{-\cos\delta}{E_{x0}E_{y0}} \\ \frac{-\cos\delta}{E_{x0}E_{y0}} & \left(\frac{1}{(E_{y0})}\right)^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{E_{x0}}\right)^2\left(\frac{1}{E_{y0}}\right)^2(1-\cos^2\delta) = \frac{\text{sen}^2\delta}{E_{x0}^2E_{y0}^2} \geq 0.$$

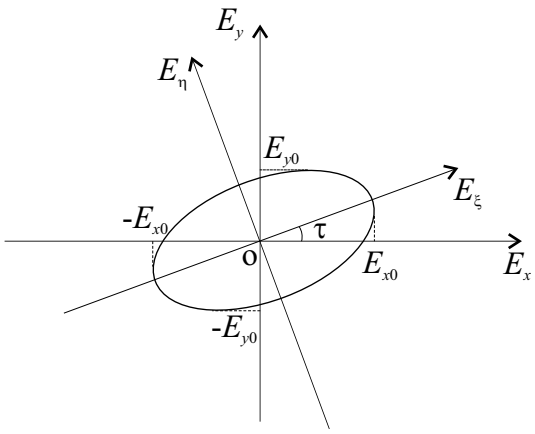


Figura 6.7: Polarização elíptica.

Observa-se que o eixo maior da elipse, em geral, encontra-se inclinado de um ângulo τ com relação ao eixo oE_x. É possível representar a elipse no sistema de eixos E_η E_ξ coincidentes com os eixos menor e maior respectivamente, que encontram-se girandos de τ. Para isso é necessário escrever as coordenadas de um sistema no outro sistema.

$$E_\xi = E_x\cos\tau + E_y\ \text{sen}\tau, \qquad \text{com}\ 0 \leq \tau \leq \pi \tag{6.69}$$

$$E_\eta = -E_x\ \text{sen}\tau + E_y\cos\tau. \tag{6.70}$$

A equação paramétrica da elipse no sistema E_η E_ξ é dada por:

$$E_\xi = E_{\xi 0}\cos(\gamma+\delta_0), \qquad \gamma = Kz - \omega t \tag{6.71}$$

$$E_\eta = \pm E_{\eta 0} \operatorname{sen}(\gamma + \delta_0) \tag{6.72}$$

com $E_{\xi 0} \geq E_{\eta 0}$, por hipótese. Os sinais $\pm$ dependem do sentido de giro da ponta do vetor $\mathbf{E}$ ($+$ para anti-horário e $-$ para horário com γ crescente).

Expandindo (6.71) e (6.72), substituindo E_x e E_y em (6.69), (6.70) e comparando os termos é possível mostrar que:

$$E_{x0}^2 + E_{y0}^2 = E_{\xi 0}^2 + E_{\eta 0}^2 \tag{6.73}$$

$$\tan 2\tau = \tan 2\theta \cos\delta, \text{ com } \tan\theta = \frac{E_{y0}}{E_{x0}}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \tag{6.74}$$

$$\operatorname{sen}2\epsilon = \operatorname{sen}2\theta \operatorname{sen}\delta, \text{ com } \tan\epsilon = \pm\frac{E_{\eta 0}}{E_{\xi 0}}, \qquad \frac{-\pi}{4} \leq \epsilon \leq \frac{\pi}{4} \tag{6.75}$$

$$\frac{E_{\eta 0}}{E_{\xi 0}} \text{ é a razão axial.}$$

Em resumo, sendo conhecidas E_{x0} e E_{y0} e a difereça de fase δ, podemos determinar o ângulo de giro τ , e os semi eixos principais $E_{\eta 0}$ e $E_{\xi 0}$ e vice versa.

A convenção do IEEE para descrever o sentindo de giro da elípse é a de um observador que vê a onda se afastar dele. Por exemplo, nas equações

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0}\cos(cte - \omega t + \delta_1) \\ E_y &= E_{y0}\cos(cte - \omega t + \delta_2) \end{aligned} \tag{6.76}$$

se fizermos, arbitrariamente, $cte = 0$, $\delta_1 = 0$ e $\delta_2 = \pi/2$

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0}\cos(\omega t) \\ E_y &= E_{y0}\operatorname{sen}(\omega t). \end{aligned} \tag{6.77}$$

A ponta do vetor $\mathbf{E}$ girará no sentido horário, para um $z = cte$, em função do tempo (polarização direita) para um observador que veja a onda se afastar (Fig. 6.8) ou o contrário, para um observador que veja a onda se aproximar.

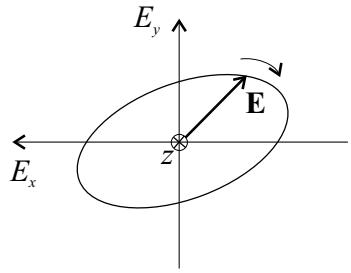


Figura 6.8: Polarização elíptica direita, observador vendo a onda se afastar.

Casos particulares:

A depender da relação entre as amplitudes e o valor da diferença de fase, a elípse pode assumir a forma de uma reta ou de um círculo como veremos.

Se E_{x0} ou E_{y0} ou δ forem nulos a elipse toma a forma de uma reta e dizemos que a onda está linearmente polarizada:

Para $E_{x0} = 0$ a onda está linearmente polarizada na direção do eixo y.

Para $E_{y0} = 0$ a onda está linearmente polarizada na direção do eixo x.

Para $\delta = 0$ a onda está linearmente polarizada em uma direção que depende da relação entre as amplitudes. Se $E_{x0} = E_{y0}$ a reta encontra-se inclinada a $45°$ ($\tau = 45°$). Se $E_{x0} \neq E_{y0}$ teremos

$$\tau = \tan^{-1} \frac{E_{y0}}{E_{x0}}.$$

Se $E_{x0} = E_{y0}$ e $\delta = \pm\pi/2$, a elipse se transforma em um círculo. Para $\delta = \pi/2$ obteremos as equações (6.77), (sendo $z = cte$) e dizemos que a onda está circularmente polarizada à direita. Para $\delta = -\pi/2$ o sentido de giro inverte e dizemos que a onda está circularmente polarizada à esquerda.

O estado de polarização de uma onda necessita de três quantidades independentes para ser completamente caracterizado. Por exemplo, as duas amplitudes E_{x0} e E_{y0} e a diferença de fase δ. Ou então, o eixo maior, o eixo menor e o ângulo ϵ que dá o sentido do giro. Contudo, para aplicações práticas costuma-se utilizar um conjunto de parâmetros, todos com os mesmas dimensões físicas, que podem ser determinados a partir de experiências simples, os parâmetros de Stokes que definiremos a seguir. Esses parâmetros foram introduzidos em 1852 por G.G. Stokes quando o mesmo investigava a luz parcialmente polarizada. São definidos por:

$$\begin{aligned} s_0 &\equiv E_{x0}^2 + E_{y0}^2 \\ s_1 &\equiv E_{x0}^2 - E_{y0}^2 \\ s_2 &\equiv 2E_{x0}E_{y0}\cos\delta \\ s_3 &\equiv 2E_{x0}E_{y0}\,\mathrm{sen}\delta. \end{aligned} \tag{6.78}$$

Elevando ao quadrado e somando encontraremos que

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \tag{6.79}$$

o que mostra que apenas 3 parâmetros são independentes. O parâmetro s_0 é o módulo ao quadrado do vetor $\mathbf{E}_0$ e mostraremos, posteriormente, que é proporcional à intensidade da onda.

É possível escrever os parâmetros s_1, s_2 e s_3 em função dos ângulos τ e ϵ. Pode-se demonstrar que

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0\cos 2\epsilon\cos 2\tau \\ s_2 &= s_0\cos 2\epsilon\,\mathrm{sen}2\tau \\ s_3 &= s_0\,\mathrm{sen}2\epsilon \end{aligned} \tag{6.80}$$

Essas equações permitem representar geometricamente todos os estados de polarização possíveis de uma onda de um modo bastante simples. Consideremos que s_1, s_2 e s_3 sejam as coordenadas cartesianas de um ponto P sobre uma superfície esférica de raio s_0, sendo 2ϵ e 2τ as coordenadas angulares (latitude e longitude) conforme a figura (Fig. 6.9) (podemos também utilizar os ângulos δ e 2θ de modo equivalente) as relações entre os ângulos são dadas pelas equações (6.74) e (6.75).

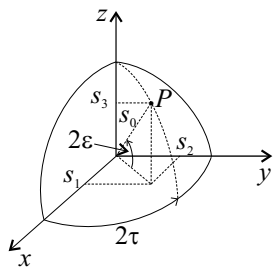


Figura 6.9: Um oitante da esfera de Poincaré.

Para toda onda plana monocromática de amplitude E_0, seu estado possível de polarização corresponderá a um ponto sobre essa superfície esférica de raio s_0. Essa representação foi introduzida por H. Poincaré em 1892 e é conhecida como esfera de Poincaré.

Os valores positivos de ϵ correspondem à polarização esquerda (segundo a convenção do IEEE) e os valores negativos de ϵ correspondem à polarização direita. Logo, os pontos acima do plano equatorial (plano xy) correspondem à polarização esquerda e os pontos abaixo correspondem à polarização direita.

Para uma onda linearmente polarizada, $\delta = 0$ ou um múltiplo inteiro de π e segundo as equações (6.79) o parâmetro $s_3 = 0$ (corresponde aos pontos sobre o plano equatorial). Ou, de modo equivalente, $\epsilon = 0$

Para uma onda com polarização circular, $E_{x0} = E_{y0}$ e $\delta = \pm\pi/2$ teremos $s_1 = s_2 = 0$ e $s_3 = \pm\, s_0$. Ou seja, o polo norte representa a polarização circular à esquerda e o polo sul representa a polarização circular à direita (Fig. 6.10).

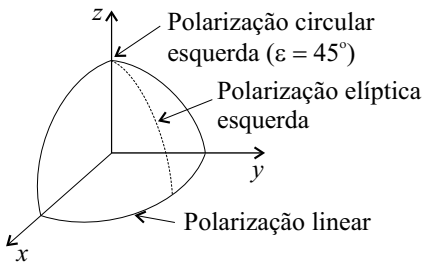


Figura 6.10: Estados de polarização em um oitante da esfera de Poincaré.

6.9 Reflexão e refração de uma onda

A experiência mostra que, quando uma onda eletromagnética incide na interface de dois meios com propriedades elétricas diferentes, parte da onda é refletida para o meio de origem e parte da onda é transmitida para o outro meio.

Nosso interesse é determinar as características das ondas refletida e transmitida em função das características da onda incidente supondo, ondas planas harmônicas, que os

meios possuam extensões infinitas e que a interface entre os dois meios seja plana.

A existência da onda refletida e da onda transmitida também pode ser demonstrada pelas condições de fronteira para as equações de Maxwell, pois essas condições não seriam satisfeitas se não postulássemos a existência de tais ondas (basta lembrar a continuidade dos componentes dos vetores dos campos).

A variação temporal dos vetores dos campos na interface entre os dois meios deve ser a mesma para as ondas incidente, refletida e transmitida uma vez que as cargas elétricas livres ou ligadas que geram as duas últimas ondas, oscilam com a mesma frequência da onda incidente (que é a causa da oscilação) irradiando para os dois meios ondas com a mesma frequência.

Conhecendo a função de variação temporal em um certo ponto do espaço, digamos $\mathbf{F}(t)$, estará completamente determinada a função em um outro ponto localizado pelo vetor $\mathbf{r}$ com origem no primeiro ponto. A função será $\mathbf{F}(t-\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r}/v)$, $\widehat{\mathbf{K}}$ versor na direção de propagação, pois o termo $\widehat{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{r}/v$ é o intervalo de tempo necessário para que a onda chegue ao novo ponto.

Uma vez que estamos admitindo que a variação temporal seja a mesma para todas as ondas em um determinado ponto da fronteira, deveremos ter o mesmo para todos os outros pontos. Chamando de $\widehat{\mathbf{K}}^i$ o versor incidente, $\widehat{\mathbf{K}}^r$o refletido e $\widehat{\mathbf{K}}^t$o transmitido, deveremos ter, em um ponto qualquer da fronteira, $\mathbf{r}(x,y,z)$, que:

$$t-\frac{\widehat{\mathbf{K}}^i\cdot\mathbf{r}}{v_1}=t-\frac{\widehat{\mathbf{K}}^r\cdot\mathbf{r}}{v_1}=t-\frac{\widehat{\mathbf{K}}^t\cdot\mathbf{r}}{v_2} \tag{6.81}$$

onde v_1 e v_2 são as velocidades de propagação nos meios 1 e 2 respectivamente.

Por simplicidade, tomemos a fronteira coincidindo com o plano $z=0$. Ficamos então com:

$$\frac{K_x^i x+K_y^i y}{v_1}=\frac{K_x^r x+K_y^r y}{v_1}=\frac{K_x^t x+K_y^t y}{v_2}$$

e, uma vez que x e y podem tomar qualquer valor na fronteira, deveremos ter

$$\frac{K_x^i}{v_1}=\frac{K_x^r}{v_1}=\frac{K_x^t}{v_2}\ \text{e}\ \frac{K_y^i}{v_1}=\frac{K_y^r}{v_1}=\frac{K_y^t}{v_2} \tag{6.82}$$

Logo, os três versores de propagação são coplanares.

Definiremos o plano de incidência como sendo o plano que contém o versor da onda incidente $\widehat{\mathbf{K}}^i$ e o versor perpendicular à fronteira dos meios. Faremos, por simplicidade, o plano de incidência coincidir com o plano xz e denotaremos por θ_i, θ_r e θ_t os ângulos de incidência, reflexão e transmissão respectivamente, medidos conforme a figura (Fig. 6.11).

Teremos então:

$$\begin{array}{lll} K_x^i=\text{sen}\theta_i & K_y^i=0 & K_z^i=\cos\theta_i \\ K_x^r=\text{sen}\theta_r & K_y^r=0 & K_z^r=-\cos\theta_r \\ K_x^t=\text{sen}\theta_t & K_y^t=0 & K_z^t=\cos\theta_t \end{array} \tag{6.83}$$

$$0\le\theta_i\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\theta_r\le\frac{\pi}{2},\ 0\le\theta_t\le\frac{\pi}{2}$$

Substituindo (6.83) em (6.82) teremos

$$\frac{\text{sen}\theta_i}{v_1}=\frac{\text{sen}\theta_r}{v_1}=\frac{\text{sen}\theta_t}{v_2}, \tag{6.84}$$

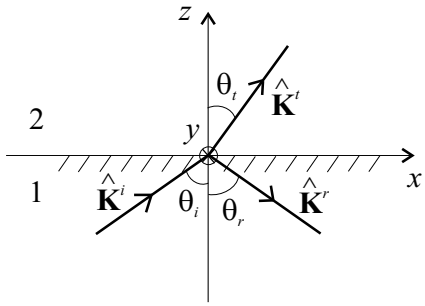


Figura 6.11: Definição dos ângulos de incidência, reflexão e transmissão na fronteira entre dois meios.

logo

$$\text{sen}\theta_i = \text{sen}\theta_r, \qquad \therefore \theta_i = \theta_r.$$

Temos então a lei da reflexão que afirma: os ângulos de incidência e reflexão são iguais e a normal à frente de onda refletida está contida no plano de incidência.

Da definição do índice de refração, $n = c/v$, temos de (6.84) que

$$\frac{\text{sen}\theta_i}{c/n_1} = \frac{\text{sen}\theta_t}{c/n_2}$$

$$\therefore n_1 \,\text{sen}\theta_i = n_2 \,\text{sen}\theta_t \tag{6.85}$$

que, justamente com o fato da normal à frente de onda transmitida estar no plano de incidência, é conhecida como a lei de Snell ou lei da refração.

Quando o meio 2 possui índice de refração maior que o meio 1, dizemos que o segundo meio é opticamente mais denso que o primeiro meio e nesse caso teremos que

$$\text{sen}\ \theta_t = \frac{n_1}{n_2}\,\text{sen}\theta_i < \text{sen}\theta_i$$

e o ângulo θ_t será sempre real para todos os valores de θ_i, $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$.

Quando o meio 2 é opticamente menos denso que o meio 1 ($n_1 < n_2$) teremos que

$$\text{sen}\ \theta_t = \frac{n_1}{n_2}\,\text{sen}\theta_i > \text{sen}\theta_i$$

e só teremos ângulos θ_t reais para os valores de

$$\text{sen}\theta_i \leq \frac{n_2}{n_1},$$

caso contrário obteremos reflexão total conforme veremos mais adiante.

No processo de reflexão e transmissão, as ondas refletidas e transmitidas possuem amplitudes que dependem do ângulo de incidência. As expressões que relacionam as amplitudes das ondas foram desenvolvidas por Fresnel em 1823 baseadas na sua teoria elástica da luz e são conhecidas, na versão atual, como as fórmulas de Fresnel. Na dedução de tais fórmulas consideraremos que $\mu_1 \approx \mu_2 = \mu_0$ (meios não magnéticos).

Para o estudo do processo de reflexão e transmissão, e para facilitar a aplicação das condições de contorno na fronteira, é conveniente decompor os vetores dos campos em componentes paralelos e perpendiculares ao plano de incidência, $\mathbf{E}_{\parallel}$, $\mathbf{E}_{\perp}$, $\mathbf{H}_{\parallel}$ e $\mathbf{H}_{\perp}$ conforme a figura (Fig. 6.12).

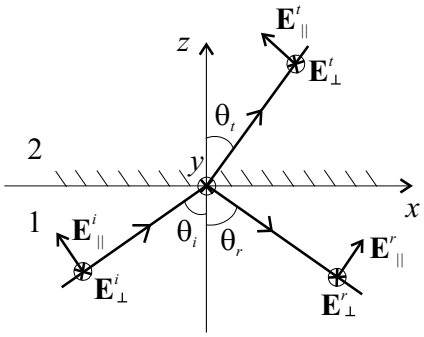


Figura 6.12: Definição dos componentes paralelo e perpendicular do vetor do campo elétrico incidente, refletido e transmitido na fronteira entre dois meios.

Escrevendo o vetor $\mathbf{E}^i$ em notação complexa (K real)

$$\widetilde{\mathbf{E}}^i = \widetilde{\mathbf{E}}^i_0 e^{j(\mathbf{K}_1\cdot\mathbf{r}-\omega t)} = \widetilde{\mathbf{E}}^i_0 e^{j[K_1(\mathrm{sen}\theta_i x+\cos\theta_i z)-\omega t]}$$

pois

$$\mathbf{K}_1 = K_1\widehat{\mathbf{K}}_1 = K_1(\mathrm{sen}\theta_i\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta_i\hat{\mathbf{z}}).$$

Os componentes do vetor $\widetilde{\mathbf{E}}^i$ podem então ser escritos em função dos componentes paralelo e perpendicular como:

$$\widetilde{E}^i_x = -\widetilde{E}^i_{\parallel}\cos\theta_i e^{j\tau_i}, \qquad \tau_i = K_1(\mathrm{sen}\theta_i x + \cos\theta_i z) - \omega t \tag{6.86}$$

$$\widetilde{E}^i_y = \widetilde{E}^i_{\perp} e^{j\tau_i}$$

$$\widetilde{E}^i_z = \widetilde{E}^i_{\parallel}\,\mathrm{sen}\theta_i e^{j\tau_i}.$$

Os componentes para o vetor $\widetilde{H}$ são dados pela equação (6.33)

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\widehat{\mathbf{K}}\times\mathbf{E}$$

$$\therefore \widetilde{\mathbf{H}}^i = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}(\mathrm{sen}\theta_i\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta_i\hat{\mathbf{z}})\times(\widetilde{E}^i_x\hat{\mathbf{x}} + \widetilde{E}^i_y\hat{\mathbf{y}} + \widetilde{E}^i_z\hat{\mathbf{z}})e^{j\tau_i}$$

$$\therefore \widetilde{H}^i_x = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\cos\theta_i\widetilde{E}^i_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\cos\theta_i\widetilde{E}^i_{\perp}e^{j\tau_i}, \tag{6.87}$$

$$\widetilde{H}^i_y = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\left[-\,\mathrm{sen}\theta_i\widetilde{E}^i_z + \cos\theta_i\widetilde{E}^i_x\right] =$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\left[-\operatorname{sen}\theta_i\widetilde{E}^i_{\|}\operatorname{sen}\theta_i-\cos\theta_i\widetilde{E}^i_{\|}\cos\theta_i\right]e^{j\tau_i}$$

$$\widetilde{H}^i_y=-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\widetilde{E}^i_{\|}e^{j\tau_i}$$

e

$$\widetilde{H}^i_z=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\operatorname{sen}\theta_i\widetilde{E}^i_y=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\operatorname{sen}\theta_i\widetilde{E}^i_{\perp}e^{j\tau_i}.$$

Vejamos agora para a onda trasmitida.

De acordo com a figura (Fig. 6.12) teremos para o vetor $\widetilde{\mathbf{E}}^t$

$$\widetilde{E}^t_x=-\widetilde{E}^t_{\|}\cos\theta_t e^{j\tau_t},\qquad \tau_t=K_2(\operatorname{sen}\theta_t x+\cos\theta_t z)-\omega t \tag{6.88}$$

$$\widetilde{E}^t_y=\widetilde{E}^t_{\perp}e^{j\tau_t}$$

$$\widetilde{E}^t_z=\widetilde{E}^t_{\|}\operatorname{sen}\theta_t e^{j\tau_t}$$

e para $\widetilde{\mathbf{H}}^t$, utilizando ainda (6.33),

$$\widetilde{\mathbf{H}}^t=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}(\operatorname{sen}\theta_t\hat{\mathbf{x}}+\cos\theta_t\hat{\mathbf{z}})\times(\widetilde{E}^t_x\hat{\mathbf{x}}+\widetilde{E}^t_y\hat{\mathbf{y}}+\widetilde{E}^t_z\hat{\mathbf{z}})$$

$$\widetilde{H}^t_x=-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\cos\theta_t\widetilde{E}^t_{\perp}e^{j\tau_t} \tag{6.89}$$

$$\widetilde{H}^t_y=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}(-\operatorname{sen}\theta_t\widetilde{E}^t_{\|}\operatorname{sen}\theta_t-\cos\theta_t\widetilde{E}^t_{\|}\cos\theta_t)e^{j\tau_t}=-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\widetilde{E}^t_{\|}e^{j\tau_t}$$

$$\widetilde{H}^t_y=-\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\widetilde{E}^t_{\|}e^{j\tau_t}$$

$$\widetilde{H}^t_z=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\operatorname{sen}\theta_t\widetilde{E}^t_{\perp}e^{j\tau_t}.$$

Para o vetor $\widetilde{\mathbf{E}}^r$da onda refletida

$$\widetilde{E}^r_x=\widetilde{E}^r_{\|}\cos\theta_r e^{j\tau_r},\qquad \tau_r=K_1(\operatorname{sen}\theta_r x-\cos\theta_r z)-\omega t \tag{6.90}$$

$$\widetilde{E}^r_y=\widetilde{E}^r_{\perp}e^{j\tau_r}$$

$$\widetilde{E}^r_z=\widetilde{E}^r_{\|}\operatorname{sen}\theta_r e^{j\tau_r}$$

e por (6.33)

$$\widetilde{\mathbf{H}}^r=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}(\operatorname{sen}\theta_r\hat{x}-\cos\theta_r\hat{z})\times(\widetilde{E}^r_x\hat{\mathbf{x}}+\widetilde{E}^r_y\hat{\mathbf{y}}+\widetilde{E}^r_z\hat{\mathbf{z}})e^{j\tau_r}$$

$$\widetilde{H}^r_x=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\cos\theta_r\widetilde{E}^r_{\perp}e^{j\tau_r} \tag{6.91}$$

$$\widetilde{H}^r_y=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\left[-\operatorname{sen}\theta_r\widetilde{E}^r_{||}\operatorname{sen}\theta_r-\cos\theta_r\widetilde{E}^r_{||}\cos\theta_r\right]e^{j\tau_r}=-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\widetilde{E}^r_{||}e^{j\tau_r}$$

$$\widetilde{H}_z^r = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\text{sen}\theta_r \widetilde{E}_\perp^r e^{j\tau_r}.$$

Apliquemos, agora, as condições de fronteira nos vetores dos campos dadas por (5.37), (5.39), (5.41) e (5.42). Da continuidade dos componentes tangenciais de **E** e **H** teremos que

$$\widetilde{E}_x^i + \widetilde{E}_x^r = \widetilde{E}_x^t, \tag{6.92}$$

$$\widetilde{E}_y^i + \widetilde{E}_y^r = \widetilde{E}_y^t, \tag{6.93}$$

$$\widetilde{H}_x^i + \widetilde{H}_x^r = \widetilde{H}_x^t \tag{6.94}$$

e

$$\widetilde{H}_y^i + \widetilde{H}_y^r = \widetilde{H}_y^t. \tag{6.95}$$

Da continuidade das componentes normais de **D** e **B** teremos que:

$$\varepsilon_1 \widetilde{E}_z^i + \varepsilon_1 \widetilde{E}_z^r = \varepsilon_2 \widetilde{E}_z^t \tag{6.96}$$

$$\mu_1 \widetilde{H}_z^i + \mu_1 \widetilde{H}_z^r = \mu_2 \widetilde{H}_z^t. \tag{6.97}$$

Substituindo as expressões dos componentes dos vetores de **E** e **H**, equações (6.86) a (6.91) nas equações (6.92) a (6.95) e considerando que $\cos\theta_i = \cos\theta_r,\ \tau_i = \tau_r = \tau_t$ teremos

$$-\widetilde{E}_{||}^i \cos\theta_i + \widetilde{E}_{||}^r \cos\theta_r = -\widetilde{E}_{||}^t \cos\theta_t$$

$$\therefore (\widetilde{E}_{||}^i - \widetilde{E}_{||}^r)\cos\theta_i = \widetilde{E}_{||}^t \cos\theta_t, \tag{6.98}$$

$$\widetilde{E}_\perp^i + \widetilde{E}_\perp^r = \widetilde{E}_\perp^t, \tag{6.99}$$

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\cos\theta_i \widetilde{E}_\perp^i + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}\cos\theta_r \widetilde{E}_\perp^r = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}}\cos\theta_t \widetilde{E}_\perp^t$$

$$\therefore (\widetilde{E}_\perp^i - \widetilde{E}_\perp^r)\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_i = \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta_t \widetilde{E}_\perp^i, \tag{6.100}$$

$$-\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\widetilde{E}_{||}^i - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\widetilde{E}_{||}^r = -\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\widetilde{E}_{||}^t$$

$$\therefore \sqrt{\varepsilon_1}(\widetilde{E}_{||}^i + \widetilde{E}_{||}^r) = \sqrt{\varepsilon_2}\widetilde{E}_{||}^t. \tag{6.101}$$

Substituindo, agora, as expressões dos componentes dos campos em (6.96) teremos

$$\varepsilon_1 \widetilde{E}_{||}^i \text{sen}\theta_i + \varepsilon_1 \widetilde{E}_{||}^r \text{sen}\theta_r = \varepsilon_2 \widetilde{E}_{||}^t \text{sen}\theta_t$$

ou

$$\sqrt{\varepsilon_1}\sqrt{\varepsilon_1}\text{sen}\theta_i(\widetilde{E}_{||}^i + \widetilde{E}_{||}^r) = \sqrt{\varepsilon_2}\sqrt{\varepsilon_2}\text{sen}\theta_t \widetilde{E}_{||}^t$$

e pela lei Snell, equação (6.85) fica

$$\sqrt{\varepsilon_1}(\widetilde{E}_{||}^i + \widetilde{E}_{||}^r) = \sqrt{\varepsilon_2}\widetilde{E}_{||}^t,$$

que é o mesmo resultado obtido em (6.101).

Procedendo da mesma forma em (6.97)

$$\mu_1\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\text{sen}\theta_i\widetilde{E}^i_\perp + \mu_1\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\text{sen}\theta_r\widetilde{E}^r_\perp = \mu_2\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\text{sen}\theta_t E^t_\perp$$

$$\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\text{sen}\theta_i(\widetilde{E}^i_\perp + \widetilde{E}^r_\perp) = \sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\text{sen}\theta_t\widetilde{E}^t_\perp$$

ou

$$cn_1\text{sen}\theta_i(\widetilde{E}^i_\perp + \widetilde{E}^r_\perp) = cn_2\text{sen}\theta_t E^t_\perp.$$

Como

$$n_1\text{sen}\theta_1 = n_2\text{sen}\theta_2,$$

obtemos

$$\widetilde{E}^i_\perp + \widetilde{E}^r_\perp = \widetilde{E}^t_\perp$$

que é idêntico ao que foi obtido em (6.99).

Vemos, portanto, que as condições de contorno nos componentes normais são automaticamente satisfeitas.

As equações (6.98) a (6.101) formam um conjunto de quatro equações das quais duas são para os componentes paralelos ao plano de incidência e duas são para os perpendiculares, ou seja os componentes perpendiculares são independentes dos componentes paralelos.

De (6.98) e (6.101) fazendo

$$n = c\sqrt{\varepsilon\mu} \approx c\sqrt{\varepsilon\mu_0}$$

podemos explicitar $\widetilde{E}^r_{||}$ e $\widetilde{E}^t_{||}$ em função de $\widetilde{E}^i_{||}$

$$(\widetilde{E}^i_{||} - \widetilde{E}^r_{||})\cos\theta_i = \widetilde{E}^t_{||}\cos\theta_t \qquad \therefore \widetilde{E}^r_{||} = \frac{\widetilde{E}^i_{||}\cos\theta_i - \widetilde{E}^t_{||}\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \tag{6.102}$$

e

$$\sqrt{\varepsilon_1}(\widetilde{E}^i_{||} + \widetilde{E}^r_{||}) = \sqrt{\varepsilon_2}\widetilde{E}^t_{||}$$

$$\therefore \widetilde{E}^t_{||} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\widetilde{E}^i_{||} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\widetilde{E}^r_{||}. \tag{6.103}$$

Substituindo $\widetilde{E}^r_{||}$ dado pela equação (6.102) fica

$$\widetilde{E}^t_{||} = \frac{n_1}{n_2}\widetilde{E}^i_{||} + \frac{n_1}{n_2}\frac{\widetilde{E}^i_{||}\cos\theta_i - \widetilde{E}^t_{||}\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

$$\therefore \widetilde{E}^t_{||}\left(1 + \frac{n_1}{n_2}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right) = 2\frac{n_1}{n_2}\widetilde{E}^i_{||}$$

$$\therefore \widetilde{E}^t_{||} = \frac{2\frac{n_1}{n_2}\widetilde{E}^i_{||}}{1 + \frac{n_1}{n_2}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}} \tag{6.104}$$

ou

$$\therefore \widetilde{E}^t_{||} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}\widetilde{E}^i_{||}. \tag{6.105}$$

Explicitando $\widetilde{E}^r_{||}$ em (6.103)

$$\widetilde{E}^r_{||} = \frac{\widetilde{E}^t_{||} - \frac{n_1}{n_2}\widetilde{E}^i_{||}}{\frac{n_1}{n_2}} = \widetilde{E}^t_{||}\frac{n_2}{n_1} - \widetilde{E}^i_{||}.$$

Substituindo (6.104) nesse resultado fica

$$\therefore \widetilde{E}^r_{||} = \frac{2\frac{n_1}{n_2}\widetilde{E}^i_{||}}{1+\frac{n_1}{n_2}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}}\frac{n_2}{n_1} - \widetilde{E}^i_{||} = \frac{2\widetilde{E}^i_{||}}{1+\frac{n_1}{n_2}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}} - \widetilde{E}^i_{||}$$

$$\therefore \widetilde{E}^r_{||} = \left[\frac{2n_2\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t} - 1\right]\widetilde{E}^i_{||} = \frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}\widetilde{E}^i_{||}$$

$$\widetilde{E}^r_{||} = \frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}\widetilde{E}^i_{||}. \tag{6.106}$$

De (6.99) e (6.100) encontraremos de modo semelhante que

$$\widetilde{E}^t_{\perp} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}\widetilde{E}^i_{\perp} \tag{6.107}$$

e

$$\widetilde{E}^r_{\perp} = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}\widetilde{E}^i_{\perp}. \tag{6.108}$$

Essas expressões podem ser reescritas em uma forma alternativa utilizando a lei de Snell. Encontraremos:

$$\widetilde{E}^t_{||} = \frac{2\text{sen}\theta_t\cos\theta_i}{\text{sen}(\theta_i+\theta_t)\cos(\theta_i-\theta_t)}\widetilde{E}^i_{||} \tag{6.109}$$

$$\widetilde{E}^r_{||} = \frac{\tan(\theta_i-\theta_t)}{\tan(\theta_i+\theta_t)}\widetilde{E}^i_{||} \tag{6.110}$$

$$\widetilde{E}^t_{\perp} = \frac{2\text{sen}\theta_t\cos\theta_i}{\text{sen}(\theta_i+\theta_t)}\widetilde{E}^i_{\perp} \tag{6.111}$$

$$\widetilde{E}^r_{\perp} = -\frac{\text{sen}(\theta_i-\theta_t)}{\text{sen}(\theta_i+\theta_t)}\widetilde{E}^i_{\perp}. \tag{6.112}$$

O ângulo de incidência θ_i é sempre real e, desde que não ocorra reflexão total, θ_t também o será. Sendo assim, os fatores trigonométricos em (6.109) a (6.112) serão números reais. As fases dos componentes transmitidos e refletidos serão iguais aos dos respectivos componentes incidentes ou então diferirão de π.

Os componentes transmitidos sempre terão os mesmos sinais dos componentes incidentes, ou seja, estarão em fase.

O mesmo não ocorre para os componentes refletidos que poderão ter o mesmo sinal ou não do componente incidente, a depender se θ_t é menor ou maior que θ_i.

Se o meio 2 for opticamente mais denso que o meio 1 ($n_2 > n_1$) teremos, pela lei de Snell, $\theta_t < \theta_i$ e, de acordo com (6.112), o componente perpendicular da onda refletida terá sinal oposto ao da onda incidente e, portanto, diferem em fase de π rad. Ainda nessa condição, de acordo com (6.110), o fator $\tan(\theta_i - \theta_t)$ será positivo, porém, o denominador $\tan(\theta_i + \theta_t)$ poderá ser positivo ou negativo a depender se $\theta_i + \theta_t$ é menor ou maior que $\pi/2$ rad.

Se o meio 2 for opticamente menos denso que o meio 1, teremos $\theta_t > \theta_i$ (o limite para reflexão total é $\theta_t = \pi/2$) e, portanto, $\widetilde{E}^r_\perp$ estará em fase com $\widetilde{E}^i_\perp$ e $\widetilde{E}^r_{||}$ poderá ou não estar em fase com $\widetilde{E}^i_{||}$ a depender se $\tan(\theta_i + \theta_t)$ é negativa ou positiva ($\theta_i + \theta_t$ maior ou menor que $\pi/2$ rad).

Caso particular: para incidência normal ($\theta_i = 0$) teremos $\theta_t = 0$ e não cabe definir plano de incidência nem componentes paralelo e perpendicular. A aplicação das equações de Fresnel darão como resultado nessa situação limite:

$$\widetilde{E}^t_{||} = \frac{2}{\frac{n_2}{n_1} + 1}\widetilde{E}^i_{||} \tag{6.113}$$

$$\widetilde{E}^t_{\perp} = \frac{2}{\frac{n_2}{n_1} + 1}\widetilde{E}^i_{\perp} \tag{6.114}$$

$$\widetilde{E}^r_{||} = \frac{\frac{n_2}{n_1} - 1}{\frac{n_2}{n_1} + 1}\widetilde{E}^i_{||} \tag{6.115}$$

$$\widetilde{E}^r_{\perp} = -\frac{\frac{n_2}{n_1} - 1}{\frac{n_2}{n_1} + 1}\widetilde{E}^i_{\perp} \tag{6.116}$$

6.9.1 Reflexão total

Vimos que, quando o meio 2 é opticamente menos denso que o meio 1 ($n_2 < n_1$) o ângulo θ_t é maior que o ângulo θ_i pois $\text{sen}\theta_t = n_1/n_2\ \text{sen}\theta_i$. Quando θ_t atinge a situação limite igual a $\pi/2$ a onda transmitida propaga razante à fronteira e o valor correspondente do ângulo de incidência, chamado de ângulo critico, é dado por

$$\text{sen}\theta = \frac{n_2}{n_1} \tag{6.117}$$

Para os ângulos de incidência superiores ao ângulo crítico, verifica-se experimentalmente a existência de reflexão total da onda na interface não havendo valor real de θ_t que satisfaça a lei de Snell. Contudo, um ângulo complexo pode ser encontrado e as consequências serão mostradas a seguir.

