Textos de Laboratório de Física IV

Experimento 10 - Auto-indutância e Circuito RL

Newton B. de Oliveira

Instituto de Física - UFBA

Revisão 2019.2

Documento preparado com o sistema $\LaTeX$.

Sumário

Experimento 10

AUTO-INDUTÂNCIA E CIRCUITO RL

0.1 OBJETIVOS

Determinação da auto-indutância de um indutor real pela medida de sua resistência e sua impedância.

0.2 PARTE TEÓRICA

0.2.1 Coeficiente de auto-indutância e força eletromotriz (f.e.m.)

Em todo circuito elétrico por onde passa uma corrente elétrica i existe um campo de indução magnética $\mathbf{B}$ criado por essa corrente. Em geral, o valor desse campo depende do valor dessa corrente e das propriedades magnéticas do meio nas vizinhanças desse circuito. Quando o meio é o vácuo ou mesmo o próprio ar, a indução magnética $\mathbf{B}$ é diretamente proporcional à corrente. Porém, a presença de materiais com propriedades magnéticas como o Ferro faz com que a indução magnética passe a depender da corrente de modo complexo, nem sempre possível de descrever de maneira analítica.

Em todo o caso, o circuito elétrico delimita uma área interna que é atravessada pelas linhas do campo de indução magnética e isso permite definir o *fluxo*, Φ, desse campo por essa área. Basicamente, o fluxo é o produto da indução magnética que atravessa a área pela própria área. De modo mais exato, o fluxo é definido pela soma dos produtos das projeções das induções magnéticas perpendiculares aos elementos de área pelas próprias áreas. Formalmente,

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

onde:

- $\mathbf{B}$ - é o vetor indução magnética,
- d$\mathbf{a}$ - é um elemento infinitesimal de área orientado de modo que a normal à superfície obedece a regra da mão direita,
- S - representa qualquer superfície limitada pelo circuito e
- $\cdot$ - representa o produto escalar entre os dois vetores.

Se considerarmos que a indução magnética $\mathbf{B}$ produzida pela corrente elétrica i que atravessa o circuito possa ser considerada como uma função dessa corrente, $B = B(i)$, o fluxo correspondente também poderá ser descrito por uma certa função dessa mesma corrente, $\Phi = \Phi(i)$. Isso significa dizer que uma variação di na corrente produzirá uma variação $d\Phi$ no fluxo. O coeficiente de auto-indutância, L, ou simplesmente, indutância, mede como a variação do fluxo depende da variação da corrente e é definido como:

$$L = \frac{d\Phi}{di} \qquad \text{(henry)}.$$

Em geral, o fluxo depende da corrente e das propriedades magnéticas através de $\mathbf{B}$ e da geometria do circuito de modo que a indutância pode depender da própria corrente. Em muitas situações importantes, o fluxo é diretamente proporcional à corrente (função linear) e a derivada torna-se constante. Nessas situações, a indutância depende apenas de parâmetros constantes como as propriedades magnéticas do meio e da geometria do circuito (comprimento, área, etc.). O fluxo pode então ser escrito de modo simplificado como:

$$\Phi = Li.$$

Todo circuito elétrico real possui uma indutância característica do circuito como um todo. Porém, em muitos casos o fluxo da indução magnética pode estar mais concentrado em uma determinada região do circuito como no caso de um circuito contendo uma bobina de fio, de modo que o parâmetro indutância do circuito é mais fortemente devido a essa região do circuito do que às outras regiões. Esses elementos de circuito que concentram o fluxo da indução magnética são chamados de indutores como nos casos das bobinas, solenoides, bobinas toroidais, etc. Esses elementos praticamente contêm toda a indutância do circuito de modo que podemos desprezar o restante (os fios de ligação por exemplo). Desse modo, quando falamos na indutância L de um circuito, na verdade estamos nos referindo à indutância de um certo elemento do circuito, o indutor.

O fluxo magnético que apresentamos tem origem na corrente i, contudo, fontes naturais de indução magnética como os imãs também produzem fluxo magnético através da área de qualquer circuito elétrico que esteja nas vizinhanças dessas fontes. Por exemplo, um laço (ou uma espira) de fio resistivo próximo a um imã. Nesses casos, uma variação no valor do campo devido a um movimento relativo entre o imã e o laço ou mesmo uma variação na geometria do laço produzirá uma variação no fluxo.