De

$$\text{sen}\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\text{sen}\theta_i$$

teremos

$$\cos\theta_t = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta_t} = \pm j\sqrt{\text{sen}^2\theta_t - 1}$$

$$\therefore \cos\theta_t = \pm j\sqrt{\frac{\text{sen}^2\theta_i}{(n_2/n_1)^2} - 1}. \tag{6.118}$$

O fator $e^{j\tau_t}$ na onda transmitida valerá

$$e^{j\tau_t} = e^{j[K_2(\text{sen}\theta_t x + \cos\theta_t z) - \omega t]} = e^{j\left[\frac{\omega}{v_2}(\text{sen}\theta_t x + \cos\theta_t z) - \omega t\right]}$$

$$\therefore e^{j\tau_t} = e^{j\left[\frac{\omega}{v_2}\frac{n_1}{n_2}\text{sen}\theta_i x - \omega t\right]} e^{\mp\sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\text{sen}^2\theta_i - 1}\ \frac{\omega}{v_2} z} \tag{6.119}$$

onde pode-se observar que a onda propaga oscilando ao longo do eixo $0x$, que está no plano de incidência, variando exponencialmente na direção do eixo $0z$. Nessa expressão, apenas a exponencial negativa tem sentido físico, correspondendo a uma atenuação nos vetores dos campos. A profundidade de pentração é da ordem de

$$\frac{v_2}{\omega} = \frac{\lambda_2}{2\pi}$$

ou seja, da ordem do comprimento de onda. Vale a pena notar que existe vetor **E** e **H** no meio 2, contudo, não propagam ao longo do eixo $0z$.

Vejamos o que ocorre com as amplitudes dos componentes paralelos e perpendiculares da onda refletida.

Da equação (6.106) teremos

$$\widetilde{E}^r_{||} = \frac{\frac{n_2}{n_1}\cos\theta_i - \cos\theta_t}{\frac{n_2}{n_1}\cos\theta_i + \cos\theta_t}\widetilde{E}^i_{||} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cos\theta_i - \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_t}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cos\theta_i + \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_t}\widetilde{E}^i_{||}.$$

Substituindo (6.118) com o sinal positivo fica:

$$\widetilde{E}^r_{||} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cos\theta_i - \frac{n_2}{n_1}j\sqrt{(\frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_i)^2 - 1}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cos\theta_i + \frac{n_2}{n_1}j\sqrt{(\frac{n_1}{n_2}\operatorname{sen}\theta_i)^2 - 1}}\widetilde{E}^i_{||}$$

$$\therefore \widetilde{E}^r_{||} = \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cos\theta_i - j\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta_i - (\frac{n_2}{n_1})^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\cos\theta_i + j\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta_i - (\frac{n_2}{n_1})^2}}\widetilde{E}^i_{||}. \tag{6.120}$$

Da equação (6.108) teremos

$$\widetilde{E}^r_{\perp} = \frac{\cos\theta_i - \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_t}{\cos\theta_i + \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_t}\widetilde{E}^i_{\perp}.$$

Substituindo (6.118) com o sinal positivo fica:

$$\widetilde{E}^r_{\perp} = \frac{\cos\theta_i - j\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta_i - (\frac{n_2}{n_1})^2}}{\cos\theta_i + j\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta_i - (\frac{n_2}{n_1})^2}}\widetilde{E}^i_{\perp}. \tag{6.121}$$

Observando (6.120) e (6.121) podemos concluir que

$$|\widetilde{E}^r_{||}| = |\widetilde{E}^i_{||}| \qquad \text{e} \qquad |\widetilde{E}^r_{\perp}| = |\widetilde{E}^i_{\perp}|.$$

Como veremos posteriormente, a intensidade da onda é proporcional ao quadrado do módulo do vetor do campo e, sendo assim, a intensidade da onda refletida é igual a intensidade da onda incidente em um processo de reflexão total.

6.9.2 Reflexão na superfície de um condutor perfeito

A reflexão e a transmissão de uma onda na fronteira entre um dielétrico e um condutor é por demais complexa para ser analisada nesse texto, no caso geral. Nos restringiremos ao caso da fronteira de um dielétrico com um condutor perfeito. No interior de um condutor perfeito não existem vetores **E** e **H** oscilantes no tempo, de forma que, a aplicação das condições de contorno tornam-se bastante simples.

Analisemos o que ocorre para os componentes perpendicular e paralelo dos vetores dos campos utilizando a mesma figura correspondente a dois dielétricos, retirando apenas a onda transmitida. A lei da reflexão continua válida, pois, sua dedução independe dos meios.

Iniciando com o componente do vetor **E** perpendicular ao plano de incidência, a condição de contorno para o componente tangencial de **E** diz que não deve existir tal componente na superfície do meio 1 uma vez que a mesma não existe no meio 2. Logo, somos obrigados a concluir que

$$\widetilde{E}_{\perp}^{r} = -\widetilde{E}_{\perp}^{i} \tag{6.122}$$

ou seja, o componente perpendicular de **E** sofre uma inversão de fase no processo de reflexão. O componente perpendicular do vetor do campo elétrico total no meio 1 será dado pela soma do vetor incidente com o refletido

$$\widetilde{E}_{\perp} = \widetilde{E}_{\perp}^{i} e^{j\tau_i} + \widetilde{E}_{\perp}^{r} e^{j\tau_r} = \widetilde{E}_{\perp}^{i}(e^{j\tau_i} - e^{j\tau_r}).$$

Substituindo as expresões de τ_i e τ_r dadas em (6.86) e (6.90) teremos (com $\theta_i = \theta_r$)

$$\widetilde{E}_{\perp} = \widetilde{E}_{\perp}^{i}\{e^{j[K_1(\mathrm{sen}\theta_i x + \cos\theta_i z) - \omega t]} - e^{j[K_1(\mathrm{sen}\theta_i x - \cos\theta_i z) - \omega t]}\}$$

$$\therefore \widetilde{E}_{\perp} = \widetilde{E}_{\perp}^{i} e^{j(\mathrm{sen}\theta_i x - \omega t)}\left[e^{jK_1\cos\theta_i z} - e^{-jK_1\cos\theta_i z}\right] = 2j\ \mathrm{sen}(K_1\cos\theta_i z)\widetilde{E}_{\perp}^{i} e^{j(K_1\mathrm{sen}\theta_i x - \omega t)}$$

$$\therefore \widetilde{E}_{\perp} = 2j\widetilde{E}_{\perp}^{i}\mathrm{sen}\,(K_{1z}z)\, e^{j(K_{1x}x - \omega t)}$$

$$\begin{aligned} K_{1z} &= K_1\cos\theta_i \\ K_{1x} &= K_1\mathrm{sen}\theta_i. \end{aligned} \tag{6.123}$$

Analisando essa expressão percebemos que, na direção do eixo $0z$ (com $x = cte$) existe a formação de uma onda estacionária com um nó em $z = 0$ e nós subsequentes em

$$z = \frac{n\pi}{K_{1z}}, \qquad n = 1, 2, 3....$$

Observe também que o comprimento de onda ao longo do eixo $0z$ é maior que o da onda incidente pois

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{K_{1z}} = \frac{2\pi}{K_1\cos\theta_i} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_1}\cos\theta_i} = \frac{\lambda_1}{\cos\theta_i}. \tag{6.124}$$

Ao longo de uma reta paralela ao eixo $0x$ (com $z \neq n\pi/K_{1z}$) temos uma onda progressiva com um comprimento de onda

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{K_{1x}} = \frac{\lambda_i}{\mathrm{sen}\theta_i} \tag{6.125}$$

maior que o comprimento de onda incidente. Também, a velocidade de propagação nessa direção será maior e dada por

$$v_x = \frac{\omega}{K_{1x}} = \frac{\omega}{K_1\mathrm{sen}\theta_i} = \frac{v_1}{\mathrm{sen}\theta_i}. \tag{6.126}$$

Em resumo, existe uma configuração de onda estacionária na direção $0z$ e onda progressiva na direção $0x$.

Vejamos agora o que ocorre com o componente paralelo ao plano de incidência do vetor **E**.

Observe que, nessa situação, o componente do vetor **H** associado ao componente de **E** é o componente perpendicular, $\mathbf{H}_\perp$. A aplicação da condição de contorno na interface não é imediata uma vez que a descontinuidade nesse componente (que é o componente tangencial) é igual à densidade de corrente superficial, j_s que deve existir, uma vez que o 2 meio é um condutor perfeito e tais correntes são induzidas pelo campo elétrico da onda. Consideremos novamente a condição de contorno no componente tangencial de **E** e relacionemos o resultado com o vetor **H** via a impedância intrínseca do meio.

Do fato do componente tangencial do vetor **E** ser nulo deveremos ter novamente

$$\widetilde{E}_t^i = -\widetilde{E}_t^r$$

$E_t =$ componente tangencial ou, de acordo com a figura (6.12), $\widetilde{E}_x^i = \widetilde{E}_x^r$ e, pelas equações (6.86) e (6.90),

$$-\widetilde{E}_{||}^i \cos\theta_i e^{j\tau_i} = -\widetilde{E}_{||}^r \cos\theta_r e^{j\tau_r} \qquad \text{com } \theta_r = \theta_i \text{ e } z = 0.$$

$$\therefore \widetilde{E}_{||}^i = \widetilde{E}_{||}^r. \tag{6.127}$$

Consequentemente, os componentes perpendiculares de **H** associados serão tais que

$$\widetilde{H}_\perp^i = \widetilde{H}_\perp^r \qquad (\text{em } z = 0) \tag{6.128}$$

uma vez que

$$\widetilde{H}_\perp = \frac{\widetilde{E}_{||}}{Z}$$

$Z =$ impedância intrinseca do meio 1, mostrando que não há inversão de fase no componente $\widetilde{H}_\perp$.

Escrevamos então

$$\widetilde{H}_\perp^i = \frac{\widetilde{E}_{||}^i}{Z} e^{j\tau_i} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{H}_\perp^r = \frac{\widetilde{E}_{||}^i}{Z} e^{j\tau_r}.$$

O campo total será

$$\widetilde{H}_\perp = \widetilde{H}_\perp^i + \widetilde{H}_\perp^r = \frac{\widetilde{E}_{||}^i}{Z}(e^{j\tau_i} + e^{j\tau_r})$$

$$\therefore \widetilde{H}_\perp = \frac{\widetilde{E}_{||}^i}{Z} e^{j(K_1 \text{sen}\theta_i x - \omega t)} \left[e^{jK_1 \cos\theta_i z} + e^{-jK_1 \cos\theta_i z}\right]$$

$$\therefore \widetilde{H}_\perp = 2\frac{\widetilde{E}_{||}^i}{Z} \cos K_{1z} z e^{j(K_{1x} x - \omega t)} \tag{6.129}$$

$$\begin{aligned} K_{1z} &= K_1 \cos\theta_i \\ K_{1x} &= K_1 \text{sen}\theta_i \end{aligned}$$

com comportamento semelhante ao caso anterior, para o vetor $\widetilde{E}_\perp$, diferindo no fato de que em $z = 0$ temos uma anti-nó da onda estacionária de $\widetilde{H}_\perp$.

Para o vetor $\mathbf{E}_{||}$ podemos analisar os componentes $\mathbf{E}_x$ e $\mathbf{E}_z$ dados pelas equações (6.86) e (6.90)

$$\widetilde{E}_x^i = -\widetilde{E}_{||}\cos\theta_i e^{j\tau_i}, \qquad \widetilde{E}_x^r = \widetilde{E}_{||}^r\cos\theta_r e^{j\tau_r}$$

$$\widetilde{E}_z^i = \widetilde{E}_{||}^i \text{sen}\theta_i e^{j\tau_i}, \qquad \widetilde{E}_z^r = \widetilde{E}_{||}^r \text{sen}\theta_r e^{j\tau_r}, \qquad \text{com } \theta_i = \theta_r.$$

O componente total na direção x vale

$$\widetilde{E}_x = \widetilde{E}_x^i + \widetilde{E}_x^r = \widetilde{E}_{||}^i\cos\theta_i(e^{j\tau_r} - e^{j\tau_i}), \qquad \text{pois } \widetilde{E}_{||}^i = \widetilde{E}_{||}^r$$

$$= \widetilde{E}_{||}^i\cos\theta_i\left\{e^{j[K_1(\text{sen}\theta_r x - \cos\theta_r z) - \omega t]} - e^{j[K_1(\text{sen}\theta_i x + \cos\theta_i z) - \omega t]}\right\}$$

$$= \widetilde{E}_{||}^i\cos\theta_i e^{j(K_1\text{sen}\theta_i x - \omega t)}\left[e^{-jK_1\cos\theta_i z} - e^{jK_1\cos\theta_i z}\right]$$

$$\widetilde{E}_x = \widetilde{E}_{||}^i\cos\theta_i e^{j(K_{1x}x - \omega t)}\left[-2j\ \text{sen}K_{1z}z\right]$$

$$\widetilde{E}_x = -2j\widetilde{E}_{||}^i\cos\theta_i\text{sen}\left(K_{1z}z\right)e^{j(K_{1x}x - \omega t)}. \tag{6.130}$$

O componente total na direção z vale

$$\widetilde{E}_z = \widetilde{E}_z^i + \widetilde{E}_z^r = \widetilde{E}_{||}^i\text{sen}\theta_i(e^{j\tau_i} - e^{j\tau_r}), \qquad \text{pois } \widetilde{E}_{||}^i = \widetilde{E}_{||}^r$$

$$\therefore \widetilde{E}_z = 2\widetilde{E}_{||}^i\text{sen}\theta_i\cos\left(K_{1z}\ z\right)e^{j(K_{1x}\ x - \omega t)}. \tag{6.131}$$

Vemos, portanto, que ambos os componentes, $\widetilde{E}_x$ e $\widetilde{E}_z$ tem a forma de onda estacionária abaixo do plano refletor. Observemos, contudo, que a posição dos nós para o componente $\widetilde{E}_x$ coincide com a posição dos anti-nós para o componente $\widetilde{E}_z$ e vice-versa.

6.9.3 Reflexão na superfície de um condutor sob incidência normal

Como vimos, anteriormente, quando a incidência é normal ($\theta_i = 0$) não existem componentes paralelo nem perpendicular e, nesse caso, é possível calcular, com simplicidade, o que ocorre com a onda refletida e transmitida na interface dielétrico-condutor.

Consideremos que uma onda plana no meio 1, cujas constantes são ε_1 e μ_1, incide perpendicularmente em um meio condutor, meio 2, cujas constantes são ε_2, μ_2 e g_2 (Fig. 6.13). Ambos os meios são infinitos.

Como só existem componentes tangenciais à interface, deveremos ter a continuidade desses componentes

$$\widetilde{E}^i + \widetilde{E}^r = \widetilde{E}^t$$
$$\widetilde{H}^i - \widetilde{H}^r = \widetilde{H}^t.$$

Contudo, podemos relacionar $\widetilde{E}$ e $\widetilde{H}$ através da impedância intrínseca de cada meio.

$$\widetilde{E}^i = \widetilde{Z}_1\widetilde{H}^i, \qquad \widetilde{E}^r = \widetilde{Z}_1\widetilde{H}^r, \qquad \widetilde{E}^t = \widetilde{Z}_2\widetilde{H}^t.$$

Teremos então

$$\widetilde{E}^r - \widetilde{E}^t = -\widetilde{E}^i$$
$$\frac{\widetilde{E}^r}{Z_1} + \frac{\widetilde{E}^t}{Z_2} = \frac{\widetilde{E}^i}{Z_1}.$$

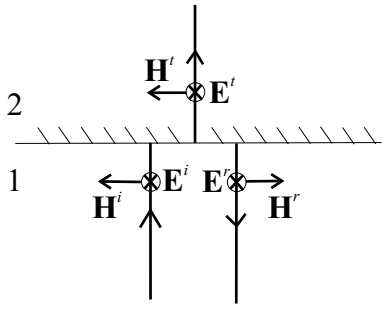


Figura 6.13: Vetores dos campos de uma onda que incide perpendicularmente na fronteira entre dois meios.

Suponhamos que $\widetilde{E}^i$ seja conhecido, resolvendo o sistema encontraremos

$$\widetilde{E}^r = \frac{\widetilde{Z}_2 - \widetilde{Z}_1}{\widetilde{Z}_2 + \widetilde{Z}_1}\widetilde{E}^i \tag{6.132}$$

$$\widetilde{E}^t = \frac{2\widetilde{Z}_2}{\widetilde{Z}_2 + \widetilde{Z}_1}\widetilde{E}^i \tag{6.133}$$

ou, para o vetor $\widetilde{H}$

$$\widetilde{H}^r = \frac{\widetilde{Z}_1 - \widetilde{Z}_2}{\widetilde{Z}_2 + \widetilde{Z}_1}\widetilde{H}^i \tag{6.134}$$

$$\widetilde{H}^t = \frac{2\widetilde{Z}_1}{\widetilde{Z}_2 + \widetilde{Z}_1}\widetilde{H}_i. \tag{6.135}$$

Como exemplo, suponhamos que uma onda eletromagnética no ar incida em uma chapa de cobre suficientemente espessa (espessura muito maior que a profundidade de penetração) de modo que possamos desprezar a reflexão que ocorrerá na outra interface. Consideremos $f = 1$ MHz e os seguintes dados:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \mu_0, \qquad \mu_2 \approx \mu_0 \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{0,} \qquad \varepsilon_2 \approx \varepsilon_0 \\ g_2 &= 5,8 \times 10^7 \text{ mho/m} \end{aligned}$$

teremos então:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\ \Omega$$

e de (6.62)

$$\widetilde{Z}_2 \approx \sqrt{\frac{\mu_0\omega}{g_2}} \lfloor -45^\circ \approx$$

$$0,00037\ \Omega\ \lfloor -45^\circ.$$

Pelas equações (6.132), e (6.134)

$$\frac{\widetilde{E}^r}{\widetilde{E}^i} = \frac{3,7 \times 10^{-4} \lfloor -45^\circ \ - \ 377}{3,7 \times 10^{-4} \lfloor -45^\circ \ + \ 377} \approx -0,999 \lfloor -0,00008^\circ \approx -1$$

$$\frac{\widetilde{H}^r}{\widetilde{H}^i} = -\frac{\widetilde{E}^r}{\widetilde{E}^i} \approx 1.$$

Observe que o resultado é muito próximo do que seria obtido para um condutor perfeito. Para a onda transmitida encontraremos, utilizando (6.133) e (6.135)

$$\frac{\widetilde{E}^t}{\widetilde{E}^i} = 1,96 \times 10^{-6} \lfloor -45^\circ$$

$$\frac{\widetilde{H}^t}{\widetilde{H}^i} \approx 1,999 \lfloor 0,00004^\circ \approx 2.$$

6.10 Polarização na reflexão

Como vimos, no processo de reflexão as amplitudes dos componentes dos vetores dos campos tem seus valores alterados de modo distinto, sendo possível, portanto mudar o estado de polarização da onda.

Na reflexão na interface entre dois dielétricos, o componente paralelo refletido do vetor **E** é dada pela equação (6.110)

$$\widetilde{E}^r_{||} = \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \widetilde{E}^i_{||}.$$

Na situação em que $\theta_i + \theta_t = \pi/2$, ou seja, quando os raios *transmitido* e *refletido* são perpendiculares entre si, o denominador do termo direito da expressão tende ao infinito anulando o componente paralelo refletido. Para que $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ é necessário que o ângulo de incidência seja tal que

$$\text{sen}\theta_t = \text{sen}(\frac{\pi}{2} - \theta_i) = \cos\theta_i$$

mas, pela lei de Snell,

$$\text{sen}\theta_t = \frac{n_1}{n_2}\text{sen}\theta_i$$

$$\therefore \cos\theta_i = \frac{n_1}{n_2}\text{sen}\theta_i, \qquad \therefore \tan\theta_i = \frac{n_2}{n_1}. \tag{6.136}$$

O ângulo θ_i dado pela equação (6.136) é conhecido como ângulo de polarização ou ângulo de Brewster (descoberto em 1815 por David Brewster): "Se a luz incide nesse ângulo, o vetor elétrico da luz refletida não tem componente no plano de incidência". Isso significa que, se por exemplo, uma onda elípticamente polarizada incidir com o ângulo de Brewster, a onda refletida será linearmente polarizada na direção perpendicular ao plano de incidencia.

A título de comparação, o índice de refração da água na região visível do espectro é em torno de 1,3 fazendo com que a interface ar-água possua um ângulo de Brewster em torno de 53°. Contudo, na faixa de radiofreqüências (baixas frequências) o índice é em torno de 9 fazendo com que o ângulo de Brewster esteja em torno de 84°.

O sentido de giro e a razão axial de uma onda elípticamente polarizada também podem mudar no processo de reflexão, uma vez que existem mudanças nos módulos e nas fases dos componentes refletidos.

Por exemplo, considere uma onda elípticamente polarizada com uma razão axial $E^i_{||}/E^i_{\perp} = 1,5$ polarizada à direita incidindo à 45° na interface ar-poliestireno, $n_1/n_2 = 1/1,64$. Pela lei de Snell,

$$\theta_t = \text{arcsen}(\frac{1}{1,64}\text{sen}45°) = 25,5°$$

e por (6.110) e (6.112)

$$\widetilde{E}^r_{||} = \frac{\tan\,(45° - 25,5°)}{\tan\,(45° + 25,5°)}\widetilde{E}^i_{||} = 0,12\widetilde{E}^i_{||}$$

$$\widetilde{E}^r_{\perp} = -\frac{\text{sen}(45° - 25,5°)}{\text{sen}(45° + 25,5°)}\widetilde{E}^i_{\perp} = -0,35\widetilde{E}^i_{\perp}.$$

A razão axial da onda refletida valerá

$$(RA)^r = -\frac{\widetilde{E}^r_{||}}{E^r_{\perp}} = -\frac{0,12}{0,35}1,5 = -0,34 \times 1,5 = -0,53$$

e, como a componente perpendicular refletido tem sinal contrário ao do incidente, o sentido de giro inverte.

Para a onda transmitida teremos por (6.109) e (6.111)

$$\widetilde{E}^t_{||} = \frac{2\text{sen}25,5° \cos 45°}{\text{sen}(45° + 25,5°)\cos(45° - 25,5°)}\widetilde{E}^i_{||} = 0,68\widetilde{E}^i_{||}$$

$$\widetilde{E}^t_{\perp} = \frac{2\,\text{sen}25,5° \cos 45°}{\text{sen}(45° + 25,5°)}\widetilde{E}^i_{\perp} = 0,64\widetilde{E}^i_{\perp}$$

logo

$$(RA)^t = \frac{0,68}{0,64} \times 1,5 = 1,59$$

e a onda transmitida tem o mesmo sentido de giro da onda incidente.

6.11 O vetor de Poynting

Partindo das equações de Maxwell, é possível mostrar que associada a uma onda eletromagnética existe um fluxo de energia relacionado com os vetores dos campos.

Das equações

$$\mathbf{rotE} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{rotH} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

multiplicando escalarmente a primeira por **H**, a segunda por **E** e subtraindo uma da outra temos que

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{rotH} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{rotE} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

O termo da esquerda pode ser escrito como o divergente do produto vetorial entre os vetores **E** e **H**

$$\therefore -div(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

ou

$$-div(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} + \varepsilon\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mu\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\therefore -div(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial}{\partial t}E^2 + \frac{\mu}{2}\frac{\partial}{\partial t}H^2.$$

Integrando em um volume V limitado por uma superfície fechada S teremos

$$-\int_V div(\mathbf{E}\times\mathbf{H})dv = \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\varepsilon}{2}E^2dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\mu}{2}H^2dt.$$

Aplicando o teorema da divergência no termo a esquerda teremos

$$-\int_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\widehat{\mathbf{n}}ds = \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\varepsilon}{2}E^2dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\mu}{2}H^2dv$$

ou

$$-\int_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\widehat{\mathbf{n}}ds = \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}dv + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \left[\frac{\varepsilon}{2}E^2 + \frac{\mu}{2}H^2\right]dv.$$

Analisemos cada integral:

a)

$$\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}dv$$

representa a potência instantânea (calor por unidade de tempo) produzida pelo volume V como pode ser visto se a aplicarmos a um resistor cilíndrico onde **E** seja paralelo à **J** e constante

$$\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}dv = E\int_V Jdv = E\int_C idl = E\ i\ l = \Delta V\ i$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left[\frac{\varepsilon}{2}E^2 + \frac{\mu}{2}H^2\right]dv$$

pode ser interpretada como a taxa de variação da energia acumulada no interior do volume desde que admitamos que $\varepsilon/2\ E^2 + \mu/2\ H^2$ represente a densidade de energia também para campos variáveis no tempo, uma vez que isto já foi demonstrado para campos estáticos.

c) Portanto,

$$-\int_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\widehat{\mathbf{n}}ds$$

é a potência relacionada ao calor gerado por unidade de tempo mais a taxa de variação da energia acumulada.

Pela conservação da energia somos obrigados a concluir que essa expressão representa a taxa com relação ao tempo da energia que atravessa a superfície S em direção ao interior do volume V. Portanto a expressão

$$\int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \widehat{\mathbf{n}} ds$$

será a taxa com relação ao tempo da energia que flui para o exterior através da fronteira.

Define-se o vetor de Poynting, $\mathbf{S}$, como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{6.137}$$

e o interpretamos como um vetor que mede a energia por unidade de tempo por unidade de área (ou seja a intensidade) que atravessa a fronteira. A direção do fluxo da energia é a direção de $\mathbf{S}$.

Existe uma certa arbitrariedade na interpretação do vetor de Poynting uma vez que a integral de $\mathbf{S}$ é que representa a taxa do fluxo da energia. Poderíamos adicionar a $\mathbf{S}$ o rotacional de um outro vetor qualquer e ainda teríamos que

$$\int_V div(\mathbf{E} \times \mathbf{H} + \mathbf{rotF}) dv = \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \widehat{\mathbf{n}} ds + \int_V div\ \mathbf{rotF} dv$$

$$= \int_S \mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{n}} ds + 0, \qquad \text{pois } div\ \mathbf{rotF} = 0.$$

Contudo, a aplicação do vetor de Pognting tem sido realizada cuidadosamente em inúmeros experimentos e nenhuma contradição com os resultados experimentais tem sido encontrada. Esse fato nos leva a crer que a interpretação do vetor de Poyting seja correta.

6.12 Notação complexa e o vetor de Poynting

A definição do vetor de Poynting envolve o produto de dois vetores reais dos campos resultando um outro vetor real.

A utilização da notação complexa para os vetores dos campos não pode ser feita diretamente uma vez que a operação envolvida, produto de duas grandezas reais, é diferente da parte real do produto de duas grandezas complexas. Vejamos como proceder para a onda plana harmônica:

Tinhamos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\{\widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{-j\omega t}\}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathrm{Re}\{\widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) e^{-j\omega t}\}.$$

Contudo, a parte real de um número complexo pode ser escrita como a soma desse número com o seu conjugado, logo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{-j\omega t} + \widetilde{\mathbf{E}}_0^*(\mathbf{r}) e^{j\omega t}\right] \tag{6.138}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r}) e^{-j\omega t} + \widetilde{\mathbf{H}}_0^*(\mathbf{r}) e^{j\omega t}\right]$$

e o vetor de Poynting será dado por

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{\left[\widetilde{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r})e^{-j\omega t} + \widetilde{\mathbf{E}}_0^*(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right]}{2} \times \frac{\left[\widetilde{\mathbf{H}}_0(\mathbf{r})e^{-j\omega t} + \widetilde{\mathbf{H}}_0^*(\mathbf{r})e^{j\omega t}\right]}{2}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4}\left[\widetilde{\mathbf{E}}_0 \times \widetilde{\mathbf{H}}_0 e^{-2j\omega t} + \widetilde{\mathbf{E}}_0 \times \widetilde{\mathbf{H}}_0^* + \widetilde{\mathbf{E}}_0^* \times \widetilde{\mathbf{H}}_0 + \widetilde{\mathbf{E}}_0^* \times \widetilde{\mathbf{H}}_0^* e^{2j\omega t}\right].$$

As observações experimentais envolvem, normalmente, um tempo longo, T', quando comparado com o período, T, da oscilação ($T' >> T$) de modo que os resultados das medidas experimentais refletem uma média no tempo de observação.

$$< \mathbf{S} >= \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} \mathbf{S}(t)dt.$$

Teremos, portanto,

$$< \mathbf{S} >= \frac{\widetilde{\mathbf{E}}_0 \times \widetilde{\mathbf{H}}_0}{4} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} e^{-2j\omega t}dt + \frac{\widetilde{\mathbf{E}}_0 \times \widetilde{\mathbf{H}}_0^*}{4} + \frac{\widetilde{\mathbf{E}}_0^* \times \widetilde{\mathbf{H}}_0}{4}$$

$$+ \frac{\widetilde{\mathbf{E}}_0^* \times \widetilde{\mathbf{H}}_0^*}{4} \frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} e^{2j\omega t}dt.$$

Mas

$$\frac{1}{2T'} \int_{-T'}^{T'} e^{-2j\omega t}dt = \left[\frac{1}{-2j\omega}\frac{1}{2T'}e^{-2j\omega t}\right]_{-T'}^{T'} = \frac{1}{4\pi}\frac{T}{T'}\text{sen}\,(2\omega T')$$

e, como $T' >> T$, teremos que essa integral tende a zero.

Resultado semelhante obteremos para a outra integral.

Portanto,

$$< \mathbf{S} >= \frac{\widetilde{\mathbf{E}}_0 \times \widetilde{\mathbf{H}}_0^*}{4} + \frac{\widetilde{\mathbf{E}}_0^* \times \widetilde{\mathbf{H}}_0}{4} = \frac{1}{2}\text{Re}\{\widetilde{\mathbf{E}}_0 \times \widetilde{\mathbf{H}}_0^*\}.$$

O vetor de Poynting complexo é definido por

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \frac{\widetilde{\mathbf{E}}_0 \times \widetilde{\mathbf{H}}_0^*}{2}. \tag{6.139}$$

Obs: O vetor $\widetilde{\mathbf{S}}$ assim definido é um fasor (não depende do tempo !)

Em uma onda plana elípticamente polarizada propagando ao longo do eixo oz, em um meio cuja impedância característica seja $\widetilde{Z}$, dada por exemplo como:

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{E}_x\widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{E}_y\widehat{\mathbf{y}}$$

com

$$\widetilde{E}_x = \widetilde{E}_{0x}(z)e^{-j\omega t}$$

e

$$\widetilde{E}_y = \widetilde{E}_{0y}(z)e^{-j\omega t}$$

teremos

$$\widetilde{\mathbf{E}}_0 = \widetilde{E}_{0x}\widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{E}_{0y}\widehat{\mathbf{y}}.$$

Também,

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \widetilde{H}_x\widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{H}_y\widehat{\mathbf{y}}$$

e por (6.33) e (6.35)

$$\widetilde{H}_x\widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{H}_y\widehat{\mathbf{y}} = \frac{\widehat{\mathbf{z}} \times (\widetilde{E}_x\widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{E}_y\widehat{\mathbf{y}})}{\widetilde{Z}}$$

onde fizemos $\widehat{\mathbf{z}} = \widehat{\mathbf{K}}$.

Desenvolvendo o produto vetorial fica

$$\widetilde{H}_x\widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{H}_y\widehat{\mathbf{y}} = -\frac{\widetilde{E}_y}{\widetilde{Z}}\widehat{\mathbf{x}} + \frac{\widetilde{E}_x}{\widetilde{Z}}\widehat{\mathbf{y}}, \qquad \therefore \widetilde{\mathbf{H}}_0 = \frac{1}{\widetilde{Z}}(-\widetilde{E}_{0y}\widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{E}_{0x}\widehat{\mathbf{y}}).$$

Teremos da equação (6.139)

$$< \mathbf{S} >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{(\widetilde{E}_{0x}\widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{E}_{0y}\widehat{\mathbf{y}}) \times \left[\frac{(-\widetilde{E}_{0y}\widehat{\mathbf{x}} + \widetilde{E}_{0x}\widehat{\mathbf{y}})}{\widetilde{Z}}\right]^*\right\}$$

$$< \mathbf{S} >= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\widetilde{E}_{0x}\widetilde{E}^*_{0x} + \widetilde{E}_{0y}\widetilde{E}^*_{0y}}{\widetilde{Z}^*}\widehat{\mathbf{z}}\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{E^2_{0x} + E^2_{0y}}{Ze^{-j\phi}}\widehat{\mathbf{z}}\right\}$$

pois $\widetilde{Z} = Ze^{j\phi}$ no caso geral,

$$\therefore < \mathbf{S} >= \frac{1}{2}\frac{E^2_{0x} + E^2_{0y}}{Z}\cos\phi\,\widehat{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}\frac{E^2_0}{Z}\cos\phi\,\widehat{\mathbf{z}}. \tag{6.140}$$

Se o meio for dielétrico perfeito, $\phi = 0$ (impedância real).

Em geral, sempre que o vetor $\mathbf{E}$ for decomposto em dois componentes perpendiculares entre si (E_x e E_y, $E_{||}$ e $E_\perp$,etc.) E_1 e E_2, podemos dizer que

$$< S >= \frac{1}{2}\frac{E^2_{01} + E^2_{02}}{Z}\cos\phi \;= \frac{1}{2}\frac{E^2_0}{Z}\cos\phi \tag{6.141}$$

com $E_0 = \sqrt{E^2_{01} + E^2_{02}}$.

No caso de polarização circular ou linear a 45° onde os dois componentes tem o mesmo módulo, $E_1 = E_2$, podemos dizer que metade da intensidade está associada a um componente e a outra metade está associada ao outro componente.

6.13 Intensidades das ondas na fronteira de dois meios dielétricos

Quando uma onda plana incide na interface entre dois meios dielétricos, segundo um ângulo de incidência θ_i, a energia por unidade de área por unidade tempo (intensidade) que chega a interface S^i_n é dada pela projeção do vetor de Poynting na direção da normal à interface

$$< S^i_n >=< S^i > \cos\theta_i \tag{6.142}$$

$< S_n^i >=$ intensidade incidente normal média.

Para a onda refletida teremos do mesmo modo

$$< S_n^r >=< S^r > \cos\theta_r, \qquad \theta_r = \theta_i \tag{6.143}$$

e para a onda transmitida

$$< S_n^t >=< S^t > \cos\theta_t \tag{6.144}$$

$$=< S^t > \cos\left[\text{arcsen}\frac{n_1}{n_2}\text{sen}\theta_i\right].$$

Da conservação da energia deveremos ter

$$< S_n^i >=< S_n^r > + < S_n^t >$$

ou

$$1 = \frac{< S_n^r >}{< S_n^i >} + \frac{< S_n^t >}{< S_n^i >}.$$

Definimos a refletibilidade $\Re$ e a transmissividade $\Im$ como

$$\Re = \frac{< S_n^r >}{< S_n^i >} \qquad \text{e} \qquad \Im = \frac{< S_n^t >}{< S_n^i >} \tag{6.145}$$

logo

$$\Re + \Im = 1. \tag{6.146}$$

A refletibilidade e a transmissividade dependem da polarização da onda incidente. Ambas podem ser escritas em função da refletibilidade e transmissividade dos componentes paralelos e perpendiculares ao plano de incidência.

Considerando que o vetor $\mathbf{E}_0^i$ forme um ângulo γ com relação ao plano de incidência teremos:

$$E_{0||}^i = E_0^i \cos\gamma \qquad \text{e} \qquad E_{0\perp}^i = E_0^i \text{sen}\gamma$$

e de acordo com (6.141) com $\phi = 0$ e (6.142) teremos (em meios dielétricos com $\mu \approx \mu_0$)

$$< S_n^i >_{||}= \frac{1}{2}\frac{{E_{0||}^i}^2}{Z_1}\cos\theta_i = \frac{1}{2}\frac{(E_0^i\cos\gamma)^2}{Z_1}\cos\theta_i$$

$$\therefore < S_n^i >_{||}=< S_n^i > \cos^2\gamma. \tag{6.147}$$

Também,

$$< S_n^i >_{\perp}= \frac{1}{2}\frac{{E_{0\perp}^i}^2}{Z_1}\cos\theta_i = \frac{1}{2}\frac{(E_0^i\text{sen}\gamma)^2}{Z_1}\cos\theta_i$$

$$\therefore < S_n^i >_{\perp}=< S_n^i > \text{sen}^2\gamma. \tag{6.148}$$

Para a onda refletida, das equações (6.141) com $\phi = 0$ e (6.143) fica

$$< S_n^r >_{||}= \frac{1}{2}\frac{{E_{0||}^r}^2\cos\theta_r}{Z_1}, \qquad \text{com } \theta_r = \theta_i \tag{6.149}$$

e

$$< S_n^r >_{\perp}= \frac{1}{2}\frac{{E_{0\perp}^r}^2\cos\theta_r}{Z_1}. \tag{6.150}$$

A refletibilidade será dada então por

$$\Re = \frac{< S_n^r >}{< S_n^i >} = \frac{< S_n^r >_{||} + < S_n^r >_{\perp}}{< S_n^i >}$$

mas por (6.147) e (6.148)

$$\Re = \frac{< S_n^r >_{||}}{< S_n^i >} + \frac{< S_n^r >_{\perp}}{< S_n^i >} = \frac{< S_n^r >_{||}}{< S_n^i >_{||}} \cos^2\gamma + \frac{< S_n^r >_{\perp}}{< S_n^i >_{\perp}} \mathrm{sen}^2\gamma.$$

Então

$$\Re = \Re_{||} \cos^2\gamma + \Re_{\perp} \mathrm{sen}^2\gamma \tag{6.151}$$

com

$$\Re_{||} = \frac{< S_n^r >_{||}}{< S_n^i >_{||}} = \frac{{E_{0||}^r}^2}{{E_{0||}^i}^2}$$

e

$$\Re_{\perp} = \frac{< S_n^r >\perp}{< S_n^i >\perp} = \frac{{E_{0\perp}^r}^2}{{E_{0\perp}^i}^2}.$$

Em termos das fórmulas de Fresnel

$$\Re_{||} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)} \tag{6.152}$$

$$\Re_{\perp} = \frac{\mathrm{sen}^2(\theta_i - \theta_t)}{\mathrm{sen}^2(\theta_i + \theta_t)}. \tag{6.153}$$

A figura (Fig. 6.14)mostra como as refletibilidades paralela e perpendicular variam com o ângulo de incidência para três valores da razão entre o índice de refração do meio 1 (incidência) e o índice de refração do meio 2 (transmissão).

Do mesmo modo, encontraremos para a transmissividade que

$$\Im = \frac{< S_n^t >}{< S_n^i >} = \Im_{||} \cos^2\gamma + \Im_{\perp} \mathrm{sen}^2\gamma$$

com

$$\Im_{||} = \frac{< S_n^t >_{||}}{< S_n^i >_{||}} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \frac{{E_{0||}^t}^2}{{E_{0||}^i}^2}$$

ou

$$\Im_{||} = \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \frac{{E_{0||}^t}^2}{{E_{0||}^i}^2}$$

e

$$\Im_{\perp} = \frac{< S_n^t >_{\perp}}{< S_n^i >_{\perp}} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \frac{{E_{0\perp}^t}^2}{{E_{0\perp}^i}^2} = \frac{n_2}{n_1} \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} \frac{{E_{0\perp}^t}^2}{{E_{0\perp}^i}^2}.$$

Em termos das fórmulas de Fresnel

$$\Im_{||} = \frac{\mathrm{sen}\,(2\theta_i)\,\mathrm{sen}\,(2\theta_t)}{\mathrm{sen}^2(\theta_i + \theta_t)\cos^2(\theta_i - \theta_t)} \tag{6.154}$$

$$\Im_{\perp} = \frac{\text{sen}\,(2\theta_i)\,\text{sen}\,(2\theta_t)}{\text{sen}^2(\theta_i + \theta_t)}. \tag{6.155}$$

A figura (Fig. 6.15)mostra como as transmissividades paralela e perpendicular variam com o ângulo de incidência para três valores da razão entre o índice de refração do meio 1 (incidência) e o índice de refração do meio 2 (transmissão).

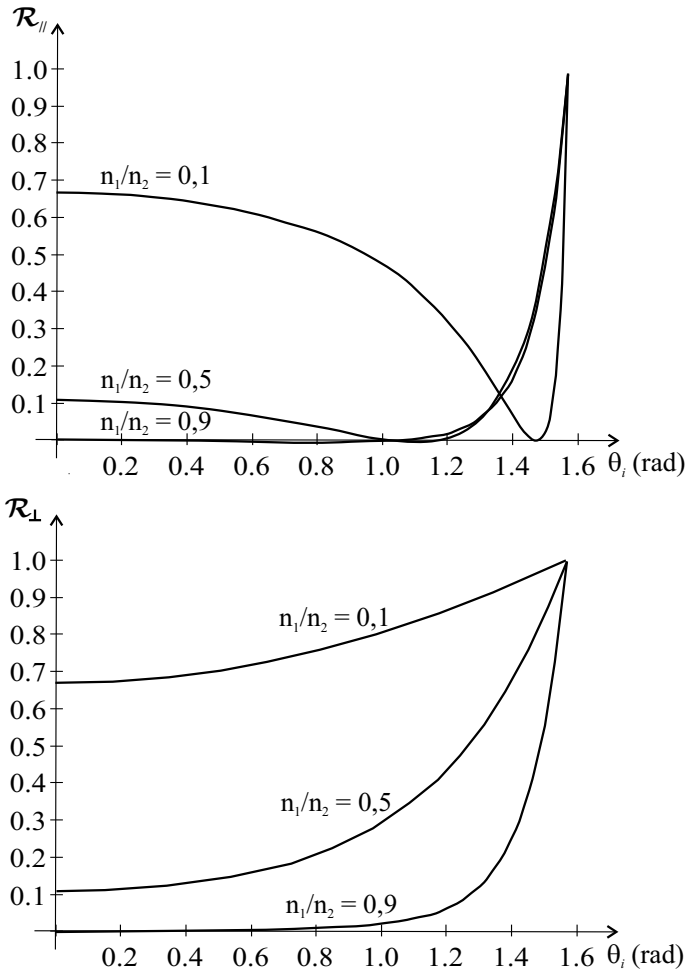


Figura 6.14: Refletibilidades paralela e perpendicular em função do ângulo de incidência.

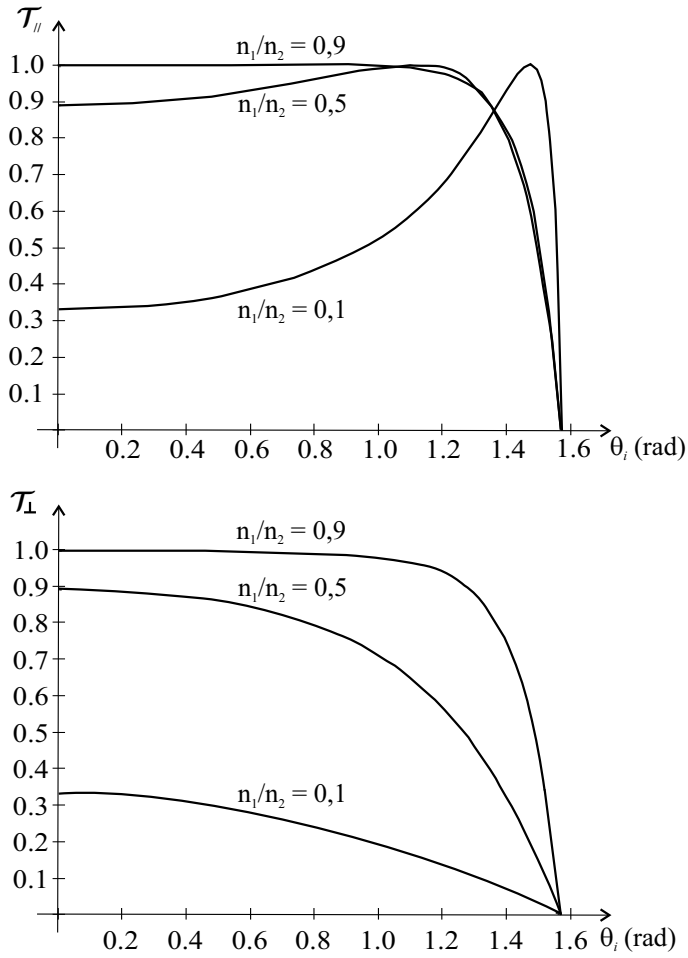


Figura 6.15: Transmissividades paralela e perpendicular em função do ângulo de incidência.

Capítulo 7

Ondas guiadas

Até o presente momento nos limitamos a estudar as ondas eletromagnéticas propagando em meios não limitados, ou, no máximo, verificamos o que ocorria na fronteira plana entre os meios considerando sempre uma onda plana harmônica.

Situações interessantes ocorrem quando, de algum modo, limitamos o meio de propagação de modo a forçar a onda a propagar em determindada direção, ou seja, situações em que a onda é guiada. Vários exemplos podem ser citados e estudaremos alguns deles. A propagação em dutos condutores retangulares ou cílindricos, linhas de fios paralelos e cabos coaxiais são de grande interesse prático quando se pretende enviar uma onda de um ponto a outro.

7.1 Ondas entre planos paralelos condutores

Iniciemos estudando a situação em que dois planos (placas no caso real) paralelos perfeitamente condutores limitam o espaço onde desejamos estudar o campo eletromagnético. Digamos que tais planos sejam paralelos ao plano yz conforme a figura (Fig. 7.1).

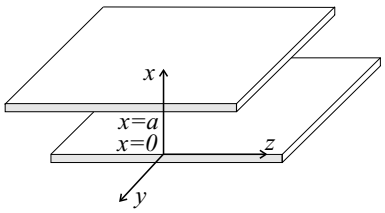


Figura 7.1: Planos (placas no caso real) paralelos condutores.

Os vetores do campo eletromagnético entre os planos devem satisfazer à condição de contorno

$$\mathbf{E}_t = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{H}_n = 0 \tag{7.1}$$

sobre os planos uma vez que os mesmos são condutores perfeitos.

Procuremos um campo eletromagnético com uma forma oscilatoria do tipo $e^{j\omega t}$. As equações de Maxwell tomam a seguinte forma complexa

$$\mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{H}} = (g + j\omega\varepsilon)\widetilde{\mathbf{E}}, \qquad \mathbf{rot}\widetilde{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\widetilde{\mathbf{H}} \tag{7.2}$$

$$div\widetilde{\mathbf{H}} = 0, \qquad div\widetilde{\mathbf{E}} = 0 \tag{7.3}$$

(na ausência de densidades de cargas ρ).

Aplicando a identidade

$$\mathbf{rot\ rot}\mathbf{F} = \mathbf{grad}\ div\mathbf{F} - \nabla^2\mathbf{F}$$

aos vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ chegaremos às duas equações de Helmholtz homogêneas

$$\nabla^2\mathbf{E} = \widetilde{K}^2\mathbf{E} \qquad e \qquad \nabla^2\widetilde{\mathbf{H}} = \widetilde{K}^2\widetilde{\mathbf{H}} \tag{7.4}$$

com

$$\widetilde{K} = \sqrt{(g + j\omega\varepsilon)(j\omega\mu)}.$$

Na região não condutora entre os planos podemos escrever as equações (7.2) e (7.4), em coordenadas cartesianas, como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\widetilde{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial\widetilde{H}_y}{\partial z} &= j\omega\varepsilon\widetilde{E}_x \\ \frac{\partial\widetilde{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial\widetilde{H}_z}{\partial x} &= j\omega\varepsilon\widetilde{E}_y \\ \frac{\partial\widetilde{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial\widetilde{H}_x}{\partial y} &= j\omega\varepsilon\widetilde{E}_z \end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\widetilde{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial\widetilde{E}_y}{\partial z} &= -j\omega\mu\widetilde{H}_x \\ \frac{\partial\widetilde{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial\widetilde{E}_z}{\partial x} &= -j\omega\mu\widetilde{H}_y \\ \frac{\partial\widetilde{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\widetilde{E}_x}{\partial y} &= -j\omega\mu\widetilde{H}_z \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial^2\widetilde{\mathbf{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\widetilde{\mathbf{E}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\widetilde{\mathbf{E}}}{\partial z^2} = -\omega^2\mu\varepsilon\widetilde{\mathbf{E}} \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial^2\widetilde{\mathbf{H}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\widetilde{\mathbf{H}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\widetilde{\mathbf{H}}}{\partial z^2} = -\omega^2\mu\varepsilon\widetilde{\mathbf{H}}. \tag{7.8}$$

Observe na figura (Fig. 7.1) que os eixos oy e oz estão em direções em que não existem limitações nos planos de modo que, se admitirmos uma propagação dos vetores dos campos em uma determinada direção, podemos, sem perda de generalidade, posicionar um dos eixos nessa direção. Digamos que a propagação se dê ao longo do eixo oz. As soluções das equações de Helmholtz podem ser escritas na forma de exponenciais na variável z

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{E}} &= \widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\widetilde{\gamma}z}, \qquad \widetilde{\mathbf{H}} = \widetilde{\mathbf{H}}_0 e^{-\widetilde{\gamma}z} \\ \widetilde{\gamma} &= \alpha + j\beta \text{ a determinar}, \qquad \widetilde{\mathbf{E}}_0 \text{ e } \widetilde{\mathbf{H}}_0 \text{ não dependem de } z. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Nossa hipótese de que a variação dos vetores dos campos propagantes se dê apenas na direção z faz com que devamos considerar tais vetores como constantes na direção y, que é ilimitada. Contudo, a variação na direção x ainda deve ser determinada uma vez que existe limitação nessa variável, ou seja, fronteiras onde devemos aplicar as condições de contorno.

Observando que as derivadas com relação a z são do tipo

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial z} = -\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\widetilde{\gamma}z} = -\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathbf{E}},$$

$$\frac{\partial \widetilde{\mathbf{H}}}{\partial z} = -\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathbf{H}}_0 e^{-\widetilde{\gamma}z} = -\widetilde{\gamma}\widetilde{\mathbf{H}}$$

e que não há dependência com a variável y, as equações (7.5) e (7.6) tomarão a forma

$$\widetilde{\gamma}\widetilde{H}_y = j\omega\varepsilon\widetilde{E}_x \tag{7.10}$$

$$-\widetilde{\gamma}\widetilde{H}_x - \frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon\widetilde{E}_y \tag{7.11}$$

$$\frac{\partial \widetilde{H}_y}{\partial x} = j\omega\varepsilon\widetilde{E}_z \tag{7.12}$$

$$\widetilde{\gamma}\widetilde{E}_y = -j\omega\mu\widetilde{H}_x \tag{7.13}$$

$$-\widetilde{\gamma}\widetilde{E}_x - \frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial x} = -j\omega\mu\widetilde{H}_y \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial \widetilde{E}_y}{\partial x} = -j\omega\mu\widetilde{H}_z. \tag{7.15}$$

As equações (7.7) e (7.8) ficarão

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial x^2} + \widetilde{\gamma}^2\widetilde{\mathbf{E}} = -\omega^2\mu\varepsilon\widetilde{\mathbf{E}} \tag{7.16}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{H}}}{\partial x^2} + \widetilde{\gamma}^2\widetilde{\mathbf{H}} = -\omega^2\mu\varepsilon\widetilde{\mathbf{H}}. \tag{7.17}$$

O conjunto de equações (7.10) a (7.15) é um sistema acoplado que pode ser resolvido simultaneamente. Vejamos, de (7.11) e (7.13)

$$-\widetilde{\gamma}\widetilde{H}_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon\left[\frac{-j\omega\mu}{\widetilde{\gamma}}\widetilde{H}_x\right]$$

$$\widetilde{\gamma}\widetilde{H}_x + \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{\widetilde{\gamma}}\widetilde{H}_x = -\frac{-\partial \widetilde{H}_z}{\partial x} \qquad \therefore \widetilde{H}_x = -\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{\gamma}^2 + \omega^2\varepsilon\mu}\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial x}$$

ou

$$\widetilde{H}_x = -\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial x}, \qquad \widetilde{h}^2 = \widetilde{\gamma}^2 + \omega^2\varepsilon\mu. \tag{7.18}$$

De modo semelhante, teremos de (7.10) e (7.14)

$$\widetilde{H}_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial x} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{E}_x = -\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \tag{7.19}$$

e ainda de (7.11) e (7.13)

$$\widetilde{E}_y = \frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial x}. \tag{7.20}$$

Nas equações (7.18) a (7.20) observamos que as coordenadas dos vetores **E** e **H** nas direções x e y dependem das derivadas das coordenadas na direção z. Mas uma coordenada na direção z, direção de propagação, significa que o campo eletromagnético passa a ter uma componente longitudinal além da componente transversal. Torna-se conveniente, nesse momento, considerarmos separadamente as três possibilidades de existência de onda eletromagnética nessa situação:

1) Onda TE (onda transverso elétrica) - Nesse caso a coordenada $\mathbf{E}_z = 0$, porém a coordenada $\mathbf{H}_z \neq 0$. O vetor **E** é inteiramente transverso.

2) Onda TM (onda transverso magnética) - Nesse caso a coordenada $\mathbf{H}_z = 0$, porém a coordenada $\mathbf{E}_z \neq 0$. O vetor **H** é inteiramente transverso.

3) Onda TEM (onda transverso eletromagnética) - Nesse caso as coordenadas $\mathbf{E}_z = \mathbf{H}_z = 0$. Os vetores **E** e **H** são inteiramente transversos. Essa onda é usualmente chamada de onda principal.

7.1.1 Onda TE

Observando as equações (7.18) a (7.20), podemos concluir do fato de que $E_z = 0$ que $E_x = H_y = 0$ enquanto que, em geral, E_y e H_x não são nulos.

A equação de onda para **E** (7.16) tomará, então, a forma simplificada seguinte:

$$\frac{\partial^2 \widetilde{E}_y}{\partial x^2} + \widetilde{\gamma}^2 \widetilde{E}_y = -\omega^2 \mu\varepsilon \widetilde{E}_y$$

ou

$$\frac{\partial^2 \widetilde{E}_y}{\partial x^2} = -\widetilde{h}^2 \widetilde{E}_y, \qquad \widetilde{h}^2 = \widetilde{\gamma}^2 + \omega^2\mu\varepsilon. \tag{7.21}$$

Como

$$\widetilde{E}_y = \widetilde{E}_{y0} e^{-\widetilde{\gamma} z}$$

temos

$$\frac{\partial^2 \widetilde{E}_{y0}}{\partial x^2} = -\widetilde{h}^2 \widetilde{E}_{y0}$$

cuja solução pode ser escrita como uma combinação linear de senos e cossenos (ou de exponênciais complexas)

$$\widetilde{E}_{y0} = C_1 \mathrm{sen}(\widetilde{h}x) + C_2 \cos(\widetilde{h}x), \qquad C_1 \text{ e } C_2 \text{ constantes.}$$

Da condição de contorno $E_t = 0$ em $x = 0$ e em $x = a$ temos

$$0 = C_1 \mathrm{sen}(\widetilde{h}0) + C_2 \cos(\widetilde{h}0), \qquad \therefore C_2 = 0$$
$$\text{e} \qquad 0 = C_1 \mathrm{sen}(\widetilde{h}a) + C_2 \cos(\widetilde{h}a)$$

$$\therefore\ \mathrm{sen}(\widetilde{h}a) = 0, \qquad \therefore \widetilde{h} = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 1, 2, 3... \ . \tag{7.22}$$

Logo $\widetilde{h}$ é um número real (e m não pode ser zero pois teríamos $\widetilde{E}_{y0} = 0$ para qualquer valor de x).

Então

$$\widetilde{E}_y = C_1 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-\widetilde{\gamma}z} \tag{7.23}$$

e pelas equações (7.13) e (7.15) temos também

$$\widetilde{H}_x = -\frac{\widetilde{\gamma}}{j\omega\mu} C_1 \text{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-\widetilde{\gamma}z} \tag{7.24}$$

$$\widetilde{H}_z = -\frac{m\pi}{j\omega\mu a} C_1 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-\widetilde{\gamma}z}. \tag{7.25}$$

Para cada valor de m teremos um modo de oscilação e a nomenclatura para esse tipo de onda e modo é TE_{m0}. Posteriormente veremos a razão do índice zero.

Os valores da constante de propagação $\widetilde{\gamma}$ podem ser obtidos pelas equações (7.21) e (7.22)

$$\widetilde{\gamma} = \sqrt{\widetilde{h}^2 - \omega^2\mu\varepsilon} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon}, \qquad m = 1, 2, 3\ldots. \tag{7.26}$$

A depender do valor da frequência angular ω e dos valores de m a constante de propagação pode ser real ou imaginária.

Para frequências suficientemente altas tais que

$$\omega^2\mu\varepsilon > \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2,$$

a constante de propagação será imaginária pura

$$\widetilde{\gamma} = j\beta = j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} \tag{7.27}$$

e a onda propagará ao longo do eixo oz, sem atenuação, com uma velocidade de fase

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} \tag{7.28}$$

e um comprimento de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}}. \tag{7.29}$$

Pela expressão (7.28) vemos que a velocidade depende da frequência, ou seja, o sistema é dispersivo.

Diminuindo a frequência angular, chegará ao ponto em que

$$\omega^2\mu\varepsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2,$$

nesse caso, a frequência é chamada de frequência angular crítica ou frequência angular de corte e vale

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{m\pi}{a}, \qquad \therefore f_c = \frac{m}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{7.30}$$

Nessa frequência não há propagação ao longo de oz e para frequências inferiores a esse valor, a constante de propagação será real

$$\widetilde{\gamma} = \alpha = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon}. \tag{7.31}$$

Obteremos, portanto, uma atenuação ao longo do eixo oz não havendo propagação.

Vale a pena observar em (7.28) que, a medida que a frequência cresce com relação à frequência de corte, a velocidade vai diminuindo até atingir o valor limite

$$\lim_{\omega\to\infty} v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \tag{7.32}$$

Exemplo:

Consideremos o modo TE_{10} ($m = 1$) e frequência suficientemente alta para termos campo oscilatório ao longo do eixo oz.

$$f > f_c = \frac{1}{2a\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad \widetilde{\gamma} = j\beta = j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}.$$

Por (7.23) a (7.25) teremos

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_y &= C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ \widetilde{H}_x &= -\frac{\beta}{\omega\mu} C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z} \\ \widetilde{H}_z &= -\frac{\pi}{j\omega\mu a} C_1 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}. \end{aligned} \tag{7.33}$$

Introduzido a parte temporal e tomando a parte real teremos

$$\begin{aligned} E_y &= C_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z) \\ H_x &= -C_1 \frac{\beta}{\omega\mu} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \\ H_z &= C_1 \frac{\pi}{\omega\mu a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\omega t - \beta z + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -C_1 \frac{\pi}{\omega\mu a} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}(\omega t - \beta z). \end{aligned} \tag{7.34}$$

As linhas de campo tem o aspecto mostrado na figura (Fig. 7.2). O lado esquerdo da figura mostra as linhas do campo eletromagnético em um determinado instante de tempo. Observe o enfraquecimento do campo elétrico à medida que se aproxima dos planos condutores. O campo elétrico máximo ocorre na região central entre os dois planos para um determinado valor de z.

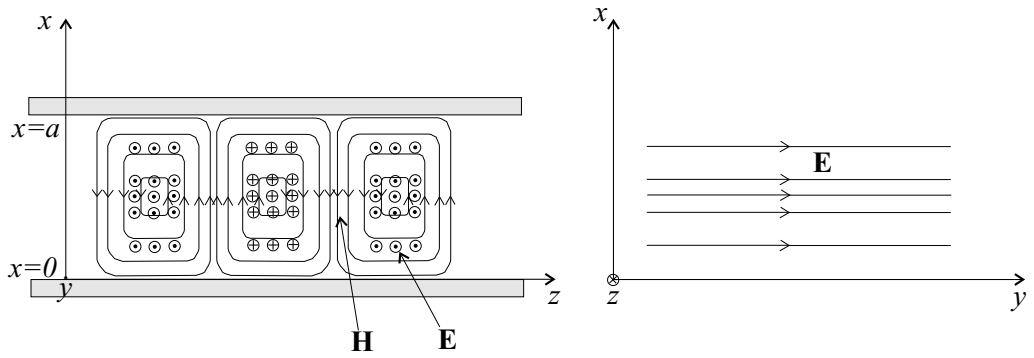


Figura 7.2: Linhas do campo eletromagnético para um tempo fixo no modo TE_{10} entre planos paralelos condutores e detalhe do campo elétrico

7.1.2 Onda TM

Como nessa onda $H_z = 0$, pelas equações (7.18) a (7.20) podemos concluir imediatamente que $H_x = E_y = 0$ enquanto que, de maneira geral, E_z, E_x e H_y serão diferentes de zero.

Procedendo de maneira análoga à onda TE, resolveremos a equação de onda para H_y, equação (7.17) e encontraremos

$$\widetilde{H}_y = [C_3 \text{sen}(\widetilde{h}x) + C_4 \cos(\widetilde{h}x)]e^{-\widetilde{\gamma}z}.$$

Sendo H_y um componente tangencial, não podemos aplicar diretamente a condição de contorno, que é facilmente aplicável na componente normal. Contudo, pela equação (7.12) podemos encontrar $\widetilde{E}_z$ em função de $\widetilde{H}_y$ e aplicar a condição de contorno em $\widetilde{E}_z$ que é um componente tangencial. Como

$$\widetilde{E}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial \widetilde{H}_y}{\partial x}$$

temos,

$$\widetilde{E}_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon}[C_3\widetilde{h}\cos(\widetilde{h}x) - C_4\widetilde{h}\text{ sen }(\widetilde{h}x)]e^{-\widetilde{\gamma}z}.$$

Em $x = 0$ devemos ter $\widetilde{E}_z = 0$, logo $C_3 = 0$. Além disso, em $x = a$ também devemos ter $E_z = 0$

$$0 = \frac{1}{j\omega\varepsilon}C_4\widetilde{h}\text{ sen }(\widetilde{h}a)$$

$$\therefore \widetilde{h}a = m\pi \qquad \text{ou} \qquad \widetilde{h} = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 0, 1, 2, 3\ldots. \tag{7.35}$$

Observe que, nesse caso particular, podemos ter $m = 0$!

Sendo assim, teremos:

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_z &= -\frac{m\pi}{a}\frac{C_4}{j\omega\varepsilon}\text{ sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-\widetilde{\gamma}z} \\ \widetilde{H}_y &= C_4\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)e^{-\widetilde{\gamma}z} \end{aligned} \tag{7.36}$$

e por (7.10)

$$\widetilde{E}_x = \frac{\widetilde{\gamma}}{j\omega\varepsilon} C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) e^{-\widetilde{\gamma}z} \tag{7.37}$$

com $\widetilde{\gamma}$ dado por (7.13) com $m = 0, 1, 2 \ldots$.

Em uma análise superficial pode parecer que, ao fazer $m = 0$ e, consequentemente, $\widetilde{E}_z = 0$ juntamente com $\widetilde{H}_z = 0$, estaríamos em uma situação conflitante pois, nesse caso, as equações (7.18) a (7.20) preveem que os outros componentes do campo seriam nulos! Contudo, essas equações resultam das equações (7.10) a (7.15) na hipótese que $\widetilde{E}_z$ e $\widetilde{H}_z$ não sejam nulas simultaneamente e fazer $\widetilde{E}_z = \widetilde{H}_z = 0$ nessas equações não leva a nenhuma contradição.

Como exemplo de onda TM tomemos o modo TM_{10} e, por (7.36) e (7.37), considerando a parte real das equações para o modo oscilatório fica

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{m\pi}{a}\frac{C_4}{\omega\varepsilon} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\,(\omega t - \beta z) \\ H_y &= C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z) \\ E_x &= \frac{\beta}{\omega\varepsilon} C_4 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos(\omega t - \beta z)\,. \end{aligned} \tag{7.38}$$

O aspecto das linhas de campo pode ser visto na figura (Fig. 7.3).

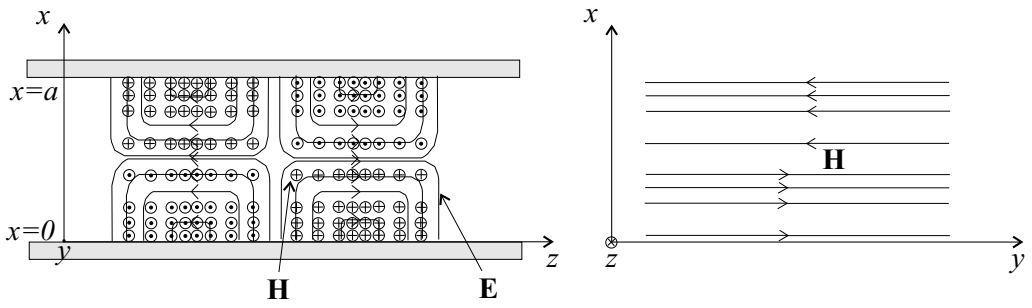


Figura 7.3: Linhas do campo eletromagnético para um tempo fixo no modo TM_{10} entre planos paralelos condutores e detalhe do campo Magnético

7.1.3 Onda TEM

Nas equações (7.38), para $m = 0$, verificamos imediatamente que $\widetilde{E}_z = 0$ e que $\widetilde{H}_y$ e $\widetilde{E}_x$ não dependem de x! O fato de $\widetilde{E}_z$ ser nulo, além de $\widetilde{H}_z$, torna essa onda TM, em particular, uma onda TEM. Para essa onda, a constante de propagação dada por (7.26) é imaginária pura para todas as frequências e a onda propaga com uma velocidade

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

idêntica a onda plana no dielétrico ilimitado como mostra a equação (7.28).

Para essa onda, considerando ε e μ como constantes, a velocidade não depende da frequência como dependem os outros modos da onda TM.

Qualquer dependência com a frequência só poderá estar embutida em ε e μ.

A relação entre os módulos dos vetores dos campos dados por (7.10), nesse caso, vale

$$\left|\frac{\widetilde{E}_x}{\widetilde{H}_y}\right| = \frac{\beta}{\omega\varepsilon} = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{7.39}$$

que é a impedância intrínseca do espaço livre.

A figura (Fig. 7.4) mostra a configuração dos vetores dos campos.

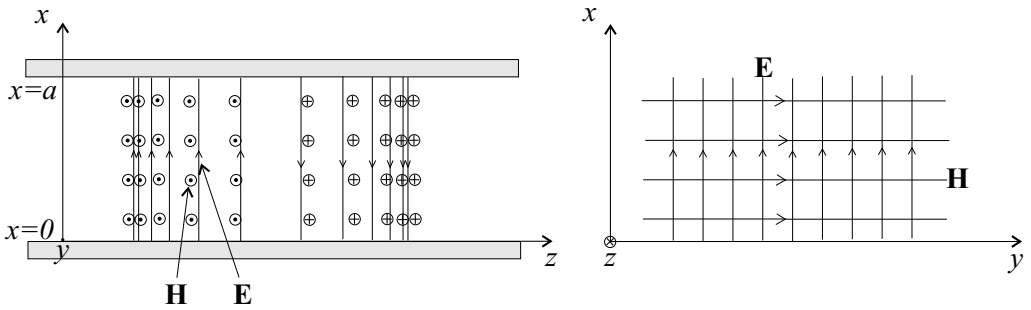


Figura 7.4: Linhas do campo eletromagnético para um tempo fixo no modo TEM entre planos paralelos condutores e detalhe dos campos elétrico e magnético.

7.1.4 Velocidade de propagação

Para as ondas TE e TM, nas frequências suficientemente altas para que não exista atenuação, vimos que a velocidade de fase e o comprimento de onda eram dados por (7.28) e (7.29).

Considerando, por exemplo, que o meio entre as placas é o vácuo, verificamos que a velocidade de fase é superior ao valor da velocidade no espaço vazio, c. Tal velocidade é medida ao longo do eixo z e corresponde às variações da fase da onda no tempo nessa direção. Essa medida pode ser feita a partir da medida do comprimento de onda ao longo do eixo oz onde verificamos que o comprimento de onda é maior que no espaço vazio e tanto maior quanto menor for a frequência angular (porém maior que a frequência crítica). Tal velocidade não é a velocidade com que uma informação pode propagar, a velocidade de grupo, que está limitada a um valor máximo e igual à c. A velocidade de grupo é dada por

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{d\beta/d\omega} \tag{7.40}$$

$$v_g = \frac{1}{\frac{d}{d\omega}\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu} - \left(\frac{m\pi}{a\varepsilon\mu\omega}\right)^2}. \tag{7.41}$$

No vácuo,

$$v_g = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} - \left(\frac{m\pi}{a\varepsilon_0\mu_0\omega}\right)^2} \tag{7.42}$$

cujo valor máximo é

$$c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}, \qquad \text{para } \omega \to \infty$$

e cujo valor mínimo, que ocorre na frequência de corte onde $\varepsilon_0\mu_0\omega^2 = (\frac{m\pi}{a})^2$, vale zero.

O produto da velocidade de grupo pela velocidade de fase

$$vv_g = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - (\frac{m\pi}{a})^2}} \frac{\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - (\frac{m\pi}{a})^2}}{\varepsilon\mu\omega} = \frac{1}{\varepsilon\mu} \tag{7.43}$$

que é a velocidade de fase no espaço livre ao quadrado.

No vácuo,

$$v_0 v_{g0} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0} = c^2. \tag{7.44}$$

7.2 Ondas em guias de ondas

A situação analisada no item 7.1, envolvendo dois planos condutores ou duas fronteiras serviu para introduzir a idéia de como é possível guiar uma onda. Contudo, os sistemas que possuem utilidade não podem ser construídos por planos (que possuem extensão infinita). Devem existir, também, limitações nas laterais de forma a limitar os campos na outra dimensão. Usualmente utilizam-se dutos de secção retangular ou circular sendo que outras formas geométricas também são possíveis.

Em todos os casos, assumindo que as paredes dos dutos ou guias são feitos de material condutor perfeito (ou quase perfeitos) deveremos solucionar as equações de Maxwell sujeitando-as às condições de contorno nas paredes, $E_t = H_n = 0$.