Faraday, em 1831, mostrou experimentalmente que a variação temporal do fluxo, Φ, de um campo de indução magnética $\mathbf{B}$ que atravessa qualquer área delimitada por um circuito elétrico induz, neste circuito, uma "força eletromotriz"(f.e.m.), ε, diretamente proporcional à taxa de variação desse fluxo e que pode ser expressa por

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Nessa expressão (devida a Franz E. Neumann -1845) está subentendida a convenção da regra da mão direita nas definições da f.e.m. e do fluxo. O sinal negativo deixará de existir se essa convenção não for respeitada.

A variação temporal do fluxo pode ter várias causas. Pode ser devido à variação de B tanto em módulo como em direção como no caso do movimento de um imã nas vizinhanças de uma espira, pode ser devido à uma deformação geométrica da própria espira ou, no caso de um circuito percorrido por uma corrente, devido à variação da própria corrente. Concentremos-nos nesse último caso (geometria fixa).

Tomemos um circuito elétrico contendo um indutor excitado por uma fonte de corrente que varie no tempo, $i = i(t)$. Como o fluxo é uma função da corrente, $\Phi = \Phi(i)$, a lei de Faraday pode ser desdobrada como

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{di}\frac{di}{dt} = -L\frac{di}{dt}.$$

Nessa expressão, o sentido positivo da corrente deve ser compatível com o fluxo e com a f.e.m. para a manutenção do sinal negativo na expressão. Para evitar possíveis confusões que possam advir por causa desse sinal negativo, estabeleceremos a seguinte convenção de sentidos positivos para a d.d.p. e para a corrente, respaldada nos resultados experimentais, como mostrado na figura (Fig. 1).

Com as orientações dessa figura temos válida a expressão (sem sinal!)

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

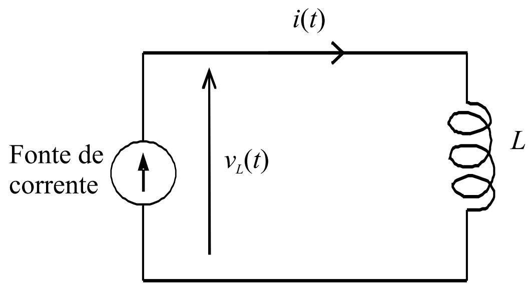

Figura 1: Convenção de sentido positivo para a tensão e para a corrente em um indutor.

Em outras palavras, a tensão elétrica em um indutor depende da taxa de variação da corrente que o atravessa. Observe que se essa corrente não variar no tempo a tensão será nula, ou seja, pode haver corrente sem existir tensão! Basta que ela seja constante no tempo.

0.2.2 Constante de tempo de um circuito RL em série

Consideremos agora a situação em que um indutor com indutância L, um resistor com resistência R e uma fonte de tensão constante estejam associados em série. Esse resistor pode estar representando a resistência elétrica do fio com que o indutor é fabricado (indutor real) ou mesmo um resistor adicional introduzido propositalmente no circuito. Suponhamos ainda que a fonte de tensão seja ligada em t = 0. Veja a figura (Fig. 2).

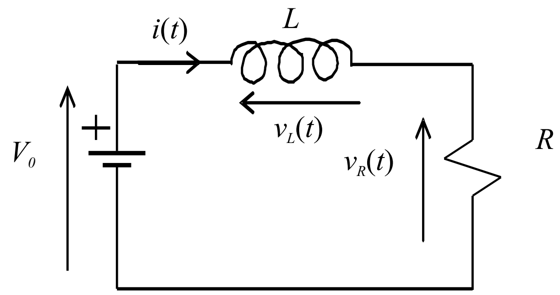

Figura 2: Circuito RL alimentado por uma fonte de tensão constante.

A lei das malhas aplicada ao circuito resulta em

$$V_0 = v_L(t) + v_R(t)$$

ou

$$V_0 = L\frac{di}{dt} + Ri$$

cuja solução para a condição inicial de corrente nula no instante em que a fonte é ligada, $t = 0$, vale

$$i(t) = V_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Para t = L/R a corrente atinge o valor

$$i\left(t = \frac{L}{R}\right) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-1}\right) = 0,63\frac{V_0}{R} = 0,63 I_0.$$

A figura (Fig. 3) mostra o comportamento da corrente ao longo do tempo.