7.2.1 Guia de ondas de seção retangular

Consideremos um guia de seção retangular de lados a e b e comprimento infinito conforme mostra a figura:

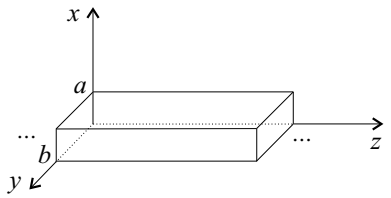


Figura 7.5: Guia de ondas retangular

Assumindo, novamente, que as variações dos vetores dos campos na direção z seja da forma $e^{-\widetilde{\gamma}z}$, as equações de Maxwell dadas por (7.5) a (7.8) tomarão a forma:

$$\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial y} + \widetilde{\gamma}\widetilde{H}_y = j\omega\varepsilon\widetilde{E}_x \tag{7.45}$$

$$\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial x} + \widetilde{\gamma}\widetilde{H}_x = -j\omega\varepsilon\widetilde{E}_y \tag{7.46}$$

$$\frac{\partial \widetilde{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{H}_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon\widetilde{E}_z \tag{7.47}$$

$$\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial y} + \widetilde{\gamma}\widetilde{E}_y = -j\omega\mu\widetilde{H}_x \tag{7.48}$$

$$\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial x} + \widetilde{\gamma}\widetilde{E}_x = j\omega\mu\widetilde{H}_y \tag{7.49}$$

$$\frac{\partial \widetilde{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \widetilde{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu\widetilde{H}_z \tag{7.50}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{E}}}{\partial y^2} + \widetilde{\gamma}^2\widetilde{\mathbf{E}} = -\omega^2\mu\varepsilon\widetilde{E} \tag{7.51}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{H}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{\mathbf{H}}}{\partial y^2} + \widetilde{\gamma}^2\widetilde{\mathbf{H}} = -\omega^2\mu\varepsilon\widetilde{H}. \tag{7.52}$$

Das equações (7.46) e (7.48) teremos

$$\widetilde{H}_x = -\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial x} + j\frac{\omega\varepsilon}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial y} \tag{7.53}$$

$$\widetilde{E}_y = -\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial y} + \frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial x} \tag{7.54}$$

e de (7.45) e (7.49)

$$\widetilde{H}_y = -\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial y} - \frac{j\omega\varepsilon}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial x} \tag{7.55}$$

$$\widetilde{E}_x = -\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial x} - \frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial y} \tag{7.56}$$

com

$$\widetilde{h}^2 = \widetilde{\gamma}^2 + \omega^2\varepsilon\mu. \tag{7.57}$$

As condições de contorno para esse guia podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} E_x = E_z = 0 \qquad & \text{em } y = 0 \text{ e } y = b \\ E_y = E_z = 0 \qquad & \text{em } x = 0 \text{ e } x = a. \end{aligned}$$

Onda TM

Analisemos para a onda TM ($\widetilde{H}_z = 0$):

Observando as equações (7.53) e (7.55), vemos que as coordenadas do vetor $\widetilde{H}$ do campo são dados em função das derivadas de $\widetilde{E}_z$. Determinemos, portanto, $\widetilde{E}_z$ a partir da equação (7.51). Deveremos ter satisfeita a seguinte equação para $\widetilde{E}_z$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{E}_z}{\partial y^2} + \widetilde{\gamma}^2 \widetilde{E}_z = -\omega^2 \mu\varepsilon \widetilde{E}_z \tag{7.58}$$

Essa equação pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis supondo uma solução do tipo

$$\widetilde{E}_z(x, y, z) = \widetilde{E}_{z0}(x, y) e^{-\widetilde{\gamma} z} \tag{7.59}$$

onde

$$\widetilde{E}_{z0}(x, y) = \widetilde{X}(x)\widetilde{Y}(y). \tag{7.60}$$

Substitundo em (7.58) obteremos

$$\widetilde{Y}\frac{d^2\widetilde{X}}{dx^2} + \widetilde{X}\frac{d^2\widetilde{Y}}{dy^2} + \widetilde{\gamma}^2 \widetilde{X}\widetilde{Y} = -\omega^2 \mu\varepsilon \widetilde{X}\widetilde{Y}$$

fazendo $\widetilde{h}^2 = \widetilde{\gamma}^2 + \omega^2 \mu\varepsilon$ e dividindo por $\widetilde{X}\widetilde{Y}$ teremos:

$$\frac{1}{\widetilde{X}}\frac{d^2\widetilde{X}}{dx^2} + \widetilde{h}^2 = -\frac{1}{\widetilde{Y}}\frac{d^2\widetilde{Y}}{dy^2}.$$

O termo da esquerda é uma função só de x e o termo da direita é uma função só de y logo,

$$\frac{1}{\widetilde{X}}\frac{d^2\widetilde{X}}{dx^2} + \widetilde{h}^2 = \widetilde{A}^2$$

e

$$\frac{1}{\widetilde{Y}}\frac{d^2\widetilde{Y}}{dY^2} = -\widetilde{A}^2, \qquad \widetilde{A}^2 = \text{constante de separação}, \tag{7.61}$$

cujas soluções são, respectivamente,

$$\widetilde{X} = C_1 \cos(\widetilde{B}x) + C_2 \operatorname{sen}(\widetilde{B}x), \qquad \widetilde{B}^2 = \widetilde{h}^2 - \widetilde{A}^2 \tag{7.62}$$

$$\widetilde{Y} = C_3 \cos(\widetilde{A}y) + C_4 \operatorname{sen}(\widetilde{A}y). \tag{7.63}$$

Logo,

$$\widetilde{E}_{z0} = C_1C_3 \cos(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y) + C_1C_4 \cos(\widetilde{B}x) \operatorname{sen}(\widetilde{A}y) +$$
$$C_2C_3 \operatorname{sen}(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y) + C_2C_4 \operatorname{sen}(\widetilde{B}x) \operatorname{sen}(\widetilde{A}y).$$

Apliquemos a condição de contorno $\widetilde{E}_{z0} = 0$ em $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = b$.

Temos em $x = 0$,

$$0 = C_1C_3 \cos(\widetilde{A}y) + C_1C_4 \operatorname{sen}(\widetilde{A}y), \qquad \forall\, y$$

$$\therefore C_1 = 0.$$

Então,

$$\widetilde{E}_{z0} = C_2C_3 \operatorname{sen}(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y) + C_2C_4 \operatorname{sen}(\widetilde{B}x)\operatorname{sen}(\widetilde{A}y).$$

Em $y = 0$ temos

$$0 = C_2C_3 \operatorname{sen}(\widetilde{B}x), \qquad \forall\, x \text{ com } \widetilde{B} \neq 0.$$

Logo, $C_3 = 0$ pois, se $C_2 = 0$, teríamos $\widetilde{E}_{z0}$ identicamente nulo.
Sendo assim,

$$\widetilde{E}_{z0} = C_2C_4 \operatorname{sen}(\widetilde{B}x)\operatorname{sen}(\widetilde{A}y)$$

ou

$$\widetilde{E}_{z0} = C \operatorname{sen}(\widetilde{B}x)\operatorname{sen}(\widetilde{A}y). \tag{7.64}$$

Mas, ainda temos que determinar $\widetilde{B}$ e $\widetilde{A}$ a partir das condições de contorno restantes em $x = a$ e $y = b$.
Em $x = a$

$$0 = C \operatorname{sen}(\widetilde{B}a)\operatorname{sen}(\widetilde{A}y), \qquad \forall\, y.$$

Logo,

$$\widetilde{B}a = m\pi \qquad \therefore \widetilde{B} = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 1, 2, 3\ldots.$$

Em $y = b$

$$0 = C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}(\widetilde{A}y), \qquad \forall x.$$

Logo

$$\widetilde{A}y = n\pi \qquad \therefore \widetilde{A} = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1, 2, 3\ldots.$$

Portanto,

$$\widetilde{E}_{z0} = C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \tag{7.65}$$

Pela equação (7.62) temos

$$\widetilde{h}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \qquad \text{(que é real)} \tag{7.66}$$

e por (7.57)

$$\widetilde{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2\varepsilon\mu} \tag{7.67}$$

onde vemos, novamente, que $\widetilde{\gamma}$ pode ser real ou imaginário puro a depender da frequência e dos valores de m e n. Considerando frequências suficientemente altas para que $\widetilde{\gamma}$ seja imaginário (modo oscilante) fica

$$\widetilde{\gamma} = j\beta = j\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]} \tag{7.68}$$

e

$$\widetilde{E}_z = C \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right)e^{-j\beta z}.$$

Teremos para as outras coordenadas do campo dadas por (7.53) a (7.56)

$$\widetilde{E}_x = \frac{-j\beta}{\widetilde{h}^2} C \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z} \tag{7.69}$$

$$\widetilde{E}_y = \frac{-j\beta}{\widetilde{h}^2} C \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

$$\widetilde{H}_x = \frac{j\omega\varepsilon}{\widetilde{h}^2} C \frac{n\pi}{b} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}$$

$$\widetilde{H}_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{\widetilde{h}^2} C \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-j\beta z}.$$

Observermos, agora, que a frequência angular crítica está dada por

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \tag{7.70}$$

ou

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \tag{7.71}$$

A velocidade de propagação e o comprimento de onda valem

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - (\frac{m\pi}{a})^2 - (\frac{n\pi}{b})^2}} \tag{7.72}$$

e

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - (\frac{m\pi}{a})^2 - (\frac{n\pi}{b})^2}}. \tag{7.73}$$

Correspondente à frequência crítica ou frequência de corte existe o comprimento de onda crítico ou comprimento de onda de corte definido pela relação

$$v_0 = f_c\lambda_c, \qquad v_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\lambda_c = \frac{2}{\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}}. \tag{7.74}$$

Esse comprimento de onda crítico é o comprimento de onda de uma onda no espaço livre, com uma frequência igual à frequência crítica.

Onda TE

Considerando que $E_z = 0$ nessa onda e procedendo de maneira analoga à onda TM, deveremos resolver a equação de onda para $\widetilde{H}_z$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{H}_z}{dx^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{H}_z}{\partial y^2} + \widetilde{\gamma}^2 \widetilde{H}_z = -\omega^2\varepsilon\mu\widetilde{H}_z. \tag{7.75}$$

Supondo uma solução do tipo

$$\widetilde{H}_z = \widetilde{H}_{z0}(x,y)e^{-\widetilde{\gamma}z}, \qquad \widetilde{H}_{z0} = \widetilde{X}(x)\widetilde{Y}(y) \tag{7.76}$$

encontraremos que

$$\widetilde{H}_{z0} = C_1C_3\cos(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y) + C_1C_4\cos(\widetilde{B}x)\text{sen}(\widetilde{A}y) +$$

$$C_2C_3\text{sen}(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y) + C_2C_4\text{sen}(\widetilde{B}x)\text{sen}(\widetilde{A}y).$$

Como não podemos aplicar a condição de contorno diretamente em $\widetilde{H}_{z0}$, pois é um componente tangencial e não um componente normal, deveremos primeiro encontrar $\widetilde{E}_{x0}$, $\widetilde{E}_{y0}$, $\widetilde{H}_{x0}$ e $\widetilde{H}_{y0}$ utilizando as equações (7.53) a (7.56) e então aplicar as condições de contorno em $\widetilde{E}_{x0}$ e $\widetilde{E}_{y0}$ para determinar os valores das constantes.

Teremos então

$$\widetilde{E}_{x0} = -\frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial\widetilde{H}_{z0}}{\partial y} = -\frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}\Big[-C_1C_3\widetilde{A}\cos(\widetilde{B}x)\text{sen}(\widetilde{A}y) + C_1C_4\widetilde{A}\cos(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y) -$$
$$\text{sen}(\widetilde{B}x)C_2C_3\widetilde{A}\text{sen}(\widetilde{A}y) + C_2C_4\widetilde{A}\text{sen}(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y)\Big]$$

e

$$\widetilde{E}_{y0} = \frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial\widetilde{H}_{z0}}{\partial x} = \frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}\Big[-C_1C_3\widetilde{B}\text{sen}(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y) - C_1C_4\widetilde{B}\text{sen}(\widetilde{B}x)\text{sen}(\widetilde{A}y) +$$
$$C_2C_3\widetilde{B}\cos(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y) + C_2C_4\widetilde{B}\cos(\widetilde{B}x)\text{sen}(\widetilde{A}y)\Big].$$

Devemos ter

$$\begin{aligned} E_x &= 0 \qquad \text{em } y = 0 \text{ e em } y = b \\ E_y &= 0 \qquad \text{em } x = 0 \text{ e em } x = a. \end{aligned}$$

De $y = 0$:

$$0 = C_1C_4\widetilde{A}\cos(\widetilde{B}x) + C_2C_4\widetilde{A}\ \text{sen}(\widetilde{B}x), \qquad \forall\, x$$

logo, $C_4 = 0$.

De $x = 0$:

$$0 = C_2C_3\widetilde{B}\cos(\widetilde{A}y) + C_2C_4\widetilde{B}\ \text{sen}(\widetilde{A}y), \qquad \forall\, y$$

logo, $C_2 = 0$.

Sendo assim,

$$\widetilde{E}_{x0} = \frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}\Big[C_1C_3\widetilde{A}\cos(\widetilde{B}x)\text{sen}(\widetilde{A}y)\Big]$$

e

$$\widetilde{E}_{y0} = \frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}\Big[-C_1C_3\widetilde{B}\ \text{sen}(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y)\Big].$$

De $y = b$:

$$0 = C_1C_3\widetilde{A}\cos(\widetilde{B}x)\text{sen}(\widetilde{A}b) \qquad \therefore\ \widetilde{A}b = n\pi$$

$$\therefore\ \widetilde{A} = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 0, 1, 2, 3\ldots.$$

De $x = a$:

$$0 = C_1C_3\widetilde{B}\ \text{sen}(\widetilde{B}a)\cos(\widetilde{A}y) \qquad \therefore\ \widetilde{B}a = m\pi$$

$$\therefore \widetilde{B} = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 0, 1, 2, 3\ldots.$$

Ficamos, então, com

$$\widetilde{E}_{x0} = C\frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}\widetilde{A}\cos(\widetilde{B}x)\text{sen}(\widetilde{A}y) \tag{7.77}$$
$$\widetilde{E}_{y0} = -C\frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}\widetilde{B}\ \text{sen}(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y).$$

Observe que m e n não podem ser nulos ao mesmo tempo pois não teríamos campo algum.

Ainda utilizando as equações (7.53) e (7.55) e as constantes já determinadas teremos para as coordenadas do vetor H:

$$\widetilde{H}_{x0} = -\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial\widetilde{H}_{z0}}{\partial x} = \frac{\widetilde{\gamma}C}{\widetilde{h}^2}\widetilde{B}\ \text{sen}(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y) \tag{7.78}$$
$$\widetilde{H}_{y0} = -\frac{\widetilde{\gamma}}{\widetilde{h}^2}\frac{\partial\widetilde{H}_{z0}}{\partial y} = \frac{\widetilde{\gamma}C}{\widetilde{h}^2}\widetilde{A}\cos(\widetilde{B}x)\text{sen}(\widetilde{A}y).$$

Finalmente, de (7.76)

$$\widetilde{H}_{z0} = C\cos(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y).$$

Assumindo que a frequência é superior à frequência crítica (modo oscilatório) $\widetilde{\gamma} = j\beta$, teremos:

$$\widetilde{H}_z = C\cos(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y)e^{-j\beta z} \tag{7.79}$$
$$\widetilde{H}_y = \frac{j\beta}{\widetilde{h}^2}C\widetilde{A}\cos(\widetilde{B}x)\ \text{sen}(\widetilde{A}y)e^{-j\beta z} \tag{7.80}$$
$$\widetilde{H}_x = \frac{j\beta}{\widetilde{h}^2}C\widetilde{B}\ \text{sen}(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y)e^{-j\beta z} \tag{7.81}$$
$$\widetilde{E}_y = -\frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}C\widetilde{B}\ \text{sen}(\widetilde{B}x)\cos(\widetilde{A}y)e^{-j\beta z} \tag{7.82}$$
$$\widetilde{E}_x = \frac{j\omega\mu}{\widetilde{h}^2}C\widetilde{A}\cos(\widetilde{B}x)\ \text{sen}(\widetilde{A}y)e^{-j\beta z} \tag{7.83}$$

com

$$\widetilde{A} = \frac{n\pi}{b}, \qquad \widetilde{B} = \frac{m\pi}{a}, \qquad n, m = 0, 1, 2, 3\ldots$$
$$\beta = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$
$$\widetilde{h}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

Como, para essa onda, é possível ter m e n nulos, porém, não simultaneamente, teremos para a onda TE modos mais baixos que para a onda TM. Usualmente, a maior dimensão da seção do guia é convencionada como estando sobre o eixo ox, ou seja, $a > b$ de forma que o modo de menor frequência de corte é o modo $TE_{mn} = TE_{10}$. Essa onda é denominada de *onda dominante* e é a onda mais usual nos guias retangulares.

Fazendo $m = 1$ e $n = 0$ em (7.79), introduzindo o termo $e^{j\omega t}$, e tomando a parte real teremos:

$$\begin{aligned} H_z &= C\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\beta z - \omega t) \\ H_y &= 0 \\ H_x &= C\frac{\beta a}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\beta z - \omega t - \frac{\pi}{2}) \\ E_y &= C\frac{\omega\mu a}{\pi}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\beta z - \omega t + \frac{\pi}{2}) \\ E_x &= 0 \end{aligned} \tag{7.84}$$

com

$$\beta = \sqrt{\omega^2\varepsilon\mu - (\frac{\pi}{a})^2}.$$

Observe que para esse modo (TE_{10}) a frequência crítica e o comprimento de onda crítico valem (quando o dielétrico for o vácuo ou o ar) respectivamente

$$f_c = \frac{c}{2a} \qquad \text{e} \qquad \lambda_c = 2a \qquad \text{(não depende de } b\text{!)}. \tag{7.85}$$

Veja a figura (Fig. 7.6).

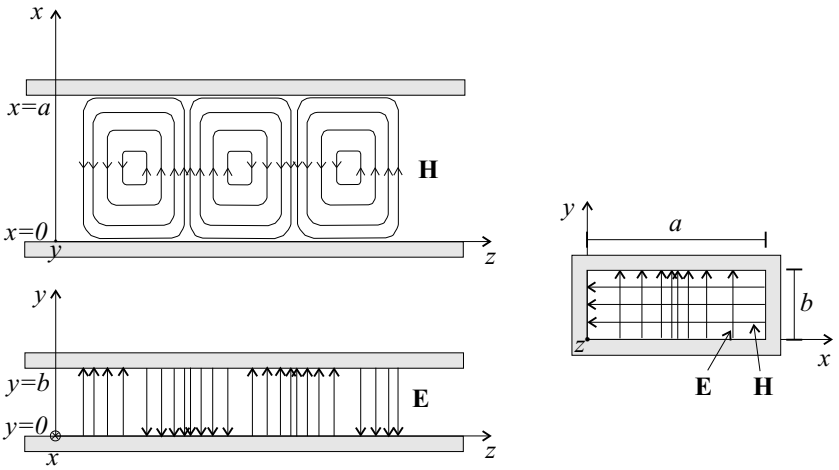


Figura 7.6: Linhas de campo do modo TE_{10} em um guia de ondas retangular.

Analisamos os modos TE e TM para os guias retangulares e poderíamos ser tentados a buscar soluções do tipo TEM. Contudo, é facil mostrar que para os guias ocos (sem condutor central) não pode existir tal modo.

Supondo que exista o modo TEM (não havendo, portanto, componente longitudinal nem de E nem de H) as linhas de H devem ser contidas no plano transversal à direção de propagação e como $div\mathbf{H} = 0$ as linhas devem ser fechadas. Pela lei de Ampére, a circuitação de $\mathbf{H}$ deve ser a soma da corrente verdadeira com a corrente de deslocamento que "fura" o plano apoiado no caminho de integração. Contudo, se não existe condutor

central, não pode haver corrente verdadeira e deverá haver apenas corrente de deslocamento; mas, uma corrente de deslocamento implica em haver uma componente longitudinal de **E**, o que contradiz o pressuposto de ser uma onda TEM. Logo não pode existir tal modo de propagação!

A escolha de qual modo deve existir no interior do guia (TE ou TM e valores de m e n) depende de como a onda é inicialmente formada pelo elemento que a gera (a antena) e sua posição com relação as paredes do guia de ondas.

Diversos modos são possíveis e também a superposição desses modos. O tipo de antena e posição da mesma no interior do guia, determinará o modo que será excitado.

7.2.2 Guia de ondas cilíndrico de secção circular

Outra forma de guia de onda, também utilizada, é o guia de secção circular. Para estudarmos esse guia e facilitar a aplicação das condições de contorno é coveniente utilizarmos o sistema de coordenadas cilíndricas considerando a propagação ao longo do eixo do cilindro, o eixo oz.

Assumindo uma variação harmônica no tempo, $e^{j\omega t}$, e uma variação exponencial ao longo do eixo oz, como anteriormente, as equações de Maxwell tomam a forma seguinte, na região não condutora:

$$\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\rho \partial \phi} + \widetilde{\gamma}\widetilde{H}_\phi = j\omega\varepsilon\widetilde{E}_\rho \tag{7.86}$$

$$\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\rho \partial \phi} + \widetilde{\gamma}\widetilde{E}_\phi = -j\omega\mu\widetilde{H}_\rho \tag{7.87}$$

$$-\widetilde{\gamma}\widetilde{H}_\rho - \frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial \rho} = j\omega\varepsilon\widetilde{E}_\phi \tag{7.88}$$

$$-\widetilde{\gamma}\widetilde{E}_\rho - \frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial \rho} = -j\omega\mu\widetilde{H}_\phi \tag{7.89}$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho H_\phi) - \frac{\partial \widetilde{H}_\rho}{\partial \phi}\right] = j\omega\varepsilon\widetilde{E}_z \tag{7.90}$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \widetilde{E}_\phi) - \frac{\partial \widetilde{E}_\rho}{\partial \phi}\right] = -j\omega\mu H_z. \tag{7.91}$$

Podemos ainda combinar essas equações, de (7.87) e (7.88) teremos

$$\widetilde{h}^2\widetilde{H}_\rho = j\frac{\omega\varepsilon}{\rho}\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial \phi} - \widetilde{\gamma}\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial \rho} \tag{7.92}$$

e

$$\widetilde{h}^2\widetilde{E}_\phi = -\frac{\widetilde{\gamma}}{\rho}\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial \phi} + j\omega\mu\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial \rho}. \tag{7.93}$$

De (7.86) e (7.89) fica

$$\widetilde{h}^2\widetilde{H}_\phi = -j\omega\varepsilon\frac{\partial \widetilde{E}_z}{\partial \rho} - \frac{\widetilde{\gamma}}{\rho}\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial \phi} \tag{7.94}$$

e

$$\widetilde{h}^2\widetilde{E}_\rho = -\widetilde{\gamma}\frac{\partial\widetilde{E}_z}{\partial\rho} - j\frac{\omega\mu}{\rho}\frac{\partial\widetilde{H}_z}{\partial\phi} \tag{7.95}$$

com

$$\widetilde{h}^2 = \widetilde{\gamma}^2 + \omega^2\mu\varepsilon.$$

Precisamos encontrar $\widetilde{E}_z$ e $\widetilde{H}_z$ de forma determinar as outras coordenadas via equações (7.92) a (7.95). Isso pode ser realizado se solucionarmos as equações de onda para $\widetilde{E}_z$ e $\widetilde{H}_z$ em coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial^2\widetilde{E}_z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\widetilde{E}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\widetilde{E}_z}{\partial\rho} = -\omega^2\mu\varepsilon\widetilde{E}_z \tag{7.96}$$

e

$$\frac{\partial^2\widetilde{H}_z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\widetilde{H}_z}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\widetilde{H}_z}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\widetilde{H}_z}{\partial\rho} = -\omega^2\mu\varepsilon\widetilde{H}_z. \tag{7.97}$$

Essas equações podem ser resolvidas pelo método de separação de variáveis supondo que (para $\widetilde{E}_z$ por exemplo)

$$\widetilde{E}_z = \widetilde{E}_{z0}(\rho,\phi)e^{-\widetilde{\gamma}z} = P(\rho)\Phi(\phi)e^{-\widetilde{\gamma}z}. \tag{7.98}$$

Substituindo em (7.96) e arrumando encontraremos:

$$\frac{1}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho P}\frac{dP}{d\rho} + \frac{1}{\Phi\rho^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + \widetilde{h}^2 = 0$$

ou

$$\frac{\rho^2}{P}\frac{d^2P}{d\rho^2} + \frac{\rho}{P}\frac{dP}{d\rho} + \rho^2\widetilde{h}^2 = -\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}.$$

O termo da esquerda é função só de ρ e o termo da direita é função só de ϕ, portanto, teremos duas equações

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -n^2, \qquad n^2 = \text{constante de separação} \tag{7.99}$$

e

$$\frac{d^2P}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{d\rho} + (\widetilde{h}^2 - \frac{n^2}{\rho^2})P = 0. \tag{7.100}$$

A solução de (7.99) é

$$\Phi = A_n\cos(n\phi) + B_n\,\mathrm{sen}(n\phi)$$

n deve ser inteiro por causa da simetria axial representada por

$$\Phi(\phi) = \Phi(\phi + k2\pi), \qquad k = \text{inteiro}.$$

A equação (7.100) também pode ser dividida por $\widetilde{h}^2$ e escrita como:

$$\frac{d^2P}{d(\rho\widetilde{h})^2} + \frac{1}{\rho\widetilde{h}}\frac{dP}{d(\rho\widetilde{h})} + \left[1 - \frac{n^2}{(\rho\widetilde{h})^2}\right]P = 0 \tag{7.101}$$

que é a forma padrão da equação de Bessel na variável ρh.

Essa equação é da forma

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dP}{dx} + \left[1 - \frac{n^2}{x^2}\right] P = 0, \qquad \text{com } n \text{ inteiro.}$$

Uma solução na forma de série de potencias pode ser tentada

$$P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots .$$

A substituição na equação diferencial, para cada valor de n, permite encontrar os coeficientes da série. Para cada valor de n encontraremos:

$$P_n(x) = J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}. \tag{7.102}$$

A função $J_n(x)$ é conhecida como a função de Bessel do 1° tipo de ordem n.

É possível ainda encontrar uma outra solução linearmente independente da primeira, a chamada função de Neuman ou função de Bessel do 2° tipo de ordem n, $N_n(x)$ e a solução completa seria a combinação linear das duas

$$P_n(x) = A_n J_n(x) + A'_n N_n(x). \tag{7.103}$$

Contudo, a função de Neuman diverge em $x = 0$, portanto, não pode representar uma grandeza física no centro do guia de onda, logo $A'_n = 0$, de forma que nos restringiremos apenas a função de Bessel do 1° tipo que converge para todos os valores de x.

Para pequenos valores de x a função é dada aproximadamente por:

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!}, \qquad x << 1. \tag{7.104}$$

Em particular, $J_0(x) \approx 1, \qquad x << 1$.

Para valores grandes de x a aproximação é

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \qquad x >> 1. \tag{7.105}$$

Algumas relações úteis:

$$\begin{aligned}
x\frac{d}{dx}J_n(x) &= nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \qquad (7.106)\\
\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] &= x^n J_{n-1}(x)\\
\frac{d}{dx}[x^{-n} J_{n+1}(x)] &= x^{-n} J_{n+1}(x)\\
2nJ_n(x) &= x[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)]\\
\int x^n J_{n-1}(x)dx &= x^n J_n(x)\\
\int x^{-n} J_{n+1}(x)dx &= -x^{-n} J_n(x).
\end{aligned}$$

A solução de (7.101) será, portanto,

$$P(\rho\widetilde{h}) = J_n(\rho\widetilde{h})$$

e a coordenada E_z do campo será, de acordo com (7.98),

$$\widetilde{E}_z = J_n(\rho\widetilde{h})[A_n \cos(n\phi) + B_n \operatorname{sen}(n\phi)]e^{-\widetilde{\gamma}z}. \tag{7.107}$$

Resultado idêntico pode ser obtido para a coordenada $\widetilde{H}_z$

$$\widetilde{H}_z = J_n(\rho\widetilde{h})[C_n \cos(n\phi) + D_n \operatorname{sen}(n\phi)]e^{-\widetilde{\gamma}z}. \tag{7.108}$$

Onda TM

Nesse caso, $\widetilde{H}_z = 0$ e a condição de contorno para esse caso é que $E_z = 0$ na superfície interna do cilindro de raio a:

$$E_z = 0, \qquad \text{para } \rho = a.$$

Portanto, em (7.107) deveremos ter $J_n(\widetilde{h}a) = 0$.

Existem infinitas raizes para a função de Bessel. Para obtermos solução oscilatoria devemos ter $\widetilde{\gamma}$ imaginário e, como $\widetilde{\gamma}^2 = \widetilde{h}^2 - \omega^2\mu\varepsilon$, deveremos nos restringir aos valores de $\widetilde{h}^2$ reais que sejam menores que $\omega^2\mu\varepsilon$ de forma que os valores de $\widetilde{h}a$ que normalmente nos interessam são os correspondentes as primeiras raízes da função de Bessel (a menos que a frequência seja extremamente alta).

Para $n = 0$, a primeira raiz ocorre em $ha = 2,405$ (encontrada graficamente ou numericamente) e a segunda em $ha = 5,52$.

Para $n = 1$, a primeira em $ha = 3,58$ e a segunda em $7,02$.

De forma a manter a mesma notação que usamos anteriormente, diremos que $(ha)_{nj}$ corresponde ao valor da j-ésima raiz da função de Bessel de ordem n. Assim, $(ha)_{01} = 2,405$, $(ha)_{12} = 7,02$ e assim por diante. Teremos de maneira correspondente, os modos TM_{01}, $TM_{02}...TM_{11}, TM_{12}...$.

Os valores de $\widetilde{\gamma}$ dados por

$$\widetilde{\gamma} = j\beta = j\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \widetilde{h}^2}$$

serão tais que representaremos β por

$$\beta_{nj} = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \widetilde{h}_{nj}^2}, \qquad h_{nj} = \frac{(ha)_{nj}}{a}. \tag{7.109}$$

As frequências de corte serão dadas por

$$f_c = \frac{h_{nj}}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{7.110}$$

e a velocidade de fase

$$v = \frac{\omega}{\beta_{nj}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \widetilde{h}_{nj}^2}}. \tag{7.111}$$

De acordo com (7.107) a componente $\widetilde{E}_z$ é uma combinação linear de senos e cossenos. Com uma escolha adequada da referência para medirmos o ângulo ϕ (devido à simetria axial)

podemos ter a mesma expressão em função apenas do cosseno ou do seno. Escolheremos a função cosseno, de modo que

$$\widetilde{E}_z = J_n(\rho h) A_n \cos(n\phi) e^{-j\beta z}. \tag{7.112}$$

As outras coordenadas dos vetores dos campos são dadas por (7.92) a (7.95)

$$\widetilde{H}_\rho = -\frac{jA_n\omega\varepsilon n}{h^2\rho} J_n(\rho h)\,\mathrm{sen}(n\phi) e^{-j\beta z} \tag{7.113}$$

$$\widetilde{H}_\phi = -\frac{jA_n\omega\varepsilon}{h}\frac{d}{d(\rho h)}\left[J_n(\rho h)\right]\cos(n\phi) e^{-j\beta z}$$

$$\widetilde{E}_\rho = \frac{\beta}{\omega\varepsilon}\widetilde{H}_\phi$$

$$\widetilde{E}_\phi = -\frac{\beta}{\omega\varepsilon}\widetilde{H}_\rho$$

Onda TE

Nesse caso $E_z = 0$ e as coordenadas dos vetores dos campos dependerão de H_z conforme as equações (7.92) a (7.95). A expressão de $\widetilde{H}_z$ dada por (7.108) pode ser expressa apenas pelo termo cosseno com a escolha adequada da origem de ϕ de modo que podemos escrever

$$\widetilde{H}_z = J_n(\rho\widetilde{h}) C_n \cos(n\phi) e^{-j\beta z}. \tag{7.114}$$

A condição de contorno deve ser aplicada no componente tangencial de **E**, que nesse caso é $\widetilde{E}_\phi$, em $\rho = a$. Para isso escrevamos as outras coordenadas dadas por (7.92) a (7.95).

$$\widetilde{H}_\rho = -\frac{j\beta C_n}{h}\frac{\partial}{\partial(h\rho)}\left[J_n(h\rho)\right]\cos(n\phi) e^{-j\beta z} \tag{7.115}$$

$$\widetilde{H}_\phi = \frac{jn\beta C_n}{h^2\rho} J_n(h\rho)\,\mathrm{sen}(n\phi) e^{-j\beta z}$$

$$\widetilde{E}_\rho = \frac{\omega\mu}{\beta}\widetilde{H}_\phi$$

$$\widetilde{E}_\phi = -\frac{\omega\varepsilon}{\beta}\widetilde{H}_\rho.$$

Pela condição de contorno deveremos ter que

$$\left[\frac{d}{d(h\rho)} J_n(h\rho)\right]_{\rho=a} = 0$$

e as primeiras raízes são dadas (graficamente) por:

$$(ha)'_{01} = 3,83 \qquad (ha)'_{11} = 1,84$$
$$(ha)'_{02} = 7,02 \qquad (ha)'_{12} = 5,33$$

correspondentes às ondas TE_{01}, TE_{02}, TE_{11} e TE_{12} .

As expressões para β, f_c e v permanecem as mesmas das ondas TM bastando apenas substituir os valores de h_{nj} correspondentes.

Capítulo 8

Linhas de transmissão

De modo geral, as linhas de transmissão são dispositivos constituídos por condutores e/ou dielétricos capazes de transmitir ou levar um sinal elétrico (uma informação) de um ponto a outro com a maior eficiência possível.

Os guias de ondas, as fibras óticas, os cabos paralelos e coaxiais etc. são todos linhas de transmissão que diferem entre si na maneira com que os vetores dos campos se propagam. A geometria da linha é que define os modos de propagação das ondas elétricas e magnéticas.

Estudamos os guias de onda como uma extensão natural da propagação das ondas no espaço quando submetidas às condições de contorno das paredes condutoras e vimos que para um guia oco não era possível propagar o modo transverso eletromagnético. Só havia propagação nos modos ditos superiores, TE e TM.

Apesar do estudo das linhas de transmissão abranger os guias de onda, usualmente utilizamos o termo "linha" para designar os dispositivos de dois ou mais condutores capazes de propagar o modo TEM e o termo "guia" para os que propagam os modos superiores. Com essa designação, as linhas mais comuns são as linhas de condutores paralelos (lado a lado), as linhas de dois condutores blindada, a linha coaxial e, mais recentemente, a "strip line" constituída por uma fita condutora separada por uma chapa dielétrica de um plano de terra mais largo que foi popularizada com a técnica dos circuitos impressos (Fig. 8.1).

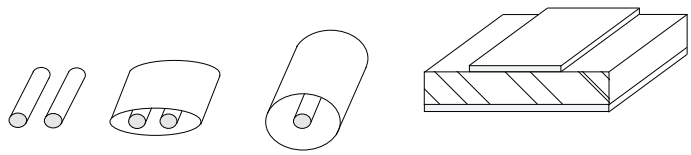


Figura 8.1: Exemplos de linhas de transmissão: linha paralela, linha paralela blindada, linha coaxial e strip line.

8.1 Os parâmetros da linha de transmissão

Em todo o sistema constituído por dois ou mais condutores é possível associar indutâncias, capacitâncias e resistências a esses condutores.

Quando os efeitos capacitivos indutivos e resistivos podem ser individualizados em elementos puramente capacitivos, indutivos ou resistivos, dizemos que os parâmetros são localizados. Caso não seja possível localiza-los individualmente, falamos em parâmetros distribuídos. Cada elemento ou pedaço da linha de transmissão possui indutância, capacitância e resistência indissociadas. Falamos então em reatâncias e resistência por unidade de comprimento, de modo que os símbolos usuais R, G, C, L, X_c, X_L, Y e Z passarão, daqui por diante, a ter esse significado.

8.2 Equações da linha de transmissão

Tomemos um elemento infinitensinal genérico de uma linha de transmissão (representado aqui como dois pequenos pedaços de fios paralelos) como mostrado na figura (Fig 8.2).

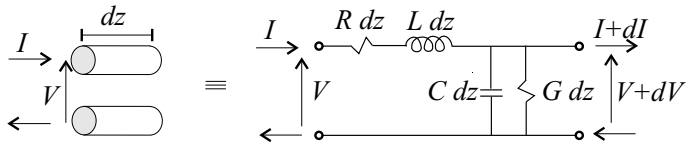


Figura 8.2: Elemento infinitesimal de uma linha de transmissão e circuito equivalente.

A tensão e a corrente no lado esquerdo são $V(z,t)$, $I(z,t)$ e, no lado direito,

$$V + \frac{\partial V}{\partial z}dz, \qquad I + \frac{\partial I}{\partial z}dz.$$

Pelas leis de Kirchhoff podemos escrever

$$V - \left(V + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right) = RIdz + Ldz\frac{\partial I}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial z} = -RI - L\frac{\partial I}{\partial t} \tag{8.1}$$

e

$$I - \left(I + \frac{\partial I}{\partial z}dz\right) = VGdz + Cdz\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\therefore \frac{\partial I}{\partial z} = -GV - C\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{8.2}$$

As equações (8.1) e (8.2) são acopladas e devem ser resolvidas simultaneamente. Derivando a 1ª com relação à z e a 2ª com relação à t temos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -R\frac{\partial I}{\partial z} - L\frac{\partial^2 I}{\partial z \partial t} \tag{8.3}$$

e

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial z} = -G\frac{\partial V}{\partial t} - C\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \tag{8.4}$$

Substituindo (8.2) e (8.4) em (8.3) temos

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -R\left(-GV - C\frac{\partial V}{\partial t}\right) - L\left(-G\frac{\partial V}{\partial t} - C\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - (RC + LG)\frac{\partial V}{\partial t} - LC\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - RGV = 0. \tag{8.5}$$

Esta é uma equação diferencial de onda para V nas variavéis z e t.

Podemos encontrar uma equação idêntica para I se derivarmos (8.1) com relação a t e (8.2) com relação a z obtendo

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial z} = -R\frac{\partial I}{\partial t} - L\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tag{8.6}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = -G\frac{\partial V}{\partial z} - C\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial t} \tag{8.7}$$

Substituindo (8.1) e (8.6) em (8.7) teremos

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = -G\left(-RI - L\frac{\partial I}{\partial t}\right) - C\left(-R\frac{\partial I}{\partial t} - L\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}\right)$$

ou

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - (RC + LG)\frac{\partial I}{\partial t} - LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - RGI = 0 \tag{8.8}$$

Procuremos soluções para (8.5) e (8.8) na forma de uma onda harmônica do tipo

$$V = \mathrm{Re}\{\widetilde{V}e^{j\omega t}\}, \qquad \text{com } \widetilde{V} = \widetilde{V}_0 e^{-\widetilde{\gamma} z} \tag{8.9}$$

e

$$I = \mathrm{Re}\{\widetilde{I}e^{j\omega t}\}, \qquad \text{com } \widetilde{I} = \widetilde{I}_0 e^{-\widetilde{\gamma} z} \tag{8.10}$$

Substituindo em (8.5) e (8.8) essas propostas de soluções complexas encontraremos as seguintes equações em variáveis complexas:

$$\widetilde{\gamma}^2\widetilde{V} - (RC + LG)j\omega\widetilde{V} + LC\omega^2\widetilde{V} - RG\widetilde{V} = 0$$

e

$$\widetilde{\gamma}^2\widetilde{I} - (RC + LG)j\omega\widetilde{I} + LC\omega^2\widetilde{I} - RG\widetilde{I} = 0.$$

Logo $\widetilde{\gamma}$ deve satisfazer a equação

$$\widetilde{\gamma}^2 - (RC + LG)j\omega + LC\omega^2 - RG = 0$$

$$\therefore \widetilde{\gamma} = \sqrt{-LC\omega^2 + RG + j\omega(RC + LG)} \tag{8.11}$$

ou

$$\widetilde{\gamma} = \alpha + j\beta. \tag{8.12}$$

A substituição das soluções harmônicas (8.9) e (8.10) em (8.1) e (8.2) resulta em

$$\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial z} = -(R + j\omega L)\widetilde{I} \tag{8.13}$$

e

$$\frac{\partial \widetilde{I}}{\partial z} = -(G + j\omega C)\widetilde{V}. \tag{8.14}$$

Na verdade, a solução mais geral para (8.5) e (8.8) é a combinação linear de ondas harmônicas que propagam em sentidos opostos, tanto para a tensão quanto para a corrente, cujas variações espaciais são

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}_0^- e^{+\widetilde{\gamma} z} + \widetilde{V}_0^+ e^{-\widetilde{\gamma} z} \tag{8.15}$$

e

$$\widetilde{I} = \widetilde{I}_0^- e^{+\widetilde{\gamma} z} + \widetilde{I}_0^+ e^{-\widetilde{\gamma} z}. \tag{8.16}$$

Mas, pela equação (8.13) vemos também que

$$\widetilde{I} = -\frac{1}{(R + j\omega L)}\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial z} = -\frac{1}{(R + j\omega L)}\frac{\partial}{\partial z}(\widetilde{V}_0^- e^{+\widetilde{\gamma} z} + \widetilde{V}_0^+ e^{-\widetilde{\gamma} z})$$

ou

$$\widetilde{I} = -\frac{\widetilde{\gamma}}{R + j\omega L}(\widetilde{V}_0^- e^{+\widetilde{\gamma} z} - \widetilde{V}_0^+ e^{-\widetilde{\gamma} z}). \tag{8.17}$$

O parâmetro

$$\widetilde{Z}_c = \frac{R + j\omega L}{\widetilde{\gamma}} \tag{8.18}$$

é chamado de impedância característica da linha. Observe que de (8.16) e (8.17)

$$\frac{\widetilde{V}_0^+}{\widetilde{I}_0^+} = \widetilde{Z}_c \qquad \text{e} \qquad \frac{\widetilde{V}_0^-}{\widetilde{I}_0^-} = -\widetilde{Z}_c. \tag{8.19}$$

Substituindo a expressão de $\widetilde{\gamma}$ (8.11) em (8.18) fica

$$\widetilde{Z}_c = \frac{R + j\omega L}{\widetilde{\gamma}} = \frac{R + j\omega L}{\sqrt{-LC\omega^2 + RG + j\omega(RC + LG)}}$$

$$\therefore \widetilde{Z}_c = \frac{R + j\omega L}{\sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}. \tag{8.20}$$

Nota: também podemos escrever

$$\widetilde{Z}_c = \frac{\widetilde{\gamma}}{(G + j\omega C)}.$$

Observando a equação (8.12) vemos que, em geral, $\widetilde{\gamma}$ será um número complexo, que implicará em um termo de amortecimento e um termo oscilatório nas soluções (8.15) e (8.16).

Essas soluções podem ser interpretados como a superposição de duas ondas, em geral amortecidas, propagando em sentidos opostos.

8.3 A linha de transmissão terminada

Suponhamos que uma impedância $\widetilde{Z}_L$ seja conectada a uma linha de transmissão em $z = 0$. A relação entre os fasores $\widetilde{V}$ e $\widetilde{I}$ em $z = 0$ valerá $\widetilde{Z}_L$

$$\widetilde{Z}_L = \left[\frac{\widetilde{V}}{\widetilde{I}}\right]_{z=0} = \frac{\widetilde{V}_0^+ + \widetilde{V}_0^-}{\widetilde{I}_0^+ + \widetilde{I}_0^-} = \widetilde{Z}_c \frac{(\widetilde{I}_0^+ - \widetilde{I}_0^-)}{\widetilde{I}_0^+ + \widetilde{I}_0^-}. \tag{8.21}$$

Define-se o coeficiente de reflexão $\widetilde{\Gamma}_R$ como

$$\widetilde{\Gamma}_R = \frac{\widetilde{V}_0^-}{\widetilde{V}_0^+} \tag{8.22}$$

e pelas equações 8.19 e 8.21 fica

$$\widetilde{\Gamma}_R = \frac{\widetilde{V}_0^-}{\widetilde{V}_0^+} = -\frac{\widetilde{I}_0^-}{\widetilde{I}_0^+} = \frac{\widetilde{Z}_L - \widetilde{Z}_c}{\widetilde{Z}_L + \widetilde{Z}_c}. \tag{8.23}$$

O coeficiente de reflexão permite determinar a amplitude da onda refletida em função da amplitude da onda incidente. Observe que, se a impedância de carga $\widetilde{Z}_L$ for igual a impedância característica $\widetilde{Z}_c$, não haverá onda refletida pois $\widetilde{\Gamma}_R = 0$.

Sendo $\widetilde{\gamma}$ em geral complexo, é conveniente escrever as equações (8.15) e (8.16) em termos de funções hiperbólicas, uma combinação linear de senos e cossenos hiperbólicos do tipo

$$\widetilde{V} = A_1 \cosh(\widetilde{\gamma} z) + B_1 \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} z) \tag{8.24}$$

$$\widetilde{I} = A_2 \cosh(\widetilde{\gamma} z) + B_2 \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} z). \tag{8.25}$$

Chamemos de $\widetilde{V}_L$ e $\widetilde{I}_L$ a tensão e corrente na impedância de carga colocada em $z = 0$ e $\widetilde{V}_{in}$ e $\widetilde{I}_{in}$ a tensão e a corrente na entrada da linha, suposta ser em $z = -l$ (usualmente se considera a carga em $z = 0$ e a entrada em $z = -l$ de modo que o sentido positivo é em direção à carga) como mostra a figura (Fig. 8.3).

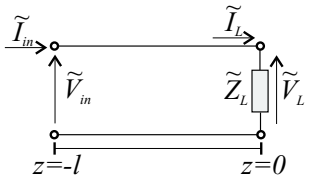


Figura 8.3: Linha de transmissão terminada por uma impedância de carga $\widetilde{Z}_L$.

Utilizando as equações (8.24) e (8.25) em (8.13) e (8.14) teremos

$$\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial z} = A_1 \widetilde{\gamma} \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} z) + B_1 \widetilde{\gamma} \cosh(\widetilde{\gamma} z) = -(R + j\omega L)\widetilde{I}$$

$$\frac{\partial \widetilde{I}}{\partial z} = A_2 \widetilde{\gamma} \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} z) + B_2 \widetilde{\gamma} \cosh(\widetilde{\gamma} z) = -(G + j\omega C)\widetilde{V}$$

$$\therefore \widetilde{V} = -\frac{\widetilde{\gamma}}{(G + j\omega C)}\left[A_2 \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} z) + B_2 \cosh(\widetilde{\gamma} z)\right] \tag{8.26}$$

$$\widetilde{I} = -\frac{\widetilde{\gamma}}{(R + j\omega L)}[A_1 \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} z) + B_1 \cosh(\widetilde{\gamma} z)]. \tag{8.27}$$

Aplicando a condição $\widetilde{V} = \widetilde{V}_L$ e $\widetilde{I} = \widetilde{I}_L$ em $z = 0$ nas equações (8.24) a (8.27) teremos: Em (8.24) e (8.25)

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_L &= A_1 1 + 0 \qquad \therefore A_1 = \widetilde{V}_L \\ \widetilde{I}_L &= A_2 1 + 0 \qquad \therefore A_2 = \widetilde{I}_L. \end{aligned}$$

Em (8.26) e (8.27)

$$\begin{aligned} \widetilde{V}_L &= -\frac{\widetilde{\gamma}}{(G + j\omega C)}[0 + B_2] \\ \widetilde{I}_L &= -\frac{\widetilde{\gamma}}{(R + j\omega L)}[0 + B_1] \end{aligned}$$

ou, de acordo com (8.20)

$$B_2 = -\frac{\widetilde{V}_L}{\widetilde{Z}_c} \qquad \text{e} \qquad B_1 = -\widetilde{I}_L \widetilde{Z}_c.$$

Sendo assim, podemos escrever a partir de (8.24) e (8.25) que

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}_L \cosh(\widetilde{\gamma} z) - \widetilde{I}_L \widetilde{Z}_c \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} z) \tag{8.28}$$

$$\widetilde{I} = \widetilde{I}_L \cosh(\widetilde{\gamma} z) - \frac{\widetilde{V}_L}{\widetilde{Z}_c} \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} z). \tag{8.29}$$

Para uma distância l da carga ($z = -l$) teremos

$$\widetilde{V}_{in} = \widetilde{V}_L \cosh(\widetilde{\gamma} l) + \widetilde{I}_L \widetilde{Z}_c \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} l) \tag{8.30}$$

$$\widetilde{I}_{in} = \widetilde{I}_L \cosh(\widetilde{\gamma} l) + \frac{\widetilde{V}_L}{\widetilde{Z}_c} \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} l). \tag{8.31}$$

A impedância de entrada definida por

$$\widetilde{Z}_{in} = \frac{\widetilde{V}_{in}}{\widetilde{I}_{in}} \tag{8.32}$$

será

$$\widetilde{Z}_{in} = \frac{\widetilde{V}_L \cosh(\widetilde{\gamma} l) + \widetilde{I}_L \widetilde{Z}_c \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} l)}{\widetilde{I}_L \cosh(\widetilde{\gamma} l) + \frac{\widetilde{V}_L}{\widetilde{Z}_c} \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} l)}$$

$$\therefore \widetilde{Z}_{in} = \frac{\frac{\widetilde{V}_L}{\widetilde{I}_L} \cosh(\widetilde{\gamma} l) + \widetilde{Z}_c \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} l)}{\cosh(\widetilde{\gamma} l) + \frac{\widetilde{V}_L}{\widetilde{I}_L \widetilde{Z}_c} \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} l)}$$

$$\therefore \widetilde{Z}_{in} = \frac{\widetilde{Z}_L \cosh(\widetilde{\gamma} l) + \widetilde{Z}_c \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} l)}{\cosh(\widetilde{\gamma} l) + \frac{\widetilde{Z}_L}{\widetilde{Z}_c} \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} l)}. \tag{8.33}$$

Vemos então que uma linha de transmissão carregada pode ser encarada como uma nova impedância e dizemos que a linha é capaz de transformar a impedância de carga.

Observe que, se $\widetilde{Z}_L = \widetilde{Z}_c$, teremos $\widetilde{Z}_{in} = \widetilde{Z}_L$ independentemente do comprimento da linha.

Casos importantes

- Linha curto-circuitada na extremidade. Nesse caso $\widetilde{Z}_L = 0$ e, por (8.33), teremos

$$\widetilde{Z}_{in_{(sc)}} = \widetilde{Z}_c \tanh(\widetilde{\gamma} l). \tag{8.34}$$

- Linha aberta no extremo. Nesse caso $\widetilde{Z}_L = \infty$ e, por (8.33), teremos

$$\widetilde{Z}_{in_{(oc)}} = \widetilde{Z}_c \coth(\widetilde{\gamma} l). \tag{8.35}$$

  Observe ainda que o produto

$$\widetilde{Z}_{in_{(sc)}} \widetilde{Z}_{in_{(oc)}} = \widetilde{Z}_c^2. \tag{8.36}$$

  Ou seja, a impedância característica de uma linha pode ser medida a partir das medidas das impedâncias da linha curto circuitada e da linha em circuito aberto.

A equação (8.33) ainda pode ser reescrita como:

$$\widetilde{Z}_{in} = \widetilde{Z}_c \frac{\widetilde{Z}_L/\widetilde{Z}_c \cosh(\widetilde{\gamma} l) + \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} l)}{\cosh(\widetilde{\gamma} l) + \widetilde{Z}_L/\widetilde{Z}_c \operatorname{senh}(\widetilde{\gamma} l)} = \widetilde{Z}_c \frac{\widetilde{Z}_L/\widetilde{Z}_C + \tanh(\widetilde{\gamma} l)}{1 + \widetilde{Z}_L/\widetilde{Z}_C \tanh(\widetilde{\gamma} l)}$$

ou

$$\widetilde{Z}_{in} = \widetilde{Z}_c \frac{\widetilde{Z}_L + \widetilde{Z}_c \tanh(\widetilde{\gamma} l)}{\widetilde{Z}_c + \widetilde{Z}_L \tanh(\widetilde{\gamma} l)}. \tag{8.37}$$

8.4 Linha de transmissão de baixas perdas

Uma linha de transmissão pode ser projetada de modo que, na frequência em que vai operar, tenhamos a condição de baixas perdas,

$$\begin{aligned} R &<< \omega L \\ G &<< \omega C, \end{aligned} \tag{8.38}$$

de modo que a impedância característica da linha fica dada por:

$$\widetilde{Z}_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \text{(real !)}. \tag{8.39}$$

A constante de propagação $\widetilde{\gamma} = \alpha + j\beta$ torna-se

$$\widetilde{\gamma} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \approx j\omega\sqrt{LC} \tag{8.40}$$

ou seja $\widetilde{\gamma}$ é imaginário puro, $\widetilde{\gamma} = j\beta$,

$$\begin{aligned} \beta &= \omega\sqrt{LC} \\ \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Caso desejemos levar em conta as perdas, ainda que pequenas, uma expressão aproximada pode ser encontrada para $\widetilde{\gamma}$:

$$\widetilde{\gamma} = j\omega\sqrt{LC}\sqrt{\left(1 + \frac{R}{j\omega L}\right)}\sqrt{\left(1 + \frac{G}{j\omega C}\right)}, \qquad \frac{R}{\omega L} << 1, \ \frac{G}{\omega C} << 1.$$

Expandindo as duas últimas raízes segundo a expressão

$$\sqrt{(1 + x)} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \qquad \text{com } x << 1$$

teremos

$$\widetilde{\gamma} \approx j\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{R}{2j\omega L}\right)\left(1 + \frac{G}{2j\omega C}\right) \approx j\omega\sqrt{LC}\left(1 + \frac{R}{2j\omega L} + \frac{G}{2j\omega C} + ...\right)$$

$$\widetilde{\gamma} \approx j\omega\sqrt{LC} + \frac{R}{2\sqrt{L/C}} + \frac{G\sqrt{L/C}}{2}$$

ou

$$\widetilde{\gamma} = \alpha + j\beta \approx \frac{1}{2}\left(\frac{R}{Z_c} + GZ_c\right) + j\omega\sqrt{LC}. \tag{8.41}$$

Usualmente, podemos desprezar a parte real (α) e, se for esse o caso, as equações para a tensão e corrente ao longo da linha, equações (8.30) e (8.31) tomarão a forma

$$\widetilde{V}_{in} = \widetilde{V}_L \cos(\beta l) + j\widetilde{I}_L Z_c \operatorname{sen}(\beta l) \tag{8.42}$$

$$\widetilde{I}_{in} = \widetilde{I}_L \cos(\beta l) + j\frac{\widetilde{V}_L}{Z_c} \operatorname{sen}(\beta l) \tag{8.43}$$

e a impedância de entrada dada por (8.33) ficará

$$\widetilde{Z}_{in} = \widetilde{Z}_L \frac{\cos(\beta l) + j(Z_c/\widetilde{Z}_L) \operatorname{sen}(\beta l)}{\cos(\beta l) + j(\widetilde{Z}_L/Z_c) \operatorname{sen}(\beta l)}. \tag{8.44}$$

8.4.1 Linha de baixas perdas terminada em resistência R_L

Suponhamos que a impedância de carga seja uma resistência pura R_L. A impedância característica da linha sem perdas também é puramente resistiva $Z_c = R_c = \sqrt{L/C}$. A resistência de carga poderá ser menor, igual ou maior que a resistência característica, influenciando nas distribuições da tensão e da corrente ao longo da linha.

Analisemos os módulos da tensão e da corrente (uma vez que os instrumentos de medida, voltímetros e amperímetros, são sensíveis ao módulo e não a fase) ao longo da linha.

Sendo l a distância ao extremo carregado da linha, as equações (8.42) e (8.43) nos dão, em módulo, que

$$\begin{aligned} V(l) &= V_L\sqrt{\cos^2(\beta l) + \left(\frac{R_c}{R_L}\right)^2 \operatorname{sen}^2(\beta l)} \\ I(l) &= I_L\sqrt{\cos^2(\beta l) + \left(\frac{R_L}{R_c}\right)^2 \operatorname{sen}^2(\beta l)} \end{aligned} \tag{8.45}$$

Se $R_c = R_L$, teremos $V(l) = V_L$ e $I(l) = I_L$, ou seja, mediremos sempre o mesmo valor de tensão e corrente em qualquer ponto da linha, $V(l)_{\max} = V(l)_{\min}$ dando uma relação de tensão de onda estacionária,

$$RVOE = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = 1 \tag{8.46}$$

que significa não haver onda estacionária ao longo da linha.

Se $R_L < R_c$, o termo envolvendo o quadrado do seno na expressão da tensão em (8.45) predominará sobre o termo envolvendo o quadrado do cosseno no que tange ao valor máximo da tensão e teremos

$$V(l)_{\max} = V_L\frac{R_c}{R_L}, \qquad \text{quando } \operatorname{sen}^2(\beta l) = 1,$$

ou seja, quando

$$\beta l = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2\ldots.$$

Observe que a tensão máxima é maior que a tensão na carga.

A tensão mínima ocorrerá quando $\operatorname{sen}^2(\beta l) = 0$, ou seja, quando

$$\cos^2(\beta l) = 1, \qquad \therefore \beta l = k\pi, \qquad k = 0, 1, 2\ldots$$

e valerá $V(l)_{\min} = V_L$. Em outras palavras, a tensão em qualquer ponto da linha a uma distância l da resistência de carga será sempre maior ou igual à tensão sobre a resistência de carga.

Então,

$$RVOE = \frac{V_L R_c/R_L}{V_L} = \frac{R_c}{R_L}. \tag{8.47}$$

O inverso ocorre para a corrente (a tensão máxima ocorre na corrente mínima).

Se $R_L > R_c$ a situação se inverte. A tensão em qualquer ponto da linha a uma distância l da resistência de carga será sempre menor ou igual à tensão sobre a resistência de carga. Nesse caso teremos

$$RVOE = \frac{R_L}{R_c}. \tag{8.48}$$

As figuras (Fig. 8.4) mostram as distribuições de tensão para $R_L < R_c$ e $R_L > R_c$.

Do exposto podemos concluir que é possível determinar o valor da resitência de carga R_L a partir da medida da $RVOE$. Como existem dois valores possíveis para R_L, um maior que

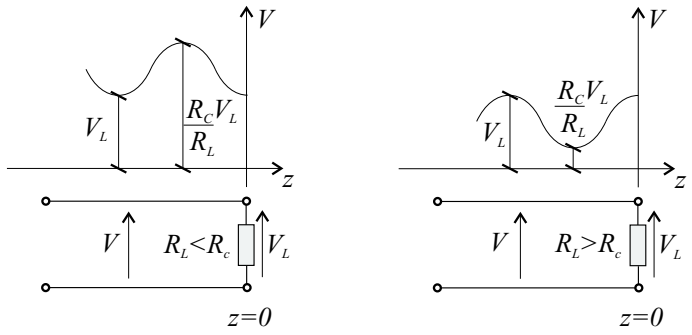


Figura 8.4: Distribuição da tensão ao longo de uma linha de transmissão de baixas perdas terminada por uma resistência de carga diferente da impedância característica.

R_c e um menor que R_c, que produzem a mesma $RVOE$, a dúvida pode ser resolvida pela observação da tensão sobre as vizinhanças da carga. Se, ao afastarmos da carga em direção ao gerador, a tensão crescer (significando que estamos em um mínimo) é porque $R_L < R_c$ e se a tensão diminuir (significando que estamos em um máximo) é porque $R_L > R_c$.

8.4.2 Linha terminada em carga não resistiva ($Z_L \neq Z_c$)

Suponhamos que a impedância de carga possua também uma parte reativa. Digamos que $\widetilde{Z}_L = R + jX$. Considerando ainda uma linha sem perdas, com $\widetilde{Z}_c = R_c$, não é mais possível afirmar que a distribuição de tensões ao longo da linha resultará em um máximo ou um mínimo sobre a carga.

O módulo da equação (8.42) permitirá encontrar tal distribuição e o valor da tensão na carga. Desenvolvendo encontraremos

$$V(l) = V_L \left[\cos^2(\beta l) + \frac{R_c X}{R^2 + X^2} \operatorname{sen}(2\beta l) + \frac{R_c^2 \operatorname{sen}^2(\beta l)}{R^2 + X^2} \right]^{1/2}$$

O módulo da tensão oscilará entre valores máximo e mínimo periodicamente. Contudo, não obteremos máximo ou mínimo sobre a impedância de carga. (Fig. 8.5).

A carga $\widetilde{Z}_L = R + jX$ na linha de transmissão de comprimento l pode ser simulada por uma nova linha de transmissão de comprimento adequado, l', com a mesma impedância característica da linha anterior, R_c, e terminada por uma resistência pura R'. De acordo com a equação (8.44) a impedância de entrada de qualquer linha de baixa perda vale

$$\widetilde{Z}_{in} = \widetilde{Z}_L \frac{\cos(\beta l) + jZ_c/\widetilde{Z}_L \operatorname{sen}(\beta l)}{\cos(\beta l) + j\widetilde{Z}_L/Z_c \operatorname{sen}(\beta l)}.$$

Para que uma linha terminada por uma resistência R' apresente uma impedância de entrada igual a $R + jX$ devemos ter

$$R + jX = R' \frac{\cos(\beta l') + jR_c/R' \operatorname{sen}(\beta l')}{\cos(\beta l') + jR'/R_c \operatorname{sen}(\beta l')}$$

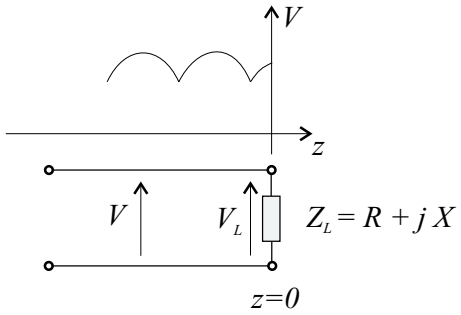


Figura 8.5: Distribuição da tensão ao longo de uma linha de transmissão de baixas perdas terminada por uma impedância de carga diferente da impedância característica.

$$\therefore R + jX = R_c^2 \frac{\left[R' \cos(\beta l') + jR_c \operatorname{sen}(\beta l')\right]\left[\cos(\beta l') - jR'/R_c \operatorname{sen}(\beta l')\right]}{R_c^2 \cos^2(\beta l') + R'^2 \operatorname{sen}^2(\beta l')}$$

$$= R_c^2 \frac{R' \cos^2(\beta l') + R' \operatorname{sen}^2(\beta l') + j\left[R_c \operatorname{sen}(\beta l')\cos(\beta l') - R'^2/R_c \operatorname{sen}(\beta l')\cos(\beta l')\right]}{R_c^2 \cos^2(\beta l') + R'^2 \operatorname{sen}^2(\beta l')}$$

$$\therefore R = \frac{R_c^2 R'}{R_c^2 \cos^2(\beta l') + R'^2 \operatorname{sen}^2(\beta l')} \tag{8.49}$$

e

$$X = \frac{R_c\left(R_c^2 - R'^2\right) \operatorname{sen}(\beta l')\cos(\beta l')}{R_c^2 \cos^2(\beta l') + R'^2 \operatorname{sen}^2(\beta l')}. \tag{8.50}$$

Cada par de valores R' e l' determina R e X sendo que podemos nos restringir aos valores de R' menores que R_c, pois, as reatâncias positivas podem ser obtidas para $\beta l'$ entre 0 e $\pi/2$ ($0 \leq l' \leq \lambda/4$) e as negativas podem ser obtidas para $\beta l'$ entre $\pi/2$ e π, ($\lambda/4 \leq l' \leq \lambda/2$). Assim, qualquer reatância pode ser obtida com uma linha de comprimento l' entre zero e $\lambda/2$.

Uma vez que a carga $R + jX$ pode ser simulada com uma linha de comprimento l' e uma resitência R' façamos uma substituição na linha de transmissão original (Fig. 8.6)

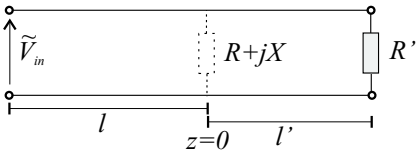


Figura 8.6: Simulação da impedância de carga por uma linha de transmissão de baixas perdas de comprimento l' terminada por uma resistência de carga diferente da impedância característica.

A distribuição de tensões ao longo da linha original não será alterada pois, para todos os efeitos, é como se a carga $R + jX$ estivesse presente em $z = 0$. A relação de tensão de onda estacionária, $RVOE$ permenecerá a mesma.

Como a nova linha de comprimento $l + l'$ está agora terminada com uma resistência pura $R^{'} < R_c$ sabemos que existirá um mínimo de tensão sobre $R^{'}$ (Fig. 8.7).

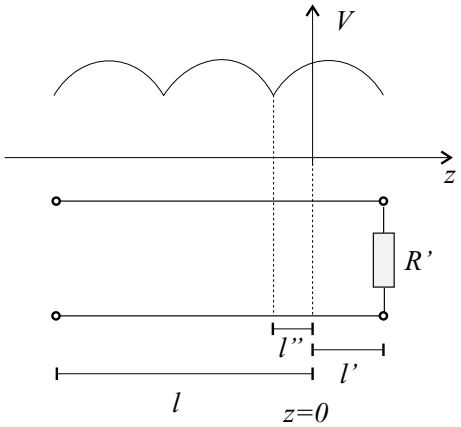


Figura 8.7: Posição do primeiro mínimo de tensão uma linha de transmissão de baixas perdas de comprimento $l+l'$ terminada por uma resistência de carga diferente da impedância característica.

A posição do mínimo (ou do máximo) anterior pode ser determinada experimentalmente utilizando-se um medidor de tensão apropriado. Digamos que esse valor seja $l^{''}$ medido a partir da posição da carga $R + jX$.

Sabemos que $l^{''} + l' = \lambda/2$, pois é a distância entre mínimos consecutivos e sabemos também que, para $R^{'} < R_c$, a relação de tensão de onda estacionária vale

$$RVOE = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{R_c}{R^{'}}.$$

Portanto, as equações (8.49) e (8.50) podem ser escritas em função de $l^{''}$ e da $RVOE$

$$R = \frac{R^{'} R_c^2}{R'^2 \left[\frac{R_c^2}{R'^2} \cos^2\left(\beta\left(l'' - \frac{\lambda}{2}\right)\right) + \operatorname{sen}^2\left(\beta\left(l'' - \frac{\lambda}{2}\right)\right)\right]}$$

$$\therefore R = \frac{RVOE\ R_c}{(RVOE)^2 \cos^2(\beta l'') + \operatorname{sen}^2(\beta l'')} \tag{8.51}$$

pois

$$\cos^2\left(\beta\left(l^{''} - \frac{\lambda}{2}\right)\right) = \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{2} - l^{''}\right)\right) = \cos^2(\pi - \beta l^{''}) = \cos^2(\beta l^{''})$$

e

$$\operatorname{sen}^2\left(\beta\left(\frac{\lambda}{2} - l^{''}\right)\right) = \operatorname{sen}^2(\pi - \beta l^{''}) = \operatorname{sen}^2(\beta \ell'')\,,$$

$$X = \frac{R_c R'^2 \left(\frac{R_c^2}{R'^2} - 1\right) \operatorname{sen}\left(\beta\left(\frac{\lambda}{2} - l^{''}\right)\right) \cos\left(\beta\left(\frac{\lambda}{2} - l^{''}\right)\right)}{R'^2 \left[\frac{R'^2}{R_c^2} \cos^2\left(\beta\left(\frac{\lambda}{2} - l^{''}\right)\right) + \operatorname{sen}\left(\beta\left(\frac{\lambda}{2} - l^{''}\right)\right)\right]}$$

$$X = \frac{-R_c\left[(RVOE)^2 - 1\right]\ \mathrm{sen}\left(\beta l''\right)\cos\left(\beta l''\right)}{(RVOE)^2\cos^2(\beta l'') + \mathrm{sen}^2(\beta l'')}. \tag{8.52}$$

Vê-se, portanto, que é possível determinar a parte resistiva e reativa de uma carga através de métodos de medida de onda estacionária. Isso pode ser particularmente útil para determinar a impedância, por exemplo, de uma antena, em uma determinada frequência, ligada a um transmissor de rádio através de uma linha de transmissão.

Exemplo

Uma antena de impedância desconhecida ligada a uma linha de transmissão de 300 Ω e alimentada por um gerador resultou nas seguintes medidas:
- distância entre mínimos sucessivos de tensão = 70 cm
- distância do primeiro mínimo medido a partir da antena = 50 cm
- $RVOE$ medida $= 1,5$.

Como $\lambda/2 = 70$ cm e $l'' = 50$ cm temos

$$\beta l'' = \frac{2\pi}{\lambda}\, l'' = \frac{2\pi}{140}\, 50 = 2,244 \text{ rad}$$

$$\cos(\beta l'') = -0,623$$
$$\mathrm{sen}(\beta l'') = 0,782.$$

Logo

$$R = \frac{1,5 \times 300}{(1,5)^2 \times (0,623)^2 + (0,782)^2} = \frac{450,0}{1,486} = 302,8\ \Omega$$

$$X = -\frac{300 \times (1,5^2 - 1) \times 0,782 \times (-0,623)}{(1,5)^2 \times (0,623)^2 + (0,782)^2} = 123,0\ \Omega.$$

8.4.3 Casos importantes de linhas de transmissão carregada

Algumas situações aparecem com frequência e tem aplicações práticas:

a) Linha de meio comprimento de onda.

Nesse caso

$$\beta l = \pi \qquad \text{ou} \qquad l = \frac{\pi}{\beta} = \frac{\pi}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{2}.$$

A equação (8.44) toma a forma

$$\widetilde{Z}_{in}|_{l=\frac{\lambda}{2}} = \widetilde{Z}_L, \tag{8.53}$$

ou seja, equivale a um transformador de impedâncias de um para um. A linha de transmissão é "transparente" para qualquer impedância de carga.

b) Linha de um quarto de comprimento onda.

Nesse caso

$$\beta l = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad l = \frac{\pi/2}{2\pi/\lambda} = \frac{\lambda}{4}.$$

A equação (8.44) transforma-se em

$$\widetilde{Z}_{in} = \frac{Z_c^2}{\widetilde{Z}_L} \tag{8.54}$$

ou seja, inverte a impedância de carga e multiplica pelo quadrado da impedância característica da linha.

c) Linha terminada em curto circuito de comprimento menor que $\lambda/4$ ($\beta l < \pi/2$).

Nesse caso, $\widetilde{Z}_L = 0$, e a equação (8.44) fica

$$\widetilde{Z}_{in} = jZ_c \tan(\beta l) \tag{8.55}$$

equivale a uma indutância (Fig 8.8) com

$$X_L = Z_c \tan(\beta l)\,.$$

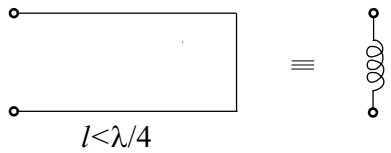


Figura 8.8: Linha de transmissão curto-circuitada com comprimento menor que $\lambda/4$.

d) Linha terminada em circuito aberto e de comprimento menor que $\lambda/4$

Nesse caso $Z_L \longrightarrow \infty$ e (8.44) fica

$$\widetilde{Z}_{in} = \frac{1}{j\frac{1}{Z_c}\tan(\beta l)} = -jZ_c \cot(\beta l) \tag{8.56}$$

equivale a uma capacitância (Fig. 8.9) com

$$X_c = \frac{1}{Z_c}\tan(\beta l)\,.$$

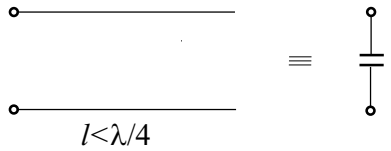


Figura 8.9: Linha de transmissão em circuito aberto com comprimento menor que $\lambda/4$.

e) Linha terminada em curto circuito com comprimento $\lambda/4 < l < \lambda/2$

$$Z_{in} = jZ_c \tan(\beta l) = -jZ_c|\tan(\beta l)| \tag{8.57}$$

pois, a tangente nesse caso é negativa já que $\pi/2 < \beta l < \pi$. Equivale, portanto, a uma capacitância com

$$X_c = \frac{1}{Z_c} \,|\cot(\beta l)|$$

f) Linha terminada em circuito aberto com comprimento $\lambda/4 < l < \lambda/2$.

$$Z_{in} = -jZ_c \cot(\beta l) = jZ_c|\cot(\beta l)| \tag{8.58}$$

pois, a cotangente nesse caso é negativa já que $\pi/2 < \beta l < \pi$. Equivale, portanto, a uma indutância com

$$X_L = Z_c|\cot(\beta l)|.$$

g) Linha de um quarto de comprimento de onda terminada em curto circuito (Fig. 8.10).