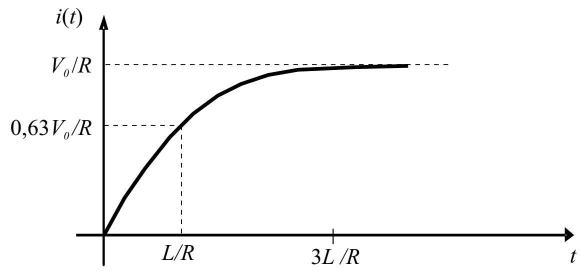

Figura 3: Comportamento da corrente elétrica em um circuito RL alimentado por uma fonte de tensão constante.

Observe que para $t = 3L/R$ a corrente praticamente já atingiu o valor máximo V_0/R. Denominamos L/R de constante de tempo do circuito e é um valor de tempo de referência que nos indica o estado da corrente no circuito. Esse comportamento é conhecido como comportamento transitório e, nos circuitos usuais, é bastante pequeno, da ordem de milissegundos.

0.2.3 Impedância

Consideremos agora a situação em que um indutor com indutância L, um resistor com resistência R e uma fonte de tensão senoidal (ou cossenoidal) estejam associados em série. Esse resistor pode estar representando a resistência elétrica do fio com que o indutor é fabricado (indutor real) ou mesmo um resistor adicional introduzido propositalmente no circuito. Suponhamos ainda que a fonte de tensão esteja ligada a bastante tempo de modo que o circuito esteja operando no regime permanente, ou seja, o comportamento transitório já tenha se extinguido. Figura (Fig. 4). A equação da malha aplicada ao circuito resulta em

$$v_F(t) = v_L(t) + v_R(t)$$

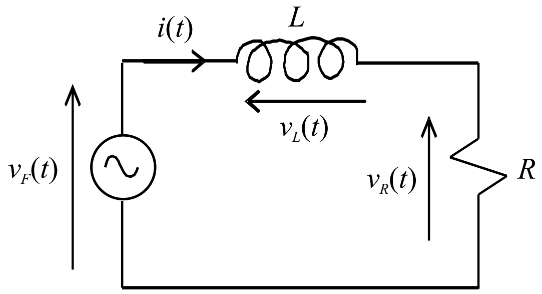

Figura 4: Circuito RL alimentado por uma fonte de tensão senoidal em regime permanente.

ou

$$v_F(t) = L\frac{di}{dt} + Ri. \tag{1}$$

Supondo uma excitação cossenoidal, procuremos uma solução para a corrente com a mesma forma, porém, defasada.

$$v_F(t) = V_0 \cos(\omega t) \qquad \text{e} \qquad i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

onde:

- V_0 e ω - amplitude e frequência angular da tensão da fonte são conhecidos,
- I_0 e ϕ - amplitude e fase inicial da corrente são, por enquanto, desconhecidos.

Substituindo essas duas expressões na equação diferencial do circuito, (1), encontraremos

$$V_0 \cos(\omega t) + L\omega I_0 \operatorname{sen}(\omega t + \phi) = RI_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Desenvolvendo e igualando separadamente os coeficientes de $\cos(\omega t)$ e $\operatorname{sen}(\omega t)$ obtemos:

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

e

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

O termo $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ é denominado impedância, Z, e é o análogo da resistência na lei de Ohm para sinais alternados, funciona como se fosse uma “resistência efetiva”atuando na amplitude da tensão para resultar na amplitude da corrente. Veja que esse termo depende da frequência angular ω . O Termo ωL é denominado reatância indutiva, X_L, e junto com a resistência compõe a impedância.

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} \qquad \text{e} \qquad \phi = -\tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right)$$

A impedância de um elemento de circuito pode ser determinada experimentalmente a partir das medidas da amplitude da tensão e da amplitude da corrente ou dos respectivos valores eficazes (amplitude dividida por raiz quadrada de dois para sinais senoidais). A resistência pode ser determinada experimentalmente pela razão entre a tensão e a corrente excitando-se o circuito com tensão constante ou contínua. A fase inicial ϕ pode ser medida pela observação do deslocamento relativo entre a senoide da tensão e a senoide da corrente.