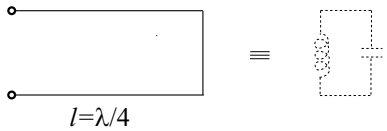


Figura 8.10: Linha de transmissão em curto-circuito com comprimento igual a $\lambda/4$.

Sendo um caso particular do item b), se fizermos $Z_L \longrightarrow 0$ na equação (8.54), teremos uma impedância de entrada infinita como em um circuito LC em paralelo na situação de ressonância. Podemos encontrar uma melhor aproximação considerando a existência de pequenas perdas na linha, utilizando as equações (8.30) e (8.31). Vejamos:

Dessas equações para linha curto-circuitada ($\widetilde{V}_L = 0$) teremos:

$$\widetilde{V}_{in} = \widetilde{I}_L \widetilde{Z}_c \text{senh}(\widetilde{\gamma} l)$$
$$\widetilde{I}_{in} = \widetilde{I}_L \cos\text{h}(\widetilde{\gamma} l)$$

$$\therefore \widetilde{Z}_{in} = \widetilde{Z}_c \tanh(\widetilde{\gamma} l) = \widetilde{Z}_c \frac{\text{senh}(\alpha l)\cos(\beta l) + j\cosh(\alpha l)\ \text{sen}(\beta l)}{\cos(\alpha l)\ \cos(\beta l) + j\ \text{senh}(\alpha l)\ \text{sen}(\beta l)}.$$

Considerando agora que $l = (2n+1)\lambda/4$ teremos

$$\text{sen}(\beta l) = \pm 1 \qquad \text{e} \qquad \cos(\beta l) = 0$$

portanto,

$$\widetilde{Z}_{in} = \widetilde{Z}_c \frac{\cosh(\alpha l)}{\text{senh}(\alpha l)}. \tag{8.59}$$

Se nos restringirmos aos pequenos pedaços de linhas com baixas perdas onde $\alpha l << 1$, teremos $\cosh(\alpha l) \approx 1$, $\text{senh}(\alpha l) \approx \alpha l$ e $\widetilde{Z}_c = R_c$. Portanto,

$$\widetilde{Z}_{in} = \frac{R_c}{\alpha l}.$$

Mas, por (8.41)

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right]$$

e, para linhas em que o dielétrico é o ar, podemos desprezar G de modo que, finalmente, podemos escrever

$$\widetilde{Z}_{in} \approx \frac{\widetilde{Z}_c}{\frac{1}{2}\frac{R}{\widetilde{Z}_c}l} = 2\frac{R_c^2}{R\,l} = r \tag{8.60}$$

como mostra a figura (Fig. 8.11).

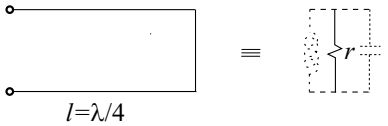


Figura 8.11: Linha de transmissão com pouca perda, em curto-circuito, com comprimento igual $\lambda/4$.

h) Linha de meio comprimento de onda terminada em circuito aberto (Fig. 8.12).

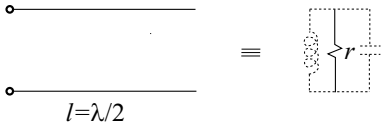


Figura 8.12: Linha de transmissão em circuito aberto, com comprimento igual $\lambda/2$.

O raciocínio é idêntico ao anterior e teremos uma impedância de entrada idêntica

$$\widetilde{Z}_{in} = 2\frac{R_c^2}{R\,l} = r.$$

8.5 Casamento de impedâncias com Stub Livre

Frequentemente, a impedância de carga ligada a uma linha de transmissão não possui o mesmo valor da impedância característica da linha, aparecendo onda estacionária nessa linha ($RVOE > 1$). A correção pode ser realizada conectando-se um "stub" em um local conveniente da linha de transmissão . Um "stub" é uma outra linha de transmissão com comprimento adequado cuja extremidade é um curto-circuito ou um circuito aberto conforme mostra a figura (Fig. 8.13).

Originalmente, estando a impedância descasada, teremos onda estacionária no trecho de A até C. Procura-se, ao conectar o stub em B, corrigir o descasamento de tal modo que no trecho de A até B (a maior parte da linha) não exista onda estacionária. Existirá onda estacionária apenas no pequeno trecho de B até C.

O problema é determinar as menores distâncias possíveis, l_1 e l_2 para conseguir o efeito desejado. A impedância resultante do "stub" com a linha de comprimento l_1 carregada com Z_L, deve resultar em um valor igual a impedância característica da linha (resistência característica na linha sem perdas).

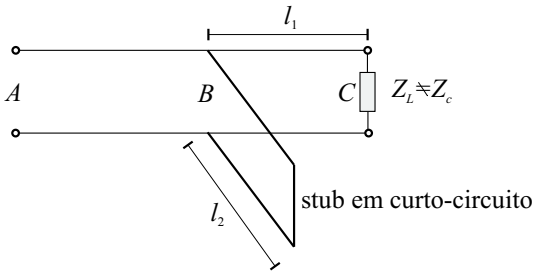


Figura 8.13: Linha de transmissão com stub em curto-circuito.

Por tratar-se de uma ligação em paralelo, é mais fácil trabalhar com a admitância ao invés da impedância, dando-se preferência aos valores normalizados. Uma impedância normalizada é a razão entre a impedância e a impedância característica.

Procede-se da seguinte maneira:

1 - Determina-se a admitância de carga $\widetilde{Y}_L$ e seu valor normalizado

$$\widetilde{Y}_{Ln} = \frac{\widetilde{Y}_L}{\widetilde{Y}_c}, \qquad \widetilde{Y}_c = \frac{1}{\widetilde{Z}_c}$$

2 - Determina-se o comprimento l_1 de modo que a admitância de carga normalizada seja transformada pela linha a um novo valor em B cuja parte real seja unitária.

$$\widetilde{Y}_{Ln}|_{\text{em } B} = 1 + jS$$

3 - Determina-se o comprimento do stub de modo que sua admitância normalizada seja

$$\widetilde{Y}_{Sn}|_{\text{em } B} = -jS.$$

4 -A ligação em paralelo soma as admitâncias de maneira que a admitância resultante será real e unitária. Logo, a impedância resultante normalizada também será unitária, ou seja, a impedância será igual à impedância característica da linha.

Em uma linha sem perdas, podemos determinar, facilmente, os comprimentos l_1 e l_2 por método analítico ou por método gráfico:

8.5.1 Método analítico

Tomemos a relação entre as equações (8.16) e (8.15)

$$\widetilde{Y} = \frac{\widetilde{I}}{\widetilde{V}} = \frac{\widetilde{I}_0^- e^{+\widetilde{\gamma}z} + \widetilde{I}_0^+ e^{-\widetilde{\gamma}z}}{\widetilde{V}_0^- e^{+\widetilde{\gamma}z} + \widetilde{V}_0^+ e^{-\widetilde{\gamma}z}} = \frac{\widetilde{I}_0^+ e^{-\widetilde{\gamma}z}}{\widetilde{V}_0^+ e^{-\widetilde{\gamma}z}} \frac{\frac{\widetilde{I}_0^- e^{+2\widetilde{\gamma}z}}{\widetilde{I}_0^+} + 1}{\frac{\widetilde{V}_0^- e^{+2\widetilde{\gamma}z}}{\widetilde{V}_0^+} + 1}.$$

Substituindo as equações (8.19) e (8.23) fica

$$\widetilde{Y} = \frac{1}{\widetilde{Z}_c} \frac{-\widetilde{\Gamma}_R e^{+2\widetilde{\gamma}z} + 1}{\widetilde{\Gamma}_R e^{+2\widetilde{\gamma}z} + 1}$$

Para uma linha de comprimento l ($z = -l$), temos a admitância normalizada

$$\frac{\widetilde{Y}}{\widetilde{Y}_c} = \frac{1 - \widetilde{\Gamma}_R e^{-2\widetilde{\gamma} l}}{1 + \widetilde{\Gamma}_R e^{-2\widetilde{\gamma} l}}, \qquad \widetilde{\Gamma}_R = \frac{\widetilde{Z}_L - \widetilde{Z}_c}{\widetilde{Z}_L + \widetilde{Z}_c} = K_R e^{j\theta_R} \tag{8.61}$$

e

$$\widetilde{\gamma} = \alpha + j\beta.$$

Para uma linha sem perdas,

$$\widetilde{\gamma} = j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{Z}_c = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Teremos

$$\frac{\widetilde{Y}}{\widetilde{Y}_c} = \frac{1 - K_R e^{j\theta_R} e^{-j2\beta l}}{1 + K_R e^{j\theta} e^{-j2\beta l}} = \frac{1 - K_R e^{-j(2\beta l - \theta_R)}}{1 + K_R e^{-j(2\beta l - \theta_R)}}$$

$$\therefore \frac{\widetilde{Y}}{\widetilde{Y}_c} = \frac{1 - K_R e^{-j\psi}}{1 + K_R e^{-j\psi}}, \qquad \text{com } \psi = 2\beta l - \theta_R.$$

Multiplicando e dividindo por $(1 + K_R e^{j\psi})$

$$\frac{\widetilde{Y}}{\widetilde{Y}_c} = \frac{(1 - K_R e^{-j\psi})(1 + K_R e^{j\psi})}{(1 + K_R e^{-j\psi})(1 + K_R e^{j\psi})}$$

$$= \frac{1 - {K_R}^2 + j2K_R \operatorname{sen}\psi}{1 + 2K_R \cos\psi + {K_R}^2}$$

Separando na parte real e imaginária teremos

$$\therefore \frac{\widetilde{Y}}{\widetilde{Y}_c} = \frac{1 - {K_R}^2}{1 + 2K_R \cos\psi + {K_R}^2} + j\frac{2K_R \operatorname{sen}\psi}{1 + 2K_R \cos\psi + {K_R}^2}.$$

Impondo a condição que a parte real deva ser unitária quando $l = l_1$ teremos

$$\frac{1 - {K_R}^2}{1 + 2K_R \cos\psi + {K_R}^2} = 1$$

$$\therefore \cos\psi = -K_R \qquad \text{ou} \qquad \cos(2\beta l_1 - \theta_R) = -K_R$$

$$\therefore 2\beta l_1 - \theta_R = \arccos(-K_R)$$

$$\therefore l_1 = \frac{\theta_R + \arccos(-K_R)}{2\beta} = \frac{\lambda}{4\pi}\left[\theta_R + \arccos(-K_R)\right]. \tag{8.62}$$

Normalmente toma-se o menor valor possível para l_1 dado por essa equação com a finalidade de reduzir as perdas nesse comprimento de linha real.

Sendo

$$\cos\psi = -K_R, \qquad \operatorname{sen}\psi = \pm\sqrt{1 - {K_R}^2}$$

a expressão para a admitância fica

$$\frac{\widetilde{Y}}{\widetilde{Y}_c} = 1 + j\frac{2K_R(\pm)\sqrt{1 - {K_R}^2}}{1 - {K_R}^2} = 1 + j\frac{2\,K_R}{\pm\sqrt{1 - {K_R}^2}}.$$

Nessa posição da linha ($l = l_1$) conectaremos um stub cuja admitância seja imaginária pura (susceptância) e oposta à parte imaginária da admitância acima calculada. Ou seja,

$$\frac{\widetilde{Y}_{\text{stub}}}{\widetilde{Y}_c} = -j\frac{2\ K_R}{\pm\sqrt{1-{K_R}^2}}. \tag{8.63}$$

As admitâncias de um stub em curto circuito ou em circuito aberto são dadas pelas equações (8.55) e (8.56) (para uma linha sem perdas, $\widetilde{\gamma} = j\beta$ de comprimento menor que $\lambda/4$).

$$\frac{\widetilde{Y}_{\text{stub}}}{\widetilde{Y}_c} = -j\cot(\beta l_2) = -j\cot\left(\frac{2\pi}{\lambda}\ l_2\right) \qquad \text{em curto circuito}$$

ou

$$\frac{\widetilde{Y}_{\text{stub}}}{\widetilde{Y}_c} = j\tan(\beta l_2) = j\tan\left(\frac{2\pi}{\lambda}\ l_2\right) \qquad \text{em circuito aberto.}$$

O comprimento l_2 é determinado igualando-se uma dessas equações à equação (8.63).

Para um stub em curto circuito fica

$$-j\cot\left(\frac{2\pi}{\lambda}\ l_2\right) = -j\frac{2\ K_R}{\sqrt{1-{K_R}^2}}$$

$$\therefore \frac{2\pi}{\lambda}\ l_2 = \text{arccot}\left(\frac{2\ K_R}{\sqrt{1-{K_R}^2}}\right), \qquad \text{para } l_2 > 0$$

$$l_2 = \frac{\lambda}{2\pi}\text{arccot}\frac{2\ K_R}{\sqrt{1-{K_R}^2}} = \frac{\lambda}{2\pi}\arctan\frac{\sqrt{1-{K_R}^2}}{2\ K_R}$$

Exemplo

Um gerador com uma impedância interna $Z_G = 75\ \Omega$ é ligado a uma carga resistiva de $300\ \Omega$ através de uma linha sem perdas com impedância característica $Z_c = 75\ \Omega$. O comprimento de onda, na linha, do sinal injetado pelo gerador vale 25 cm. Determinar a posição e o comprimento de um stub em curto circuito, feito com uma linha de transmissão idêntica, de modo a casar a carga com a linha.

Calculemos o coeficiente de reflexão

$$\widetilde{\Gamma}_R = \frac{\widetilde{Z}_L - \widetilde{Z}_c}{\widetilde{Z}_L + \widetilde{Z}_c} = \frac{300-75}{300+75} = 0,60\ \lfloor 0^\circ$$

então

$$\cos(\psi) = -0,60 \qquad \therefore \psi = 126,87^\circ = 2,21 \text{ rad}$$

e de acordo com a equação (8.62)

$$l_1 = \frac{0+2,21}{4\pi} \times 25 = 4,4 \text{ cm.}$$

O comprimento do stub em curto circuito será

$$l_2 = \frac{25}{2\pi}\arctan\frac{\sqrt{1-(0,60)^2}}{2\times 0,60} = 2,3 \text{ cm.}$$

8.5.2 Método gráfico. Cartas para linhas de transmissão

Muitos problemas relativos às linhas de transmissão podem ser resolvidos com facilidade, de modo aproximado, por métodos de resolução gráfica. Alguns gráficos tem sido propostos, porém, o mais utilizado é a "Carta de Smith" apresentada em 1944 por Philip H. Smith. Vejamos os princípios nos quais essa carta é construída.

De acordo com as equações (8.15), (8.16), (8.19) e (8.23) as tensões e as correntes, em $z = -l$, em uma linha de transmissão terminada, podem ser escritas em função do coeficiente de reflexão como:

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}_0^+ \left(\frac{\widetilde{V}_0^-}{\widetilde{V}_0^+} e^{-\widetilde{\gamma} l} + e^{+\widetilde{\gamma} l} \right) = \widetilde{V}_0^+ \left(e^{+\widetilde{\gamma} l} + \widetilde{\Gamma}_R e^{-\widetilde{\gamma} l} \right) \tag{8.64}$$

$$\widetilde{I} = -\frac{\widetilde{V}_0^+}{\widetilde{Z}_c} \left(\frac{\widetilde{V}_0^-}{\widetilde{V}_0^+} e^{-\widetilde{\gamma} l} - e^{\widetilde{\gamma} l} \right) = \frac{\widetilde{V}_0^+}{\widetilde{Z}_c} \left(e^{\widetilde{\gamma} l} - \widetilde{\Gamma}_R e^{-\widetilde{\gamma} l} \right).$$

A impedância de entrada será dada, então, por:

$$\widetilde{Z}_{in} = \widetilde{Z}_c \frac{e^{+\widetilde{\gamma} l} + \widetilde{\Gamma}_R e^{-\widetilde{\gamma} l}}{e^{+\widetilde{\gamma} l} - \widetilde{\Gamma}_R e^{-\widetilde{\gamma} l}} = \widetilde{Z}_c \frac{1 + \widetilde{\Gamma}_R e^{-2\widetilde{\gamma} l}}{1 - \widetilde{\Gamma}_R e^{-2\widetilde{\gamma} l}}$$

que é outra forma de escrever a equação (8.33).

Definamos o coeficiente de reflexão deslocado como

$$\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}_R e^{-2\widetilde{\gamma} l} = \frac{\widetilde{V}_0^- e^{-\widetilde{\gamma} l}}{\widetilde{V}_0^+ e^{\widetilde{\gamma} l}}$$

e teremos para a impedância normalizada

$$\widetilde{Z}_n = \frac{\widetilde{Z}_{in}}{\widetilde{Z}_c}$$

a seguinte expressão:

$$\widetilde{Z}_n = \frac{1 + \widetilde{\Gamma}}{1 - \widetilde{\Gamma}}. \tag{8.65}$$

A impedância normalizada e o coeficiente de reflexão deslocado podem ser escritos na forma retangular em função de suas partes reais e imaginárias

$$\widetilde{Z}_n = r + jx$$

$$\widetilde{\Gamma} = u + j\nu.$$

Por conveniência, escrevamos $\widetilde{\Gamma}$ também na forma polar como $\widetilde{\Gamma} = Ke^{j\theta}$ e o coeficiente $\widetilde{\Gamma}_R$ como $\widetilde{\Gamma}_R = K_R e^{j\theta_R}$. As relações entre K e K_R, θ e θ_R são facilmente encontradas pela definição de $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}_R e^{-2\widetilde{\gamma} l}$.

Uma vez que $\widetilde{\gamma} = \alpha + j\beta$ podemos escrever

$$Ke^{j\theta} = K_R e^{j\theta_R} e^{-2(\alpha + j\beta)l}$$

$$\therefore Ke^{j\theta} = K_R e^{-2\alpha l} e^{j(\theta_R - 2\beta l)}$$

logo

$$K = K_R e^{-2\alpha l} \qquad \text{e} \qquad \theta = \theta_R - 2\beta l.$$

O plano complexo que representa a impedância normalizada é conhecido como plano Z e o que representa $\widetilde{\Gamma}$, como plano Γ.

A equação (8.65) transforma os pontos do plano Γ para o plano Z e vice versa. Essa transformação satisfaz as propriedades que definem uma transformação "bilinear conforme", círculos são mapeados (transformados) em círculos e o ângulo entre dois segmentos de linha é preservado durante o mapeamento.

Encontremos as relações existentes entre as variáveis r, x e u, v através de (8.65) igualando as partes reais e imaginárias desta equação

$$r + jx = \frac{1 + u + jv}{1 - u - jv}$$

$$r + jx = \frac{(1 + u + jv)(1 - u + jv)}{(1 - u)^2 + v^2}$$

$$r + jx = \frac{1 - u^2 - v^2 + 2jv}{(1 - u)^2 + v^2}$$

logo

$$r = \frac{1 - u^2 - v^2}{(1 - u)^2 + v^2} \qquad \text{e} \qquad x = \frac{2v}{(1 - u)^2 + v^2}.$$

Vamos reescrever a primeira equação como:

$$r(1 - u)^2 + rv^2 = 1 - u^2 - v^2$$

$$r - 2ru + ru^2 + rv^2 = 1 - u^2 - v^2$$

$$u^2(r + 1) - 2ur + v^2(r + 1) = 1 - r$$

$$u^2 - 2u\frac{r}{r + 1} + v^2 = \frac{1 - r}{r + 1}.$$

Somando

$$\left(\frac{r}{r + 1}\right)^2$$

nos dois lados fica

$$u^2 - 2u\frac{r}{r + 1} + \left(\frac{r}{r + 1}\right)^2 + v^2 = \frac{1 - r}{r + 1} + \left(\frac{r}{r + 1}\right)^2$$

$$\therefore \left(u - \frac{r}{r + 1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{r + 1}\right)^2. \tag{8.66}$$

Vamos reescrever a segunda equação como:

$$(1 - u)^2 + v^2 = 2\frac{v}{x}$$

$$(u - 1)^2 + v^2 - 2\frac{v}{x} = 0.$$

Somando $1/x^2$ em ambos os lados fica

$$(u-1)^2 + v^2 - 2\frac{v}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$(u-1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}. \tag{8.67}$$

A equação (8.66) é a equação de um círculo centrado em

$$u_0 = \frac{r}{r+1} \qquad \text{e} \qquad v_0 = 0$$

de raio

$$\frac{1}{r+1}.$$

A equação (8.67) também é a equação de um círculo, cujo centro está em $u_0 = 1$ e $v_0 = 1/x$ e de raio $1/x$.

Para cada valor de r no plano Z existe um círculo no plano Γ. Da mesma forma, para cada valor de x no plano Z existe um outro círculo no plano Γ. A interseção dos dois círculos no plano Γ fornece um ponto no plano Z correspondente ao coeficiente de reflexão deslocado $\widetilde{\Gamma}$.

Da equação (8.66) é possível verificar que todos os pontos do plano Z em que r é positivo serão mapeados no interior de um círculo de raio unitário no plano Γ (Fig. 8.14).

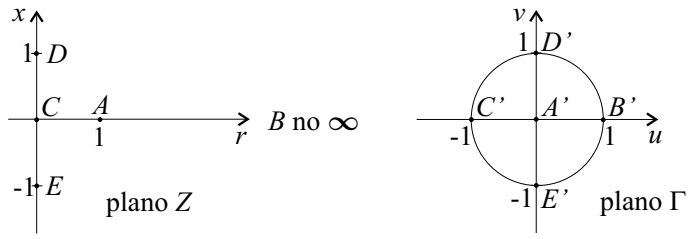


Figura 8.14: Mapeamento do plano Z no plano Γ.

Explicitando $\widetilde{\Gamma}$ em função de $\widetilde{Z}_n$

$$\widetilde{Z}_n = \frac{1+\widetilde{\Gamma}}{1-\widetilde{\Gamma}} \Rightarrow (1-\widetilde{\Gamma})\widetilde{Z}_n = 1+\widetilde{\Gamma}$$

$$\widetilde{Z}_n - \widetilde{\Gamma}Z_n = 1+\widetilde{\Gamma} \qquad \therefore \widetilde{Z}_n - 1 = \widetilde{\Gamma} + \widetilde{\Gamma}Z_n$$

$$\therefore \widetilde{\Gamma} = \frac{\widetilde{Z}_n - 1}{\widetilde{Z}_n + 1} = \frac{r+jx-1}{r+jx+1}$$

logo

$$|\widetilde{\Gamma}| = \frac{|r-1+jx|}{|r+1+jx|} = \frac{\sqrt{(r-1)^2+x^2}}{\sqrt{(r+1)^2+x^2}}.$$

Como, para $r > 0$, o numerador é sempre menor que o denominador, teremos $|\widetilde{\Gamma}| < 1$ e, no limite em que r e $x \longrightarrow \infty$ teremos $\widetilde{\Gamma} \longrightarrow 1$, demonstrando que todos esses pontos no plano Γ são interiores a um círculo de raio 1.

Pode-se verificar facilmente que os pontos A, B, C, D e E no plano Z são mapeados em A', B', C', D' e E' no plano Γ.

A carta de Smith é construída no plano Γ em um círculo de raio unitário. No interior desse círculo são traçados os círculos e os arcos de círculo correspondentes às retas (círculos degenerados) $r = cte$ e $x = cte$ no plano Z pois, para $r = cte$ corresponde um círculo centrado em

$$u_0 = \frac{r}{r+1} \qquad \text{e} \qquad v_0 = 0$$

com raio $1/(r+1)$. Para $x = cte$ corresponde um círculo centrado em $u_0 = 1$ e $v_0 = 1/x$ com raio $1/x$.

A figura (Fig. 8.15) mostra alguns dos círculos obtidos para $r = 0$, $r = 1/2$, $r = 1$ e $r = 2$ e para $x = 0$, $x = \pm 1/2$, $x = \pm 1$ e $x = \pm 2$. Uma impedância normalizada corresponderá a um coeficiente de reflexão deslocado $\widetilde{\Gamma}$ dado pela interseção dos dois círculos.

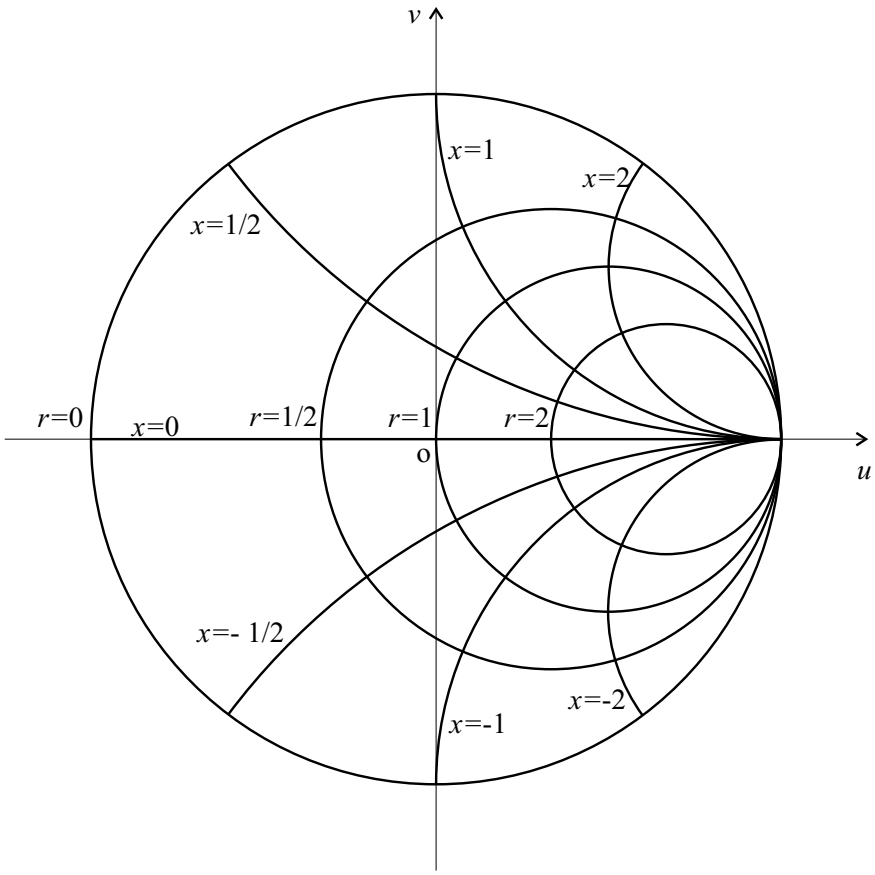


Figura 8.15: Construção da carta de Smith.

Para uma linha sem perdas ($\widetilde{\gamma} = j\beta$) ao variarmos l teremos variações em $\widetilde{\Gamma}$, pois $\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\Gamma}_R e^{-2j\beta l}$, como $\widetilde{\Gamma}_R$ é constante para uma carga fixa, o vetor $\widetilde{\Gamma}$ descreverá um círculo no plano Γ a medida que l variar. Um círculo completo será descrito quando l variar de zero a $\lambda/2$ girando no sentido horário à medida que nos afastamos da carga (Fig. 8.16). Para determinar o valor da impedância normalizada ao longo da linha, à medida que se afasta da carga, basta plotar o vetor $\tilde{\Gamma}$ correspondente ao local da impedância de carga ($\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_R$) e girar esse vetor no sentido horário de um ângulo correspondente, proporcional à distância da carga ($2\beta l$) e ler na carta o valor de Z_n na interseção de um círculo correspondente à r com um arco de círculo correspondente à x.

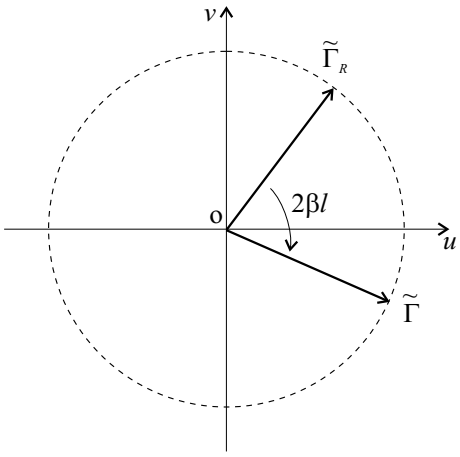


Figura 8.16: Transformação (rotação) de Γ à medida que se avança ao longo da linha de transmissão .

Os pontos correspondetes a uma admitância normalizada $\widetilde{Y}_n = 1/\widetilde{Z}_n$ são facilmente encontrados na carta se observarmos que

$$\widetilde{Y}_n = \frac{1-\widetilde{\Gamma}}{1+\widetilde{\Gamma}}$$

pode ser obtido da expressão da impedância normalizada

$$\widetilde{Z}_n = \frac{1+\widetilde{\Gamma}}{1-\widetilde{\Gamma}}$$

pela troca de $\widetilde{\Gamma}$ por $-\widetilde{\Gamma}$. Isso significa que basta fazer uma inversão do ponto com relação a origem para obter o ponto correspondente (Fig. 8.17).

Da equação (8.64) escrita em função do coeficiente $\widetilde{\Gamma}$ teremos

$$\widetilde{V} = \widetilde{V}_0^+ e^{\widetilde{\gamma} l}(1+\widetilde{\Gamma}).$$

Para uma linha sem perdas ($\widetilde{\gamma} = j\beta$) o módulo da tensão em uma distância l da carga será então (Fig. 8.18),

$$|\widetilde{V}| = |\widetilde{V}_0^+|\,|1+\widetilde{\Gamma}|. \tag{8.68}$$

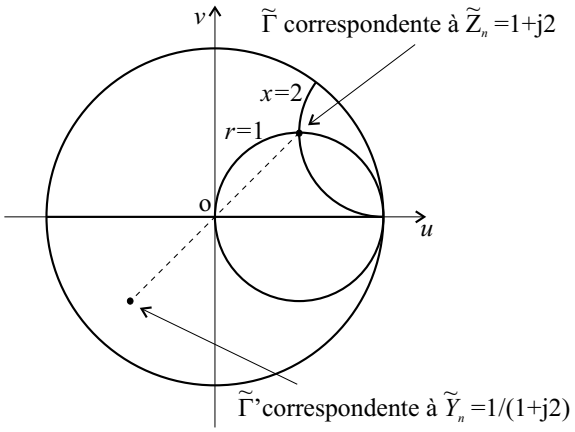


Figura 8.17: Transformação de $\widetilde{\Gamma}$ correspondente à $\widetilde{Z}_n$ para $\widetilde{\Gamma}'$ correspondente à $\widetilde{Y}_n$ na carta de Smith.

Pela equação (8.68) vemos que a máxima tensão ocorrerá quando $\widetilde{\Gamma}$ for paralelo ao vetor 1 e valerá

$$|\widetilde{V}|_{\max} = |\widetilde{V}_0^+|(1 + |\widetilde{\Gamma}|)$$

e o valor mínimo ocorrerá quando $\widetilde{\Gamma}$ for antiparalelo ao vetor 1 valendo

$$|\widetilde{V}|_{\min} = |\widetilde{V}_0^+|(1 - |\widetilde{\Gamma}|).$$

Sendo assim, a razão de tensão de onda estacionária vale

$$RVOE = \frac{|\widetilde{V}|_{\max}}{|\widetilde{V}|_{\min}} = \frac{1 + |\widetilde{\Gamma}|}{1 - |\widetilde{\Gamma}|} = \frac{1 + \left|\widetilde{\Gamma}_R\right|}{1 - \left|\widetilde{\Gamma}_R\right|}. \tag{8.69}$$

Dessa expressão podemos tirar $|\widetilde{\Gamma}|$ em função da $RVOE$

$$|\widetilde{\Gamma}| = \frac{RVOE - 1}{RVOE + 1}. \tag{8.70}$$

Logo, o lugar geométrico dos pontos de $RVOE$ constante será $|\widetilde{\Gamma}| = cte$ que é um círculo.

Para $|\widetilde{\Gamma}|$ variando entre 0 e 1 (círculos de raio entre 0 e 1) teremos a $RVOE$ variando entre 1 e ∞.

Vejamos uma maneira prática de traçar o círculo correspondente a uma determinada $RVOE$ (Fig. 8.19).

O círculo de $RVOE = cte$ corta o eixo ou em u'. Nesse mesmo ponto passa também um círculo correspondente à impedância $Z_n = r + jx$ com $x = 0$. Procuremos relacionar o valor da $RVOE$ com valor de r. Da equação (8.69) temos que

$$RVOE = \frac{1 + u'}{1 - u'}$$

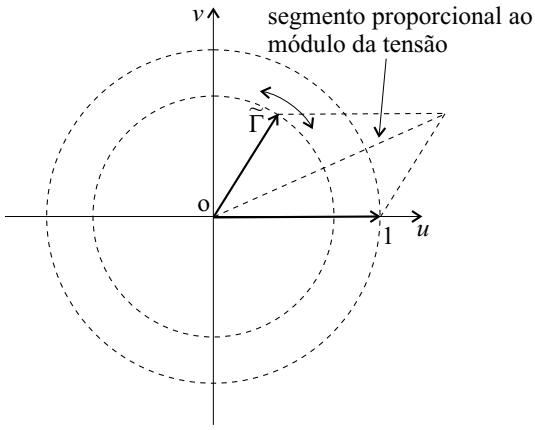


Figura 8.18: Soma vetorial de $\widetilde{\Gamma}'$ com o vetor unitário na carta de Smith resultando em um vetor cujo módulo é proporcional ao módulo da tensão em um ponto da linha a uma distância l da carga.

mas $1 - u'$ é diâmetro do círculo correspondente a $r = cte$, ou seja,

$$1 - u' = 2\frac{1}{r+1}, \qquad \therefore u' = 1 - \frac{2}{r+1}, \qquad \therefore 1 + u' = 2 - \frac{2}{r+1}$$

então

$$RVOE = \frac{2 - \frac{2}{r+1}}{\frac{2}{r+1}} = \frac{1 - \frac{1}{r+1}}{\frac{1}{r+1}} = (r+1)\left(1 - \frac{1}{r+1}\right) = r$$

$$\therefore RVOE = r.$$

Como na carta de Smith o eixo horizontal está graduado com os valores de r, para traçar um círculo de $RVOE$ constante basta colocar uma das pontas do compasso no meio da carta e a outra no valor desejado da $RVOE = r$.

O exemplo seguinte (Fig. 8.20) mostra o círculo correspondente a uma $RVOE = 2$.

A carta de Smith toma uma forma mais completa colocando-se na periferia escalas de comprimento de onda ou ângulo de fase do coeficiente de reflexão deslocado $\widetilde{\Gamma}$.

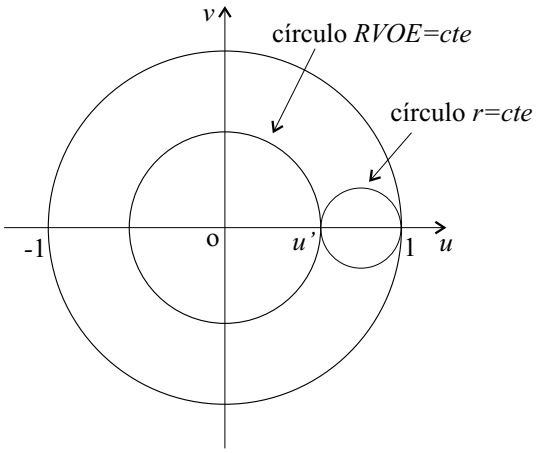


Figura 8.19: Traçado do círculo de $RVOE = cte$.

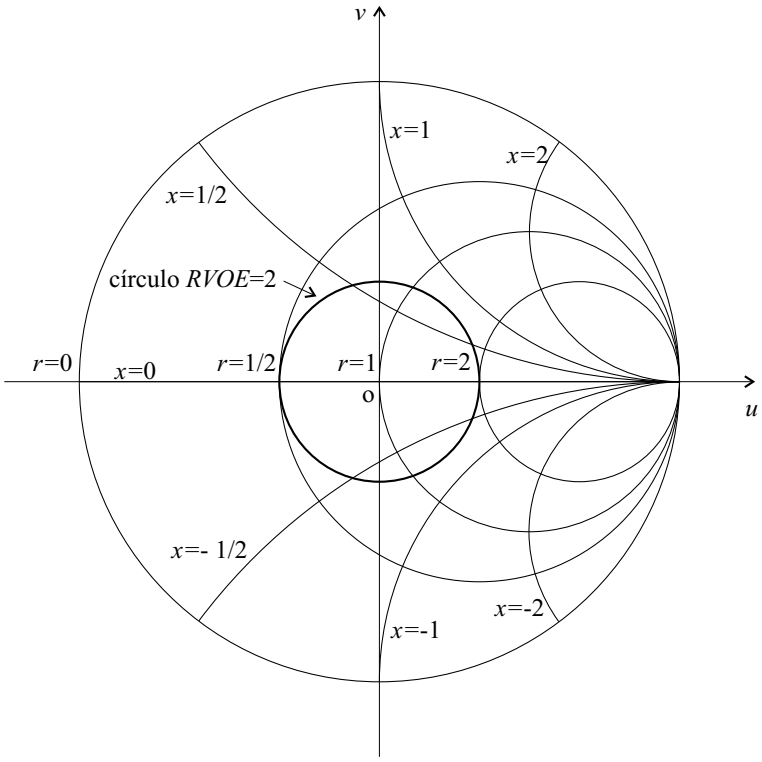


Figura 8.20: Traçado do círculo de $RVOE = 2$.

Exemplo

Vejamos como resolver o exemplo anterior utilizando a carta de Smith: Inicialmente marcamos na carta o ponto correspondente à impedância de carga normalizada $Z_n = 300\,/\,75 = 4$ sobre o eixo horizontal, já que a impedância é puramente resistiva. Em seguida, fazemos a reflexão desse ponto com relação à origem (ao centro da carta) para encontrar a admitância normalizada, também real nesse caso (Fig. 8.21).

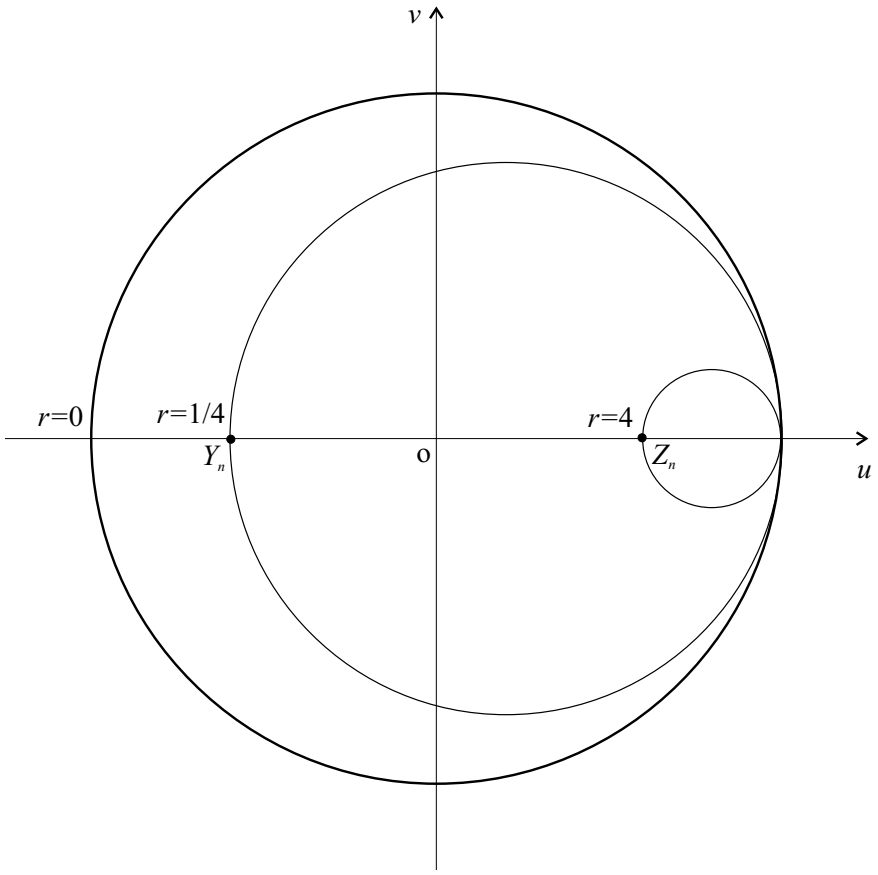


Figura 8.21: Impedância de carga normalizada e correspondente admitância na carta de Smith.

Gira-se esse ponto no sentido horário com relação ao centro até interceptar o círculo correspondente à $r = 1$ para obter uma admitância normalizada $Y_n = 1 + jS$ e mede-se o ângulo de giro que será convertido em comprimento normalizado da linha. Esse comprimento normalizado também pode ser medido na escala externa da carta, se houver (Fig. 8.22). Esse comprimento é a distância a partir da carga onde será colocado o stub. O valor do ângulo de giro medido no gráfico vale $\approx\ 127°$ que corresponde a

$$l_1 = \frac{127}{360}\,\frac{\lambda}{2} = \frac{127}{360}\,\frac{25}{2} \approx 4,4 \text{ cm}.$$

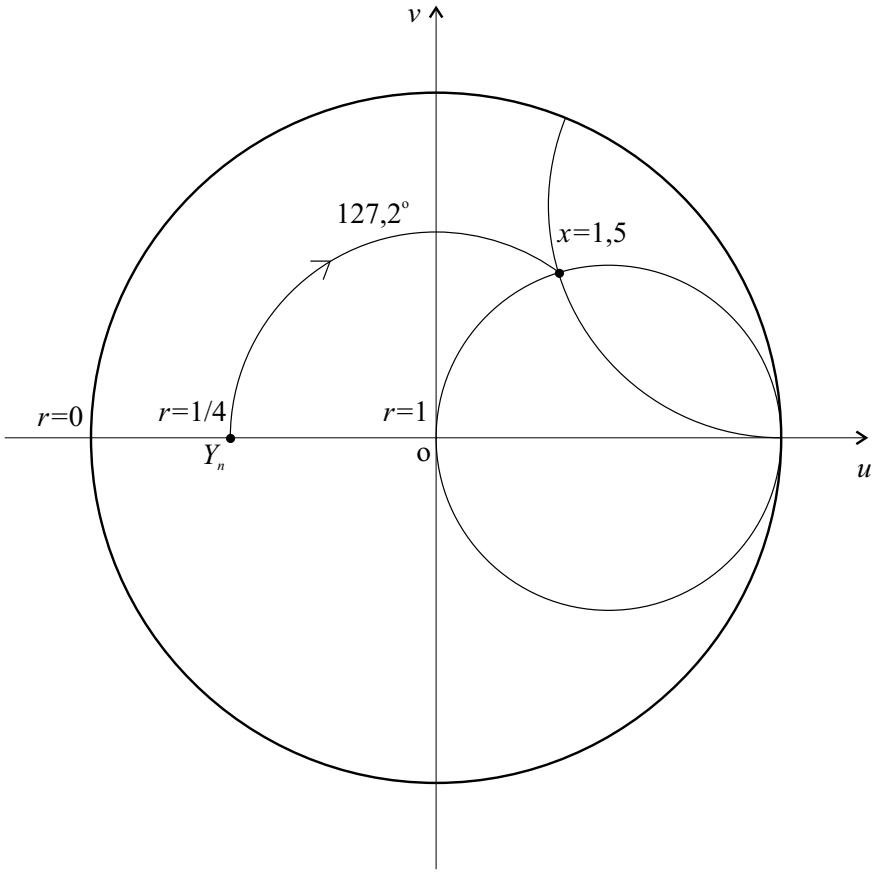


Figura 8.22: Transformação da admitância na carta de Smith.

O próximo passo é determinar o comprimento do stub a partir da admitância normalizada $Y_n = 1 + jS$ lida na carta (Fig. 8.22). Para isso, marca-se o ponto correspondente a admitância $Y_n = 0 - jS = 0 - j1,5$ na carta, interseção do círculo $r = 0$ com o arco de círculo $x = -S = -1,5$ (Fig. 8.23) e mede-se o ângulo deste até o ponto $r = 0$, $x = \infty$ (para stub em curto circuito, admitância infinita) para depois convertê-lo em comprimento normalizado ou lê-se o comprimento normalizado da linha na escala. Esse será o comprimento do stub.

O valor do ângulo de giro medido no gráfico vale $\approx\ 67,5°$ que corresponde a

$$l_2 = \frac{67,5}{360}\,\frac{\lambda}{2} = \frac{67,5}{360}\,\frac{25}{2} \approx 2,3 \text{ cm}.$$

Esses resultados estão em perfeito acordo com os resultados obtidos anteriormente utilizando o método analítico.

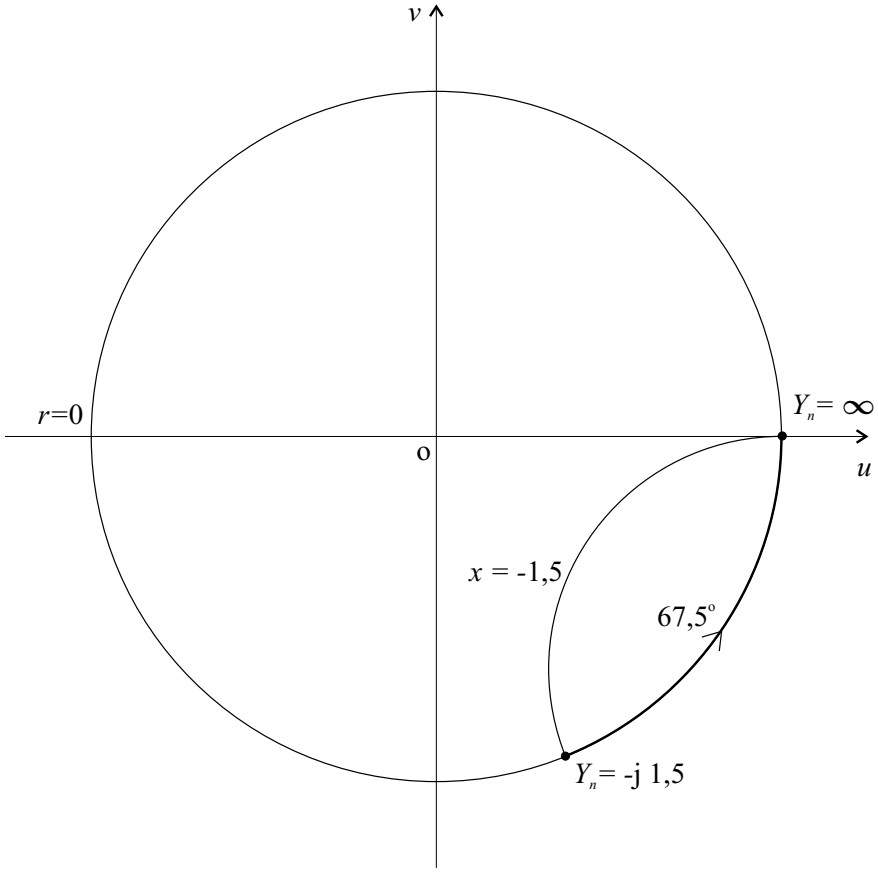


Figura 8.23: Determinação do ângulo de giro da admitância $Y_n = 0 - jS$ até o ponto correspondente à $Y_n = \infty$ na carta de Smith.

Capítulo 9

Radiação

Nos capítulos anteriores tratamos o campo eletromagnético variável no tempo como uma perturbação ondulatória com diversos modos de propagação sem nos preocuparmos com a produção ou a criação dessa onda. Nosso objetivo, agora, é mostrar como isso acontece, ou seja, associar o campo eletromagnético às fontes.

A existência da perturbação ondulatória para o campo eletromagnético pressupõe que os vetores **E** e **B** (ou **D** e **H**) sejam variáveis no tempo. A pergunta que cabe é: como foi iniciada essa variação? Em algum momento, as fontes primárias estáticas dos vetores **E** e **B**, as cargas elétricas e as correntes, devem ter sofrido uma variação nos seus estados (por exemplo, uma oscilação) de modo a variar os valores de **E** e **B** em todos os pontos do espaço.

A intuição nos diz, e a experiência comprova, que uma variação nas fontes não é percebida instantâneamente em todos os pontos do espaço como uma variação nos vetores **E** e **B**, ou seja, existe um lapso de tempo, que depende da distância entre as fontes e o ponto onde estamos medindo **E** e **B**, entre o instante em que variamos a fonte e o instante em que se observa as variações em **E** e **B**. Nossa intuição está baseada no fato das ondas harmônicas terem uma velocidade finita de propagação e na generalização disso para qualquer tipo de perturbação. De fato, essa intuição tem um respaldo formal pois qualquer perturbação físicamente realizável produz variações em **E** e **B** que podem ser decompostas em uma superposição de ondas harmônicas via uma transformação de Laplace (ou de Fourier se for o caso) de modo que a velocidade da perturbação (velocidade de grupo) é sempre finita.

O problema da radiação é, portanto, o de relacionar as variações nas fontes, em um determinado instante e posição, com as variações nos vetores **E** e **B** em outros instantes e posições. Isso pode ser conseguido manipulando as equações de Maxwell de duas maneiras equivalentes que resultarão no método dos potênciais vetoriais e no método dos vetores de Hertz. Nos restringiremos ao método dos potênciais vetoriais.

Relembremos as equações de Maxwell na forma diferencial

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \tag{9.1}$$

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{9.2}$$

$$div\ \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{9.3}$$

$$div\ \mathbf{H} = 0 \tag{9.4}$$

com

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \qquad \varepsilon \text{ e } \mu \text{ constantes.} \tag{9.5}$$

Já vimos que a equação (9.4) é equivalente a escrever a indução magnética $\mathbf{B}$ em função do potencial vetorial $\mathbf{A}$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mathbf{rot}\ \mathbf{A} \tag{9.6}$$

e que essa equação junto com a equação (9.2) nos permite concluir que

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{9.7}$$

Agora, substituindo (9.6) e (9.7) em (9.1) temos

$$\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathbf{rot}\ \mathbf{A}\right) = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathbf{grad}\ \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) + \mathbf{J}$$

$$\therefore \mathbf{rot\ rot}\ \mathbf{A} = -\mu\varepsilon\mathbf{grad}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu\mathbf{J}.$$

Utilizando a identidade

$$\mathbf{rot\ rot}\ \mathbf{A} = \mathbf{grad}\,(div\ \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

temos

$$\mathbf{grad}\,(div\ \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} = -\mu\varepsilon\mathbf{grad}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \mu\mathbf{J}$$

ou

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu\varepsilon\mathbf{grad}\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\mu\varepsilon}\ div\ \mathbf{A}\right) - \mu\mathbf{J}. \tag{9.8}$$

Essa equação envolve o potencial vetorial $\mathbf{A}$ e o potencial escalar ϕ de modo que necessitamos de mais uma equação para que passamos resolvê-la. Substituindo (9.7) em (9.3) temos

$$div\left(-\mathbf{grad}\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

ou

$$\nabla^2\phi + div\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{9.9}$$

As equações (9.8) e (9.9) formam um sistema de equações acopladas a ser resolvido. Contudo, a solução que possa vir a ser encontrada para o vetor $\mathbf{A}$ não será única pois, pelo teorema de Helmholtz, um campo vetorial devido à fontes finitas só está completamente especificado, de modo único, se for conhecido seu rotacional e seu divergente. Apenas o rotacional do vetor $\mathbf{A}$ é conhecido através da equação (9.6), falta conhecer o divergente de $\mathbf{A}$. Além disso, existe ainda um certo grau de arbitrariedade no potencial escalar ϕ, pois o mesmo pode ser acrescido de uma outra função ϕ' e a equação (9.7) ainda permenecerá válida uma vez que $\mathbf{rot\ grad}\ (\phi + \phi') = 0$.

Analisando a equação (9.8) vemos que se impusermos a condição

$$div\mathbf{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

teremos um sistema desacoplado dado por

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J} \tag{9.10}$$

e

$$\nabla^2 \phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \tag{9.11}$$

A condição

$$div\mathbf{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{9.12}$$

é conhecida como "condição de calibre de Lorentz". Outras condições de calibre também foram propostas mas a condição de Lorentz é a que permite levar em conta o atraso entre uma variação na fonte e a variação no potencial correspondente em um outro ponto do espaço.

A equação (9.10) representa três equações escalares idênticas, na forma, à equação (9.11). Ou seja, tanto as coordenadas do potencial vetorial $\mathbf{A}$ quanto o potencial escalar ϕ devem satisfazer à equação de onda com fonte

$$\nabla^2 \Phi - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\xi(x, y, z). \tag{9.13}$$

A resolução formal dessa equação utilizando o método de integração de Kirchhoff nos leva a encontrar[1]

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{1}{R} \xi \left(x', y', z',\ t - \frac{R}{v} \right) dV'$$

com

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \tag{9.14}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \qquad \text{(velocidade de propagação).}$$

O tempo $t' = t - R/v$ é o tempo retardado, sendo R/v o intervalo de tempo necessário para que uma perturbação na fonte no tempo t' e na posição (x', y', z') seja percebida no potencial Φ no tempo t e na posição (x, y, z). A função Φ é conhecida como potencial retardado. Também é possível encontrar uma solução envolvendo o tempo avançado $t' = t + R/v$, contudo essa solução não é coerente com a noção de causa e efeito a que estamos acostumados a presenciar nos fenômenos físicos, de forma que não a levaremos em conta. [1]

Portanto, os potênciais serão dados por:

$$\mathbf{A}\ (\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/v)}{R} dV' \tag{9.15}$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}',\ t - R/v)}{R} dV'. \tag{9.16}$$

Em resumo, conhecendo-se as distribuições de cargas elétricas e densidades de correntes podemos calcular os potenciais $\mathbf{A}$ e ϕ por intermédio de (9.15) e (9.16). Posteriormente, podemos determinar os vetores $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ por intermédio de (9.6) e (9.7).

[1] J. A. Stratton, Eletromagnetic Theory. McGraw - Hill Book Campany, New York, 1941, p. 429

De modo alternativo, devido à condição de calibre de Lorentz que adotamos, não é necessário calcular (9.16). Calculamos **A** por (9.15) e em seguida **H** por (9.6) e **E** pela equação de Maxwell (9.1) após integrar no tempo.

9.1 Radiação para oscilações senoidais

Um caso particular de especial importância é a situação em que as fontes oscilam senoidalmente em regime permanente. Consideremos, em notação complexa o termo

$$e^{j(\omega t - KR)}$$

para representar a variação harmônica, no tempo e no espaço, no regime permanente sendo $\omega = Kv$. Teremos

$$\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}')\frac{e^{j(\omega t - KR)}}{R}\, dV' \tag{9.17}$$

$$\widetilde{\phi}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'} \widetilde{\rho}(\mathbf{r}')\frac{e^{j(\omega t - KR)}}{R}\, dV'. \tag{9.18}$$

Logo,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\omega^2 \widetilde{\mathbf{A}} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 \widetilde{\phi}}{\partial t^2} = -\omega^2 \widetilde{\phi}.$$

As equações (9.10) e (9.11) tornam-se

$$\nabla^2 \widetilde{\mathbf{A}} + \omega^2 \mu\varepsilon \widetilde{\mathbf{A}} = -\mu \widetilde{\mathbf{J}} \tag{9.19}$$

$$\nabla^2 \widetilde{\phi} + \omega^2 \mu\varepsilon \widetilde{\phi} = -\frac{\widetilde{\rho}}{\varepsilon}. \tag{9.20}$$

Essas equações tem a forma da equação de onda com fontes de Helmholtz.

A condição de calibre de Lorentz,

$$div\mathbf{A} = -\mu\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

pode ser escrita como:

$$div\widetilde{\mathbf{A}} = -j\omega\mu\varepsilon\widetilde{\phi}. \tag{9.21}$$

Como podemos expressar $\widetilde{\mathbf{H}}$ e $\widetilde{\mathbf{E}}$ apenas em função de $\widetilde{\mathbf{A}}$, uma vez que

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu}\mathbf{rot}\ \widetilde{\mathbf{A}},$$

e

$$\widetilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad}\widetilde{\phi} - \frac{\partial \widetilde{\mathbf{A}}}{\partial t} = -\mathbf{grad}\widetilde{\phi} - j\omega\widetilde{\mathbf{A}},$$

substituindo $\widetilde{\phi}$ de acordo com (9.21) temos

$$\widetilde{\mathbf{E}} = -\mathbf{grad}\left(-\frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}div\widetilde{\mathbf{A}}\right) - j\omega\widetilde{\mathbf{A}}$$

ou

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\mu\varepsilon}\mathbf{grad}div\widetilde{\mathbf{A}} - j\omega\widetilde{\mathbf{A}}. \tag{9.22}$$

Uma outra opção equivalente para determinar o vetor $\widetilde{\mathbf{E}}$ é utilizar a equação de Maxwell para o rotacional do vetor $\widetilde{\mathbf{H}}$, equação (9.1), para campos oscilantes senoidais

$$\mathbf{rot}\ \widetilde{\mathbf{H}} = j\omega\varepsilon\widetilde{\mathbf{E}} + \widetilde{\mathbf{J}} \tag{9.23}$$

$$\therefore \widetilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}(\mathbf{rot}\ \widetilde{\mathbf{H}} - \widetilde{\mathbf{J}}). \tag{9.24}$$

9.1.1 Dipolo oscilante

Vejamos um exemplo de aplicação dessa teoria.

Consideremos um pequeno elemento de fio de dimensões infinitesimais (quando comparado ao comprimento de onda da radiação) por onde flui uma corrente I constante ao longo do comprimento com uma variação senoidal no tempo. Evidentemente que trata-se de um exemplo abstrato uma vez que é impossível produzi-lo. Contudo, trata-se de um exemplo importante uma vez que uma antena real pode ser construída com uma infinidade desses pequenos elementos de fio. Cada elemento de fio infinitesimal comporta-se como um dipolo elétrico oscilante estando as cargas elétricas se movimentando de um extremo ao outro do fio.

Coloquemos, por comodidade, o elemento de fio de comprimento l, na origem de um sistema coordenado alinhado com o eixo oz (Fig. 9.1).

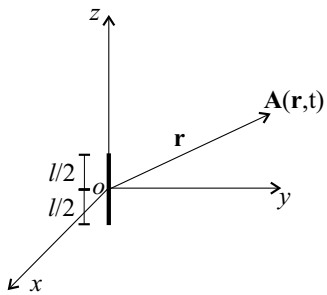


Figura 9.1: Elemento de fio com comprimento l, alinhado com o eixo z e na origem do sistema de referência.

Determinemos o potencial vetorial $\widetilde{\mathbf{A}}$ em um ponto qualquer do espaço excluindo a origem.

Da equação (9.17) temos

$$\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}')\frac{e^{j(\omega t - KR)}}{R}\, dV'.$$

Como trata-se de um fio elementar, tão fino quanto se queira, temos

$$\mathbf{J}dV' = Id\mathbf{l}'.$$

Então

$$\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2} I\frac{e^{j(\omega t-KR)}}{R}d\mathbf{l}'. \tag{9.25}$$

Como as dimensões do dipolo são muito pequenas, a distância R de um ponto do dipolo ao ponto onde se deseja determinar o valor do vetor $\widetilde{\mathbf{A}}$ é praticamente a distância r medida a partir da origem

$$R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \approx \sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$$

pois $x' = y' = z' \approx 0$ para um dipolo infinitesimal.

Portanto,

$$\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}I\frac{e^{j(\omega t-Kr)}}{r}\int_{-l/2}^{l/2} dz'\widehat{\mathbf{z}}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu Il\ e^{j(\omega t-Kr)}}{4\pi r}\ \widehat{\mathbf{z}} \tag{9.26}$$

Em coordenadas esféricas, observando que $\widetilde{A}_x = \widetilde{A}_y = 0$, teremos

$$\widetilde{A}_r = \widetilde{A}_z\cos(\theta)$$

$$\widetilde{A}_\theta = -\widetilde{A}_z\ \mathrm{sen}\,(\theta)$$

$$\widetilde{A}_\phi = 0 \qquad \text{(simetria axial)}$$

logo

$$\widetilde{A}_r = \frac{\mu Il\ e^{j(\omega t-Kr)}}{4\pi r}\ \cos(\theta) \tag{9.27}$$

$$\widetilde{A}_\theta = -\frac{\mu Il\ e^{j(\omega t-Kr)}}{4\pi r}\ \mathrm{sen}\,(\theta) \tag{9.28}$$

$$\widetilde{A}_\phi = 0. \tag{9.29}$$

Calculemos agora o vetor $\widetilde{\mathbf{H}}$ a partir da equação $\widetilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu}\mathbf{rot}\ \widetilde{\mathbf{A}}$ em coordenadas esféricas

$$\mathbf{rot}\ \widetilde{\mathbf{A}} = \frac{1}{r\ \mathrm{sen}\,(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\mathrm{sen}\,(\theta)\ \widetilde{A}_\phi) - \frac{\partial\widetilde{A}_\theta}{\partial\phi}\right]\widehat{\mathbf{e}}_r + \left[\frac{1}{r\ \mathrm{sen}\,(\theta)}\frac{\partial\widetilde{A}_r}{\partial\phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\widetilde{A}_\phi)\right]\widehat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\widetilde{A}_\theta) - \frac{\partial\widetilde{A}_r}{\partial\theta}\right]\widehat{\mathbf{e}}_\phi.$$

Teremos então

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(-\frac{\mu Il}{4\pi r}e^{j(\omega t-Kr)}\mathrm{sen}\,(\theta)\right)\right] - \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\mu Il}{4\pi r}e^{j(\omega t-Kr)}\cos(\theta)\right]\right\}\widehat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \frac{Il}{4\pi}\left[\frac{1}{r}jKe^{j(\omega t-Kr)}\mathrm{sen}\,(\theta) + \frac{1}{r^2}e^{j(\omega t-Kr)}\mathrm{sen}\,(\theta)\right]\widehat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \frac{Il}{4\pi}\, e^{j(\omega t - Kr)} \text{sen}\,(\theta) \left(\frac{jK}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \widehat{\mathbf{e}}_\phi$$

$$\widetilde{\mathbf{H}} = \frac{Il}{4\pi}\, e^{j(\omega t - Kr)} \text{sen}\,(\theta)\, \frac{jK}{r} \left(1 + \frac{1}{jKr} \right) \widehat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{9.30}$$

Calculemos agora o vetor $\widetilde{\mathbf{E}}$ utilizando (9.24) para pontos fora da origem

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\, \mathbf{rot}\, \widetilde{\mathbf{H}}.$$

Em coordenadas esféricas temos

$$\mathbf{rot}\, \widetilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{r\text{sen}\,(\theta)} \frac{\partial \left[\text{sen}\,(\theta)\, \widetilde{H}_\phi \right]}{\partial_\theta}\, \widehat{\mathbf{e}}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \widetilde{H}_\phi)\, \widehat{\mathbf{e}}_\theta$$

$$\therefore \widetilde{E}_r = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r\text{sen}\,(\theta)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\frac{Il}{4\pi} e^{j(\omega t - Kr)} \text{sen}^2\,(\theta)\, \frac{jK}{r} \left(1 + \frac{1}{jKr} \right) \right]$$

$$\widetilde{E}_r = \frac{Il}{j\omega\varepsilon 2\pi} e^{j(\omega t - Kr)} \cos\,(\theta)\, \frac{jK}{r^2} \left(1 + \frac{1}{jKr} \right)$$

$$\widetilde{E}_r = \frac{IlK\cos(\theta)}{2\pi\omega\varepsilon r^2} \left(1 + \frac{1}{jKr} \right) e^{j(\omega t - Kr)} \tag{9.31}$$

e

$$\widetilde{E}_\theta = -\frac{1}{j\omega\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{Il}{4\pi} e^{j(\omega t - Kr)} \text{sen}(\theta) \frac{jK}{r} \left(1 + \frac{1}{jKr} \right) \right]$$

$$\widetilde{E}_\theta = -\frac{Il\text{sen}(\theta) jK}{j\omega\varepsilon 4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 + \frac{1}{jKr} \right) e^{j(\omega t - Kr)} \right]$$

$$\widetilde{E}_\theta = -\frac{Il\text{sen}(\theta) K}{\omega\varepsilon 4\pi r} \left[-jK + \frac{(-jK)r - 1}{jKr^2} \right] e^{j(\omega t - Kr)}$$

$$\widetilde{E}_\theta = \frac{Il\text{sen}(\theta) K}{\omega\varepsilon 4\pi r} \left[jK + \frac{1}{r} + \frac{1}{jKr^2} \right] e^{j(\omega t - Kr)}$$

$$\widetilde{E}_\theta = j \frac{Il\text{sen}(\theta) K^2}{\omega\varepsilon 4\pi r} \left[1 + \frac{1}{jKr} - \frac{1}{(Kr)^2} \right] e^{j(\omega t - Kr)}. \tag{9.32}$$

Em resumo

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_\phi &= \frac{Il}{4\pi} \text{sen}\,(\theta)\, \frac{jK}{r} \left(1 + \frac{1}{jKr} \right) e^{j(\omega t - Kr)} \qquad (9.33)\\
\widetilde{H}_r &= \widetilde{H}_\theta = 0 \\
\widetilde{E}_r &= \frac{Il}{2\pi} \cos(\theta) \frac{K}{\omega\varepsilon r^2} \left(1 + \frac{1}{jKr} \right) e^{j(\omega t - Kr)} \\
\widetilde{E}_\theta &= j \frac{Il}{4\pi} \text{sen}(\theta) \frac{K^2}{\omega\varepsilon r} \left[1 + \frac{1}{jKr} - \frac{1}{(Kr)^2} \right] e^{j(\omega t - Kr)} \\
\widetilde{E}_\phi &= 0.
\end{aligned}$$

Observemos a presença de termos do tipo $1/r$, $1/r^2$ e $1/r^3$. Para pontos muito próximos ao elemento de fio predomina o termo de maior ordem enquanto que para pontos distantes (longe do fio) predomina o termo $1/r$. Para se ter idéia da ordem de grandeza das distâncias envolvidas, consideremos em H_ϕ a situação em que o termo $1/r$ se iguala, em módulo, ao termo $1/r^2$ ou seja

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{|jKr^2|}, \qquad \therefore Kr = 1, \qquad \therefore r = \frac{1}{K} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

ou

$$r \approx \frac{\lambda}{6}\,.$$

Lembremos ainda da hipótese inicial, o comprimento do elemento de fio é muito menor que o comprimento de onda λ para que a corrente possa ser considerada constante ao longo desse elemento.

Observemos ainda que, em geral, o vetor $\mathbf{K}$ não é perpendicular ao vetor $\mathbf{E}$ pois $\mathbf{E}$ possui um componente radial que só será desprezível a grandes distâncias. A onda só poderá ser considerada como transversal a distâncias grandes quando comparada com o comprimento de onda ($Kr >> 1$).

É surpreendente que um simples elemento de fio possa produzir um campo eletromagnético de tal complexidade. Podemos ter uma melhor compreensão da natureza desse campo estudando a propagação da energia. A potência total irradiada pelo elemento pode ser determinada pela integração do vetor de Poynting em uma superfície esférica que envolva o elemento de fio.

O vetor de Poynting complexo foi definido pela equação (6.139)

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \frac{\widetilde{\mathbf{E}}_0 \times \widetilde{\mathbf{H}}_0^*}{2}$$

portanto

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\widetilde{E}_{0r}\hat{\mathbf{e}}_r + \widetilde{E}_{0\theta}\hat{e}_\theta) \times (\widetilde{H}_{0\phi}^*\hat{\mathbf{e}}_\phi)$$

$$\therefore \widetilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\widetilde{E}_{0\theta}\widetilde{H}_{0\phi}^*\hat{\mathbf{e}}_r - \widetilde{E}_{0r}\widetilde{H}_{0\phi}^*\hat{\mathbf{e}}_\theta). \tag{9.34}$$

A potência complexa será dada pelo fluxo do vetor $\widetilde{\mathbf{S}}$ por uma superfície esférica centrada no elemento

$$\widetilde{P} = \oint_S \widetilde{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r r^2 \mathrm{sen}\,(\theta)\, d\theta d\phi$$

$$\widetilde{P} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \widetilde{S}_r r^2 \mathrm{sen}\,(\theta)\, d\theta d\phi$$

com

$$\widetilde{S}_r = \frac{1}{2}\widetilde{E}_{0\theta}\widetilde{H}_{0\phi}^* = \frac{1}{2}\left\{\frac{jIl}{4\pi}\mathrm{sen}\,(\theta)\,\frac{K^2}{\omega\varepsilon r}\left[1 + \frac{1}{jKr} - \frac{1}{(Kr)^2}\right]e^{-jKr}\right\}$$

$$\left\{\frac{Il}{4\pi}\mathrm{sen}\,(\theta)\,\frac{jK}{r}\left[1 + \frac{1}{jKr}\right]e^{-jKr}\right\}^*$$

$$\therefore \widetilde{S}_r = \frac{1}{2}\left(\frac{Il}{4\pi}\right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)\, K^3}{r^2\omega\varepsilon}\left[1 - \frac{j}{(Kr)^3}\right]$$

$$\therefore \widetilde{S}_r = \frac{1}{8}\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)\, K}{r^2\omega\varepsilon}\left[1 - \frac{j}{(Kr)^3}\right]$$

ou

$$\therefore \widetilde{S}_r = \frac{\eta}{8}\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{r^2}\left[1 - \frac{j}{(Kr)^3}\right]$$

com

$$\eta = \frac{K}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}.$$

Portanto,

$$\widetilde{P} = \frac{\eta}{8}\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2 \left[1 - \frac{j}{(Kr)^3}\right] \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3(\theta)\, d\theta d\phi.$$

Mas

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3(\theta)\, d\theta = \left[-\frac{\cos(\theta)}{3}\left[\operatorname{sen}^2(\theta) + 2\right]\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}$$

logo

$$\widetilde{P} = \frac{\eta}{8}\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2 \left[1 - \frac{j}{(Kr)^3}\right] 2\pi\frac{4}{3}$$

$$\widetilde{P} = \frac{\eta\pi}{3}\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2 \left[1 - \frac{j}{(Kr)^3}\right]. \tag{9.35}$$

A potência média irradiada que atravessa a superfície esférica é dada pela parte real da potência complexa (observe que trata-se da média temporal)

$$< P >= R_e\{\widetilde{P}\}$$

$$< P >= \eta\frac{\pi}{3}\left(\frac{Il}{\lambda}\right)^2 = \eta\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{2}I_{ef}l}{\lambda}\right)^2.$$

Podemos definir a resistência de radiação como sendo uma resistência equivalente que dissipe essa mesma potência

$$< P >= R_{rad}I_{ef}^2$$

portanto

$$R_{rad} = \eta\frac{\pi}{3}2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \tag{9.36}$$

No vácuo $\eta \approx 120\pi$, logo

$$R_{rad} = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2. \tag{9.37}$$

Portanto, no que tange à potência média irradiada, tudo se passa como se o elemento de fio, tivesse esse valor de resistência.

É interessante observar quais termos dos vetores **E** e **H** contribuem para a potência média irradiada. Podemos observar que, na integral do cálculo do fluxo do vetor de Poynting a dependência com r^2 foi cancelada na parte real da potência complexa. Os termos que originaram esse cancelamento foram os termos em $1/r$ em $\widetilde{E}_{0\theta}$ e $\widetilde{H}^*_{0\phi}$.

Sendo assim, apenas os termos em $1/r$ correspondentes ao campo distante, são responsáveis pela potência média irradiada. Os outros termos contribuem para o valor da potência instântanea, mas na média temporal, a contribuição é nula. Por esse motivo, costuma-se chamar o termo em $1/r$ de termo de radiação, o termo $1/r^2$ de termo de indução e o termo em $1/r^3$ de termo eletrostático, por causa do campo eletrostático de um dipolo que também possui esse tipo de variação.