Temos, portanto, duas maneiras para determinar a indutância em um indutor real. A primeira pelas medidas de Z e R e a segunda pelas medidas de ϕ e R sendo a frequência angular, $\omega = 2\pi f$, conhecida.

$$L = \frac{(Z^2 - R^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega}$$

ou então

$$L = -\frac{R}{\omega}\tan\phi$$

0.2.4 O osciloscópio

Todas as medidas nesse experimento serão executadas com o uso de um osciloscópio. Como sabemos, esse instrumento versátil permite visualizar diretamente sinais de tensão contínuos e alternados. As medidas em tensão contínua são realizadas através do deslocamento vertical do traço da varredura quando o sinal é aplicado na entrada vertical. As medidas em tensão alternada são realizadas através da visualização e medida da amplitude, ou mesmo do valor pico a pico, da figura na tela e através do deslocamento temporal relativo entre duas curvas no caso das medidas de diferença de fase.

O osciloscópio só mede diretamente a tensão elétrica aplicada em seus terminais de entrada de sinal. Para medir corrente elétrica é necessário transformar essa grandeza em tensão elétrica. Isso pode ser realizado através do uso de um resistor de valor adequado e exatamente conhecido. O valor desse resistor deve ser tal que não perturbe o circuito, usualmente, um valor de resistência pequena quando comparado com as outras resistências em série no circuito.

Quando se deseja medir dois sinais simultaneamente através da utilização dos dois canais do osciloscópio deve-se tomar um cuidado adicional com relação aos “terras”ou terminais de referência uma vez que esse terminais são os mesmos para os dois canais e estão conectados à carcaça do instrumento. Esses dois terminais devem sempre ser conectados ao mesmo ponto no circuito onde se realiza a medida e deve ser um ponto que minimize a captação de ruídos e que seja seguro para o operador do instrumento.

0.3 PARTE EXPERIMENTAL

0.3.1 Lista de material

Identifique os seguintes materiais e equipamentos que se encontram sobre a mesa:

- Uma bobina de fio e núcleo de ferro laminado ou ferrite,
- fonte de tensão contínua (CC ou DC - corrente contínua) ajustável, 0 - 12 V,
- gerador de sinal (tensão) senoidal com frequência ajustável,
- osciloscópio de dois canais,
- multímetro,
- resistores com valores conhecidos (10 Ω e 270 Ω),
- placa de ligações e fios .

0.3.2 Medida da resistência (Corrente contínua)

Arme o circuito da figura (Fig. 5) utilizando a saída de tensão contínua da fonte de tensão, a bobina de fio (com indutância L_B e resistência R_B) e o resistor com resistência $R = 270\Omega$. Ajuste a fonte para 12 V e limite a corrente máxima em 0,2 A (se você souber como ajustar esse limite) por segurança atuando nos dois botões de ajuste (indicados como V e A).

Conecte os fios do canal 1 do osciloscópio ao resistor ($R = 270\Omega$) e meça a d.d.p. pelo deslocamento vertical do traço da varredura na tela anotando o desvio da medida. Utilize o máximo deslocamento possível a partir da linha inferior da tela fazendo o ajuste da sensibilidade vertical e da posição. Use

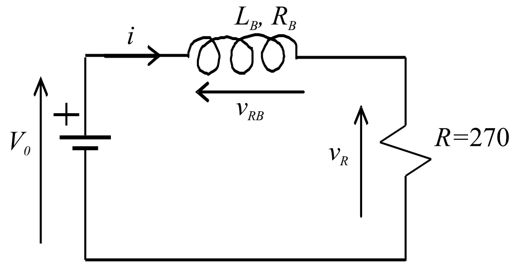

Figura 5: Circuito RL para a determinação da resistência da bobina.

a chave de entrada na posição **DC** e pressione e solte a chave **GND** para deslocar o traço.

Meça essa mesma tensão também com um multímetro na escala **DCV** (ou **CCV**) e no calibre conveniente. Anote o desvio da medida.

Calcule a corrente que percorre o circuito atravessando o indutor e o resistor pelos dois processos. Esteja atento às unidades das grandezas.

Conecte agora os dois fios do canal 1 do osciloscópio ao indutor (bobina de fio) e meça a d.d.p.. Anote o desvio.

Faça o mesmo com o multímetro.

Calcule a resistência elétrica da *bobina*, R_B, utilizando a lei de Ohm pelos dois processos.

0.3.3 Medida da impedância (Corrente alternada)

Troque agora a fonte DC pelo gerador de sinal senoidal. Você terá o circuito da figura (Fig. 6). Ajuste a frequência do gerador para 300 Hz com tensão pico a pico (V_{pp}) de aproximadamente 9 V. Ajuste também a simetria do sinal para uma senoide sem distorção (posição do botão de ajuste da simetria aproximadamente na metade do curso).

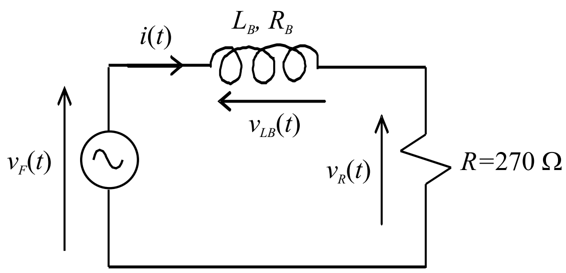

Figura 6: Circuito RL para a determinação da impedância da bobina.

Conecte os fios do canal 1 do osciloscópio ao resistor ($R = 270\Omega$) e meça a d.d.p. pico a pico ajustando o tempo de varredura para obter um ou dois períodos visíveis na tela com o sincronismo feito pelo canal 1. Anote o desvio da medida. Utilize o máximo deslocamento possível a partir da linha inferior da tela fazendo o ajuste da sensibilidade vertical e da posição. Use a chave de entrada na posição **AC** e solte a chave **GND**. Não se preocupe se a senoide estiver um pouco deformada. Anote o desvio avaliado da medida.

Calcule o valor eficaz da tensão ($V_{pp}/(2\sqrt{2})$).

Meça essa mesma tensão (valor eficaz) também com um multímetro na escala **ACV** (ou **CAV**) e no calibre conveniente. Nessa escala, a leitura é feita diretamente em valor eficaz. Anote o desvio avaliado da medida.

Calcule a corrente eficaz que percorre o circuito atravessando o indutor e o resistor pelos dois processos.

Conecte agora os dois fios do canal 1 do osciloscópio ao indutor (bobina de fio) , meça a d.d.p. pico a pico e calcule o valor eficaz. Anote o desvio.

Faça o mesmo com o multímetro (mude o calibre começando com um calibre mais elevado) ajustando o calibre convenientemente.

Calcule a impedância elétrica da bobina, Z_B, utilizando a generalização da lei de Ohm ($Z_B = V_{ef}/I_{ef}$) pelos dois processos.

Os valores das impedâncias devem ser maiores que os valores das resistências medidas no item anterior. Se isso não ocorrer procure a causa do erro e repita as medidas antes de prosseguir adiante.

0.3.4 Medida da impedância da bobina com núcleo ferromagnético

De agora em diante, não utilizaremos mais o multímetro.

Introduza totalmente o núcleo de ferro no interior da bobina e repita as medidas do item anterior apenas com o osciloscópio. Há necessidade de repetir a medida da resistência como no item **0.3.2** ? Explique.

Calcule a impedância elétrica da bobina com núcleo de ferro. **Essa impedância deverá ser significantemente maior que a do item anterior**

0.3.5 Medida da diferença de fase entre a tensão da fonte e a corrente

Nesse item, realizaremos medidas para determinar a indutância da bobina a partir da diferença de fase entre a tensão da fonte e a corrente no circuito.

Retire o núcleo de ferro do interior da bobina. Troque o resistor para $\mathbf{R = 10\Omega}$. Ligue o canal 2 do osciloscópio aos extremos do resistor de tal modo que o fio preto (terra) seja conectado ao terminal do resistor que está ligado ao gerador de sinal senoidal. Ligue o canal 1 aos terminais do gerador de modo que o fio preto deste canal esteja ligado ao fio preto do canal 2, ou seja **os dois fios pretos devem estar eletricamente conectados ao mesmo ponto de referência**.

Sincronize o osciloscópio pelo canal 1, ajuste as sensibilidades verticais dos dois canais e os posicionamentos verticais para visualizar as duas senoides. As duas chaves de entrada devem estar na posição **AC** e as chaves **GND** devem estar soltas. A senoide do canal 2 corresponde à corrente no circuito uma vez que a tensão no resistor é em fase com a corrente. A senoide no canal 1 corresponde à tensão do gerador. As duas senoides têm a mesma frequência. Meça o período (T) e calcule a frequência, ajuste o tempo de varredura se necessário.