Conforme afirmamos anteriormente, um elemento de fio com uma corrente ao longo do seu comprimento é uma abstração dado a impossibilidade de realizá-lo. Talvez, o elemento irradiante mais simples que possamos construir seja o dipolo alimentado pelo centro. Consiste em dois pedaços de fio retos, de mesmo comprimento e extremamente finos conectados a uma fonte de tensão ou de corrente variável no tempo conforme a figura (Fig. 9.2).

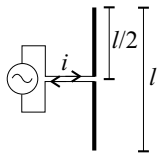


Figura 9.2: Dipolo elétrico alimentado pelo centro.

Em princípio, se conhecemos como a corrente está distribuída ao longo do fio, podemos determinar os vetores **E** e **H** em todos os pontos do espaço. Contudo, não sabemos como a corrente se distribui ao longo do fio. Na verdade, este é um problema de aplicação das equações de Maxwell com determinadas condições de contorno bastante difícil de se resolver analiticamente. Abraham mostrou que para elipsóides infinitamente finos a corrente tem uma distribuição senoidal. Contudo, o mesmo não pode ser afirmado para outras formas geométricas em virtude da dificuldade de encontrar a solução correta.

Costuma-se assumir uma distribuição senoidal para a corrente ao longo do comprimento do fio, devendo a mesma anular-se nos extremos. Tal hipótese é justificada pelos resultados experimentais obtidos.

Consideraremos um dipolo alinhado com o eixo oz e cujo centro coincide com a origem do sistema de referência (Fig. 9.3).

Para determinar os vetores **E** e **H** no ponto P podemos, inicialmente, determinar o potencial vetorial e em seguida esses vetores, ou então considerar diretamente as contribuições infinitensinais $d\mathbf{E}$ e $d\mathbf{H}$ produzidas por um pedaço infinitesimal de fio com uma corrente constante utilizando os resultados do exemplo anterior. Utilizaremos essa segunda abordagem e nos restringiremos apenas ao cálculo do campo distante.

Tomaremos a seguinte distribuição de corrente ao longo do fio

$$I(x',y',z') = \begin{array}{ll} \widetilde{I}_0 \mathrm{sen}\left[K\left(\frac{l}{2}-z'\right)\right]\overset{\wedge}{\mathbf{e}}_z, & 0 \le z' \le \frac{l}{2} \\ \widetilde{I}_0 \mathrm{sen}\left[K\left(\frac{l}{2}+z'\right)\right]\overset{\wedge}{\mathbf{e}}_z, & -\frac{l}{2} \le z' \le 0 \end{array}$$

ou seja, uma variação senoidal que se anula nos extremos do fio.

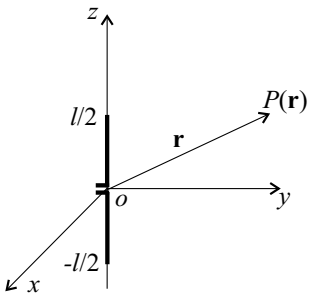


Figura 9.3: Dipolo elétrico na origem e alinhado com o eixo oz.

Utilizando as expressões desenvolvidas no exemplo anterior, equação (9.33), para o campo distante de um elemento infinitesimal de fio de comprimento dz' teremos

$$d\widetilde{H}_\phi = \frac{I(x',y',z')}{4\pi}\,\mathrm{sen}\,(\theta)\,\frac{jK}{R}e^{j(\omega t - KR)}dz' \tag{9.38}$$

$$d\widetilde{E}_\theta = \frac{I(x',y',z')}{4\pi}\,\mathrm{sen}\,(\theta)\,\frac{jK^2}{\omega\varepsilon R}e^{j(\omega t - KR)}\,dz' \tag{9.39}$$

$$\begin{aligned} d\widetilde{E}_r &\approx 0 \qquad \text{(para o campo distante)} \\ d\widetilde{E}_\phi &= d\widetilde{H}_r = d\widetilde{H}_\theta = 0 \end{aligned} \tag{9.40}$$

Observar que R é a distância do elemento dz' ao ponto distante onde se deseja determinar os vetores **E** e **H**. O fator sen(θ) nas duas expressões é praticamente constante ao considerarmos a variável z' ao longo do comprimento do fio em virtude do ponto ser distante. A variação de R no denominador das expressões tem efeito desprezivel devido ao fato de R ser muito grande quando comparado ao comprimento do fio l. Contudo, a variação de R no termo exponencial é significante por fazer parte da fase de uma função oscilatória. Portanto, podemos escrever $R \approx r$ nos denominadores e $R \approx r - z'\cos(\theta)$ nos termos exponenciais (Fig. 9.4).

Com essas aproximações, ficamos com:

$$d\widetilde{H}_\phi = \frac{I(x',y',z')}{4\pi}\,\mathrm{sen}\,(\theta)\,\frac{jK}{r}e^{j[\omega t - K(r - z'\cos(\theta))]}dz'$$

e

$$d\widetilde{E}_\theta = \frac{I(x',y',z')}{4\pi}\,\mathrm{sen}\,(\theta)\,\frac{jK^2}{\omega\varepsilon r}e^{j[\omega t - K(r - z'\cos(\theta))]}dz'.$$

Integrando ao longo do fio temos para $\widetilde{E}_\theta$

$$\widetilde{E}_\theta = \frac{\mathrm{sen}\,(\theta)}{4\pi}\frac{jK^2}{\omega\varepsilon r}e^{j(\omega t - Kr)}\int_{-l/2}^{l/2} I(x',y',z')e^{jKz'\cos(\theta)}dz'. \tag{9.41}$$

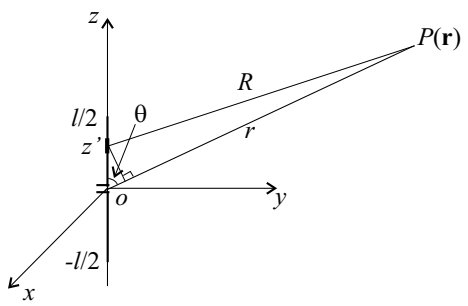


Figura 9.4: Elemento de fio do dipolo na posição z' produzindo os campos **E** e **B** em um ponto a uma distância $R >> l$.

O termo sob o sinal de integração é chamado de fator espacial e o calcularemos a seguir após substituirmos a expressão da corrente. Vejamos:

$$\int_{-l/2}^{l/2} I(x',y',z')e^{jKz'\cos(\theta)}dz' = \int_{-l/2}^{0} I_0 \text{sen}\left[K\left(\frac{l}{2}+z'\right)\right]e^{jKz'\cos(\theta)}dz' +$$

$$\int_{0}^{l/2} I_0 \text{sen}\left[K\left(\frac{l}{2}-z'\right)\right]e^{jKz'\cos(\theta)}dz'.$$

Mas,

$$\int e^{\alpha z}\text{sen}(\beta z+\gamma)dz = \frac{e^{\alpha z}}{\alpha^2+\beta^2}[\alpha \text{sen}(\beta z+\gamma) - \beta\cos(\beta z+\gamma)].$$

Então

$$\int_{-l/2}^{0} I_0 \text{sen}\left[K\left(\frac{l}{2}+z'\right)\right]e^{jKz'\cos(\theta)}dz' =$$

$$\frac{I_0 e^{jKz'\cos(\theta)}}{[jK\cos(\theta)]^2+K^2}\left\{jK\cos(\theta)\,\text{sen}\left[K\left(\frac{l}{2}+z'\right)\right] - K\cos\left[K\left(\frac{l}{2}+z'\right)\right]\right\}\Bigg|_{-l/2}^{0}$$

$$= \frac{I_0}{K^2\text{sen}^2(\theta)}\left\{jK\cos(\theta)\,\text{sen}\left(\frac{Kl}{2}\right) - K\cos\left(\frac{Kl}{2}\right) + Ke^{-j\frac{Kl}{2}\cos(\theta)}\right\}$$

e

$$\int_{0}^{l/2} I_0 \text{sen}\left[K\left(\frac{l}{2}-z'\right)\right]e^{jKz'\cos(\theta)}dz' =$$

$$\frac{I_0 e^{jKz'\cos(\theta)}}{K^2\text{sen}^2(\theta)}\left\{jK\cos(\theta)\,\text{sen}\left[K\left(\frac{l}{2}-z'\right)\right] + K\cos\left[K\left(\frac{l}{2}-z'\right)\right]\right\}\Bigg|_{0}^{l/2}$$

$$= \frac{I_0}{K^2 \text{sen}^2(\theta)} \left\{ -jK\cos(\theta)\,\text{sen}\left(\frac{Kl}{2}\right) - K\cos\left(\frac{Kl}{2}\right) + Ke^{j\frac{Kl}{2}\cos(\theta)} \right\}.$$

Somando as duas integrais temos

$$\int_{-l/2}^{l/2} I(x',y',z')e^{jKz'\cos(\theta)}dz' = \frac{I_0}{K^2\text{sen}^2(\theta)}\left[2K\cos\left(\frac{Kl}{2}\cos\theta\right) - 2K\cos\left(\frac{Kl}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2I_0}{K\text{sen}^2(\theta)}\left[\cos\left(\frac{Kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{Kl}{2}\right)\right].$$

Substituindo esse resultado em (9.41) temos então

$$\widetilde{E}_\theta = j\frac{I_0}{2\pi}\frac{K}{\omega\varepsilon r\text{sen}(\theta)}e^{j(\omega t - Kr)}\left[\cos\left(\frac{Kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{Kl}{2}\right)\right]. \tag{9.42}$$

Procedendo da mesma forma para encontrar $\widetilde{H}_\phi$teremos

$$\widetilde{H}_\phi = j\frac{I_0}{2\pi}\frac{1}{r\text{sen}(\theta)}e^{j(\omega t - Kr)}\left[\cos\left(\frac{Kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{Kl}{2}\right)\right]. \tag{9.43}$$

O vetor de Poynting complexo associado a esse campo distante será

$$\widetilde{\mathbf{S}} = \frac{\widetilde{E}_{0\theta}\widetilde{H}^*_{0\phi}\hat{\mathbf{e}}_r}{2} \;\therefore\; \widetilde{S}_r = \frac{I_0^2}{8\pi^2}\frac{K}{\omega\varepsilon r^2}\left[\frac{\cos\left(\frac{Kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{Kl}{2}\right)}{\text{sen}(\theta)}\right]^2$$

que é um número real nesse caso.

A potência complexa calculada pelo fluxo do vetor de Poynting por uma superfície esférica centrada no dipolo será

$$\widetilde{P} = \oint_S \widetilde{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{e}}_r ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\widetilde{S}_r r^2\text{sen}(\theta)d\theta d\phi$$

$$= \frac{I_0^2}{8\pi^2}\frac{K}{\omega\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left[\cos\left(\frac{Kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{Kl}{2}\right)\right]^2}{\text{sen}(\theta)}d\theta d\phi$$

$$= \frac{I_0^2}{4\pi}\frac{K}{\omega\varepsilon}\int_0^{\pi}\frac{\left[\cos\left(\frac{Kl}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{Kl}{2}\right)\right]^2}{\text{sen}(\theta)}d\theta \tag{9.44}$$

que é um número real. Portanto, será igual à potência média.

A dificuldade reside, agora, na resolução da integral. Essa integral pode ser transformada em uma expressão dependente de outras integrais que só podem ser calculadas por métodos numéricos. Dessa forma, nos parece interessante calculá-la diretamente por métodos numéricos para determinados valores de comprimento l do dipolo.

Notando que

$$\frac{Kl}{2} = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{l}{2} = \pi\frac{l}{\lambda},$$

temos que calcular a função de l/λ

$$f\left(\frac{l}{\lambda}\right) = \int_0^{\pi} \frac{\left[\cos\left(\pi\frac{l}{\lambda}\cos\theta\right) - \cos\left(\pi\frac{l}{\lambda}\right)\right]^2}{\operatorname{sen}(\theta)} d\theta. \tag{9.45}$$

A integração numérica produz o resultado mostrado na figura (Fig. 9.5).

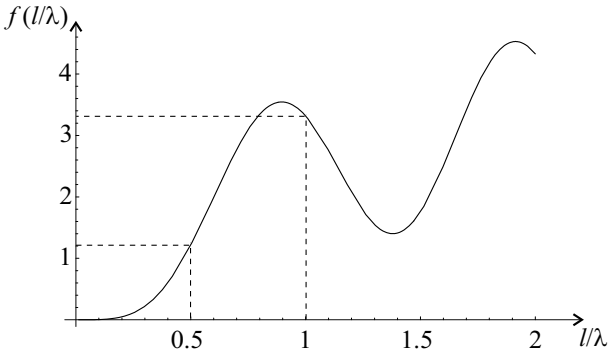


Figura 9.5: Resultado da integração numérica da equação (9.45).

Procedendo de modo análogo ao que fizemos com o dipolo elementar podemos determinar a resistência de radiação equivalente desse dipolo longo. Igualando a potência média dissipada por um resistor à potencia média de radiação fica

$$< P >= R_{rad} I_{ef}^2 = \frac{I_0^2}{4\pi}\frac{K}{\omega\varepsilon} f\left(\frac{l}{\lambda}\right).$$

Para o vácuo, $K/\omega\varepsilon$ tem o valor aproximado de 120π, então

$$R_{rad} I_{ef}^2 = \frac{I_0^2}{4\pi} 120\pi f\left(\frac{l}{\lambda}\right)$$

$$\therefore R_{rad} I_{ef}^2 = \frac{I_0^2}{2} 60 f\left(\frac{l}{\lambda}\right) = I_{ef}^2 60 f\left(\frac{l}{\lambda}\right).$$

Dessa forma fica

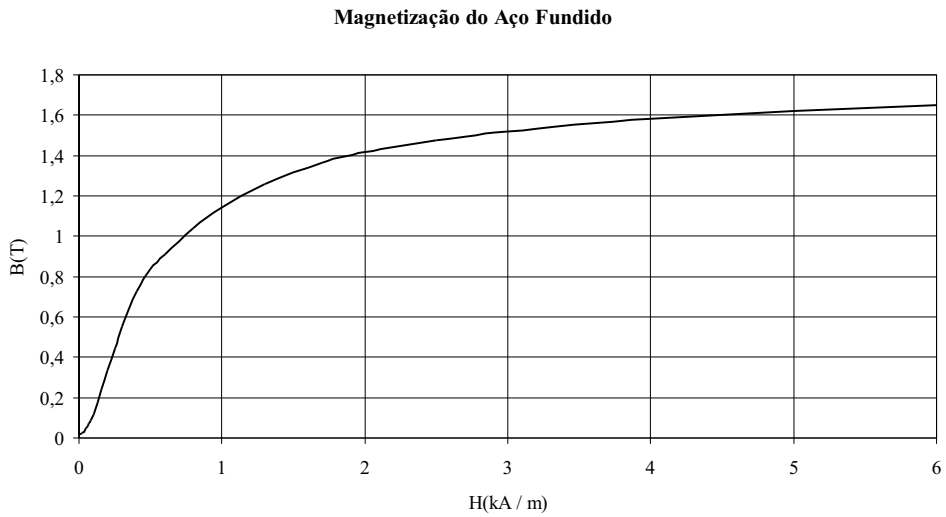
$$R_{rad} = 60 f\left(\frac{l}{\lambda}\right). \tag{9.46}$$

Para um dipolo de meio comprimento de onda ($l/\lambda = 0,5$) a interpolação no gráfico fornece $f\,(l/\lambda) \approx 1,22$ correspondendo uma resistência de radiação aproximadamente igual à 73 ohms. Para um dipolo de um comprimento de onda ($l/\lambda = 1,0$) obtemos $f(l/\lambda) \approx 3,32$ correspondendo uma resistência de radiação aproximadamente igual à 199 ohms.

Apêndice A

Curvas de magnetização

Apresentaremos a seguir as curvas de magnetização de três materiais utilizados na confecção de núcleos magnéticos:



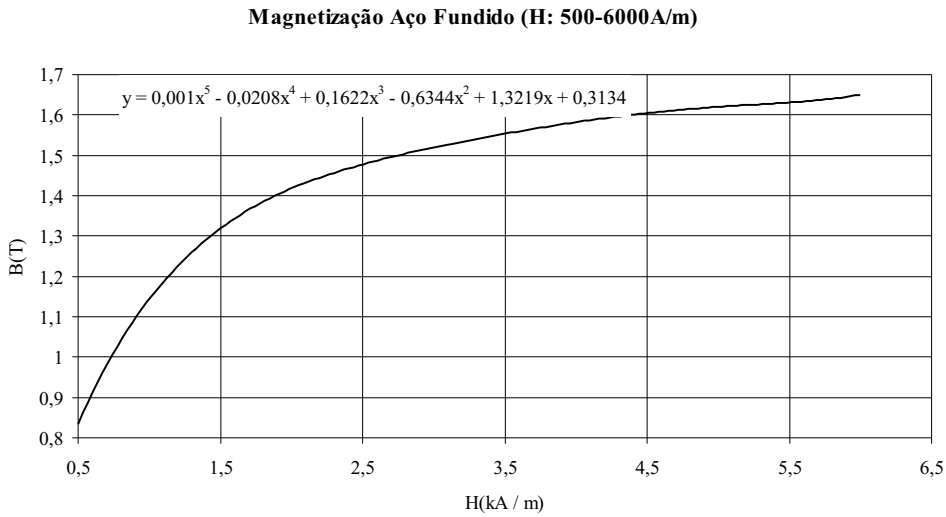
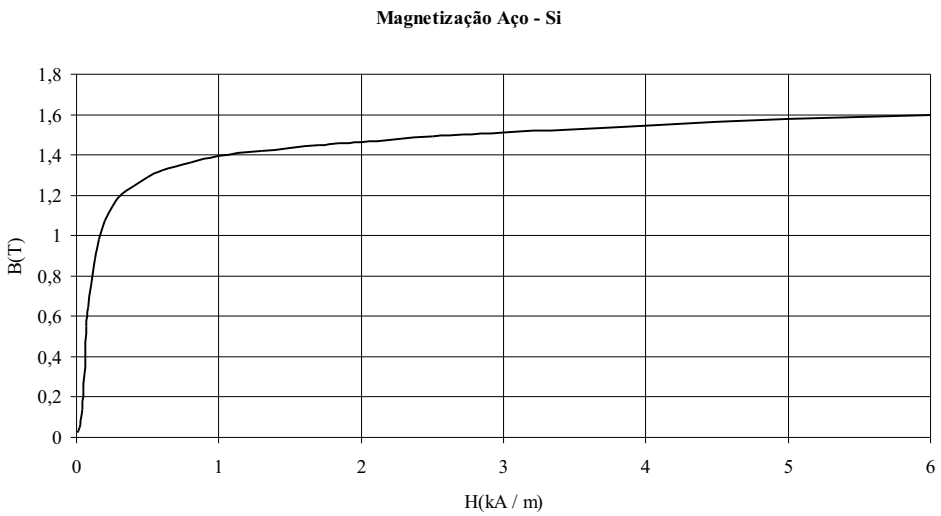


Figura A.1: Curva de magnetização do Aço Fundido.



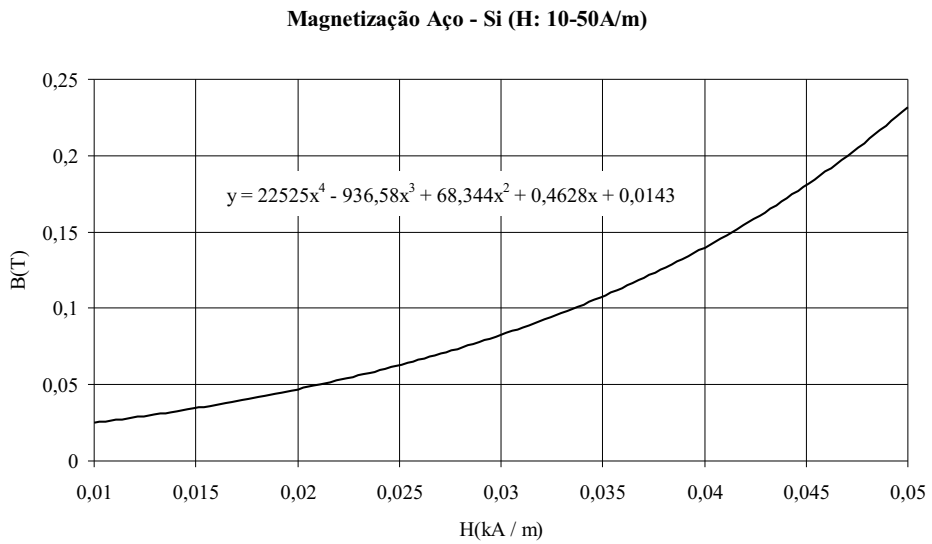
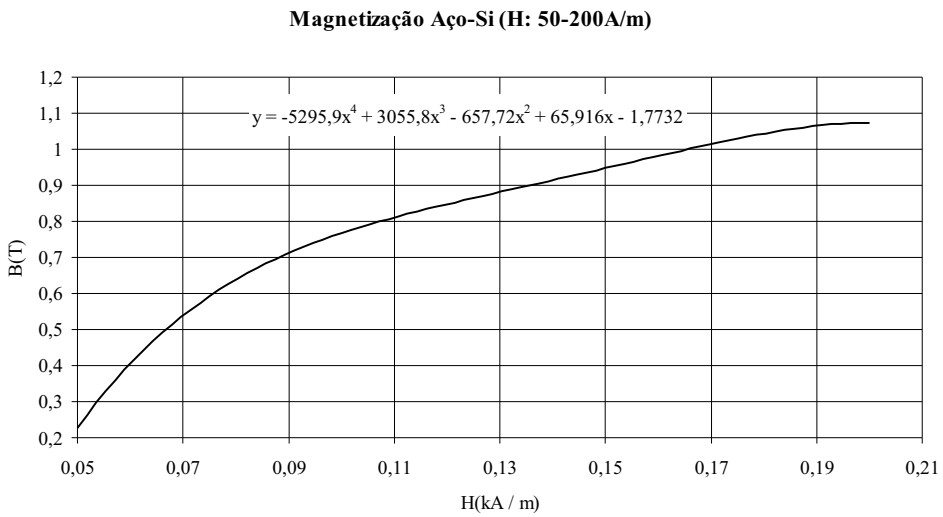


Figura A.2: Curva de magnetização do Aço Silício.



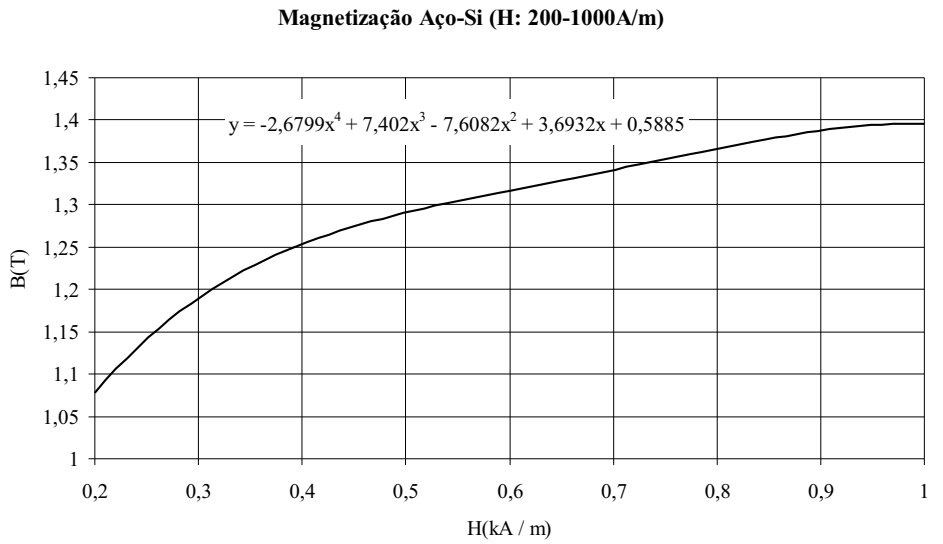


Figura A.3: Curva de magnetização do Aço Silício.

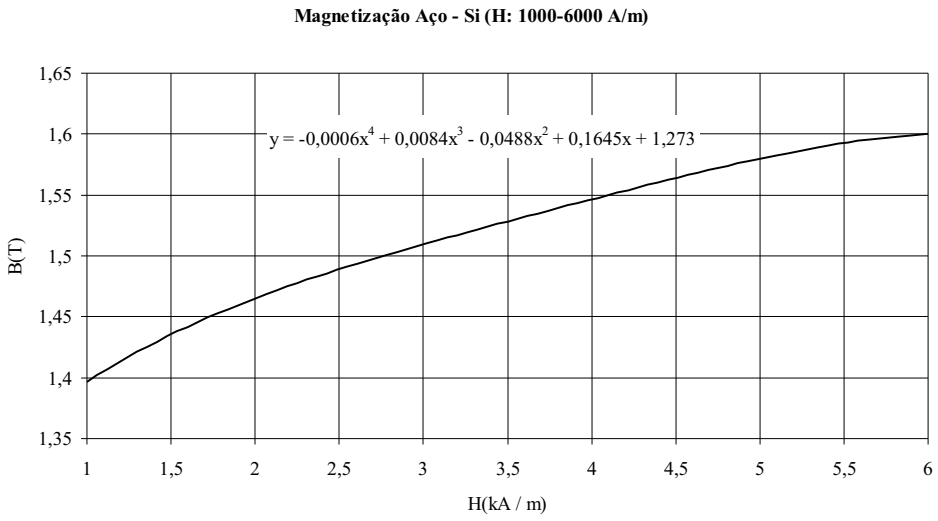


Figura A.4: Curva de magnetização do Aço Silício.

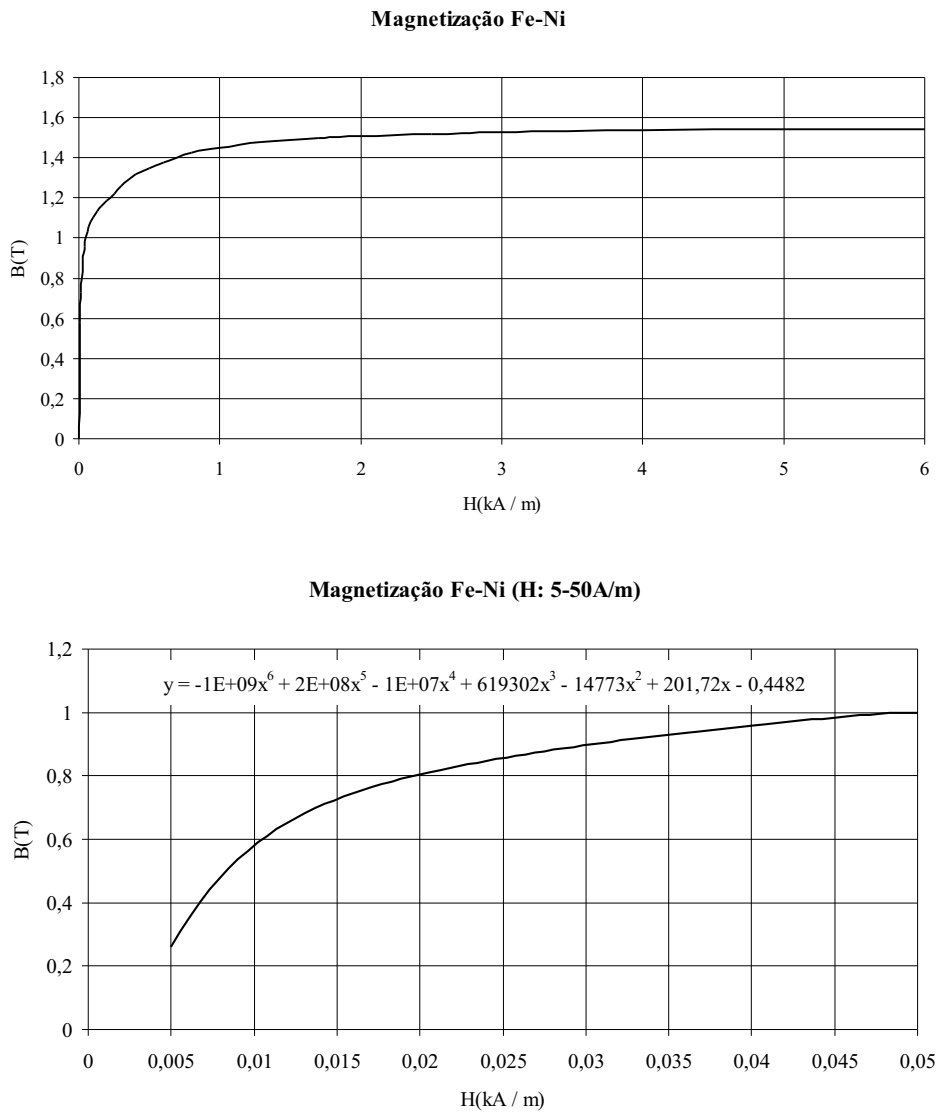
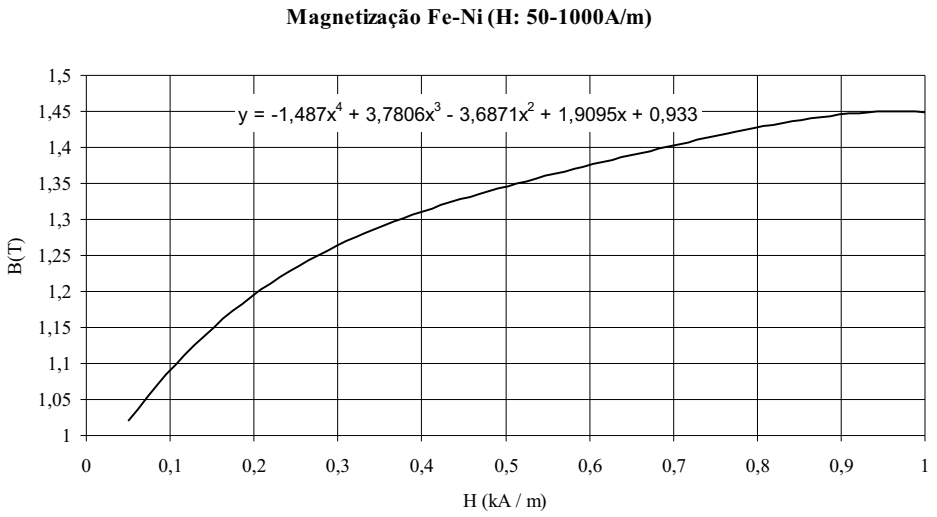


Figura A.5: Curva de magnetização do Fe-Ni.



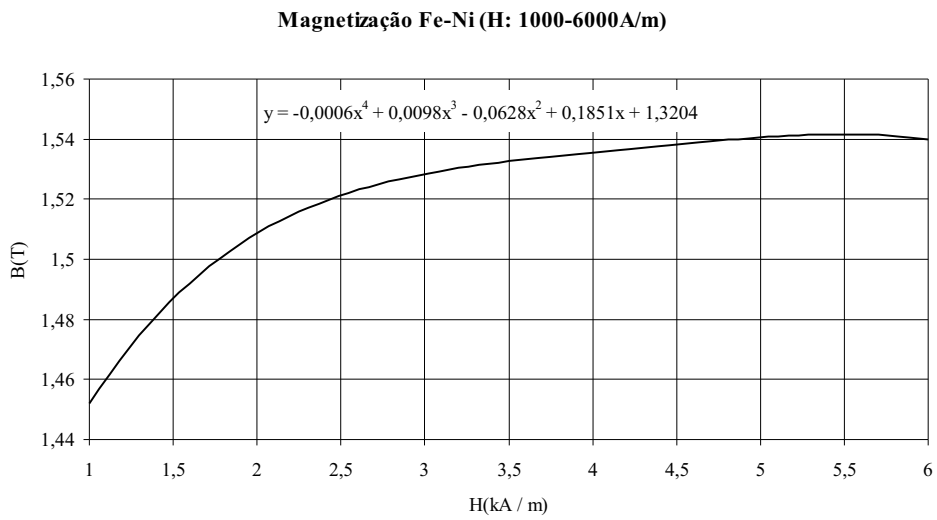


Figura A.6: Curva de magnetização do Fe-Ni.

Referências Bibliográficas

Índice Remissivo

Abraham, 256
Ampére, 94

Bessel, 50

Calibre
    de Lorentz, 249, 250
Campo
    conservativo, 34
    de um plano carregado, 31
    de uma linha de cargas, 32
    elétrico induzido, 124
    eletrostático, 29
Capacitância, 76
Capacitor, 68, 79
    cilíndrico, 45
    de placas paralelas, 44
    esférico, 46
Carta de Smith, 236
Circuito
    magnético, 114, 118, 121
Coercitividade, 111
Condições de contorno, 64, 85, 113, 138
Condutividade, 83
    complexa, 134
Coordenadas
    cilíndricas, 16
    esféricas, 16
Corrente elétrica, 81
Coulomb, 27

Densidade
    de corrente de magnetização, 108
    de energia elétrica, 69
Densidade de corrente, 81
Derivada direcional, 17
Deslocamento elétrico, 59
Dielétricos, 59
Dipolo, 41
    longo, 256
    oscilante, 251
Divergente, 19

Energia
    em um indutor, 129
    em um toróide, 129
    potencial, 38
Entreferro, 117
Equação
    constitutivas, 143
    da continuidade, 83
    de Laplace, 43, 45
    de Laplace para condutores, 88
    de Maxwell, 143
    de onda de Helmholtz, 250
    de Poisson, 43, 59
Equação de onda, 249
Equilíbrio eletrostático, 85
Escalar, 13
Exaustão, 55

Fator
    espacial, 258
Força
    magnética, 93
Força eletromotriz, 86

Giorgi, 28
Gradiente, 17
Guia de ondas, 204, 217
    de seção circular, 212
    de seção retangular, 204

Helmholtz, 196
Histerese, 111

Idutância

de um toróide, 102
Imã, 112
Imagem, 51
Impedância
intrínseca, 155
Indução magnética, 94
Indutância, 101
mútua, 105
mútua., 127
Integral
de linha, 18
de superfície, 19
de volume, 19
Intensidade
magnética, 108

Kirchhoff
integração de, 249

Laplaceano, 42
Legendre, 50
Lei
das malhas, 87
de Ampére, 98, 109, 133
de Ampére complexa, 133
de Ampère generalizada, 132
de Biot-Savart, 94
de Faraday, 124
de Gauss, 31
de Gauss em dielétricos, 62
de Kirchhoff, 86
de ohm, 83
dos nós, 88
Linha
coaxial, 76, 89, 103
de cargas, 52, 73
de transmissão, 217
de transmissão paralela, 104

Magnetização, 106, 111
Meios dispersivos, 150
Momento
de dipolo, 41
de monopolo, 40
magnético, 101, 106
Multipolos, 39

Nabla, 24

Oersted, 94
Onda
plana harmônica, 153

Perda dielétrica, 136
Permeabilidade magnética, 94, 110
Permissividade
complexa, 133
Permissividade elétrica, 63
Polarização, 59
Potência
irradiada, 254
média irradiada, 256
Potencial
de um disco carregado, 38
elétrico, 34
escalar, 96
escalar e radiação, 248
retardado, 249
vetorial, 95
vetorial e radiação, 248
Produto
escalar, 14
misto, 15
vetorial, 14

Radiação, 247
de dipolo curto, 251
de dipolo longo, 256
de fonte senoidal, 250
Relação de onda estacionária, 159
Remanente, 111
Resistência
de radiação, 255, 260
Resistência elétrica, 84
Resistividade, 84
Retentividade, 111
Rigidez dielétrica, 64
ROE, 159
Rotacional, 21

Sistema SI, 13
Stub, 232
Susceptibilidade
elétrica, 63
magnética, 110

Tangente de perda, 134

Teorema
da divergência, 20
de Gauss, 21
de Helmholtz, 248
de Stokes, 24
do rotacional, 24
Torque, 99
Transformada
de Fourier, 151

Velocidade
de fase, 150
de fase, 199, 202
de grupo, 151, 203, 247
de propagação, 203, 249
Vetor, 13
de Poynting complexo, 254, 259