Para medir a diferença de fase entre as senoides os traços das varreduras devem ser coincidentes. Pressione as duas teclas **GND** das entradas dos dois canais e posicione os dois traços no centro da tela superpondo-os. Solte as duas teclas **GND** e observe as senoides. Identifique a senoide do canal 1 e posicione-a horizontalmente para iniciar o ciclo no canto esquerdo da tela e terminar o ciclo próximo ao canto direito (estamos considerando que o ciclo começa em 0 rad e termina em 2π rad). Para isso você deve agir no botão de posicionamento horizontal e no controle do tempo de varredura (botão externo em **SEC / DIV**), se for necessário, atue no botão **LEVEL** para ajudar no posicionamento. Você deverá observar que a senoide do canal 2 começa o ciclo após da senoide do canal 1 estando, portanto, atrasada no tempo. Meça diretamente na tela o tempo de atraso entre as duas senoides. Para melhorar a precisão da medida você pode esticar a senoide agindo no botão do tempo de varredura de modo que o atraso entre os dois sinais ocupem o maior espaço horizontal possível na tela. Lembre-se que sua referência é o canal 1 (tensão da fonte), portanto, a corrente do circuito está atrasada (o valor da diferença de fase é negativo). Estime o desvio da medida. Converta esse tempo de atraso em atraso angular por uma simples regra de três em que um período (T) corresponde a 2π rad.

Introduza o núcleo no indutor e repita o processo de medida da diferença de fase.

0.4 TRABALHO COMPLEMENTAR

- Nas medidas de resistência feitas no item **0.3.2** pelos dois processos (osciloscópio e multímetro), avalie os desvios e escreva-as corretamente (o desvio deve conter apenas um algarismo significativo, majore se necessário). Existe alguma diferença significativa entre os dois processos?

- Nas medidas de impedância da bobina sem núcleo feitas no item **0.3.3**, avalie os desvios e escreva-as corretamente. Existe alguma diferença significativa entre os dois processos?

- Na medida de impedância da bobina com núcleo feita no item **0.3.4**, avalie o desvio e escreva-a corretamente.

- Calcule os valores das indutâncias sem núcleo e com núcleo assumindo a frequência f como constante e igual a 300 Hz, sem erro. Lembre-se que a frequência angular $\omega = 2\,\pi\, f$. Utilize apenas as indutâncias obtidas a partir das medidas efetuadas com o osciloscópio, avalie os desvios e escreva-as corretamente. Quanto vale a relação entre as indutâncias? Você vê alguma vantagem em utilizar um núcleo?

- Das medidas de diferença de fase executadas no item **0.3.5** determine os valores das indutâncias da bobina nas duas situações: sem núcleo e com núcleo de ferro. Observe bem que, na medida da diferença de fase, estão presentes a resistência da bobina R_B e a resistência $R = 10\,\Omega$ do resistor, ambas em série com a reatância indutiva. Esse valor de resistência, apesar de ser pequeno, não é desprezível quando comparado com a resistência da bobina. A indutância é dada pela a expressão

  $$L = -\frac{R_T}{\omega}\,\tan\phi,$$

  onde R_T é a resistência total, $R_T = R_B + R$.

  Você deverá utilizar a expressão lembrando que ϕ é negativo uma vez que o sinal de referência foi a tensão do gerador e não a corrente. Avalie os desvios das medidas e escreva-as corretamente.

  Compare os resultados com os do item anterior. Com base nos desvios, qual é o melhor método (pela medida da impedância ou pela medida da diferença de fase)?

0.5 BIBLIOGRAFIA

[1], [2], [3]

Críticas e sugestões, contate Prof. Newton B. Oliveira - newton@ufba.br

Referências Bibliográficas

[1] Martins, Nelson. *Introdução à teoria da eletricidade e do magnetismo* 2^a *ed.* Edgard Blucher, São Paulo, 1975.

[2] Oliveira, Newton B. de. *Circuitos Elétricos no Domínio do Tempo e da Freqüência.* Edufba, Salvador, 2008.

[3] Purcell, Edward M. *Eletricidade e Magnetismo.* Curso de Física de Berkley, 2. Edgard blucher, São Paulo, 19780.