PÊNDULO DE TORÇÃO

I - INTRODUÇÃO

O pêndulo de torção é um outro sistema físico que realiza oscilações harmônicas se deslocado ligeiramente de sua posição de equilíbrio. Ele é construído com elementos similares aos usados no pêndulo simples: um fio (**ou haste**) preso (a) a uma plataforma por sua extremidade superior, e um corpo preso em sua extremidade inferior. Algumas diferenças, no entanto existem: o fio pode ter uma maior densidade linear que no caso do pêndulo simples enquanto que o corpo pode ter uma distribuição de massa arbitrária que não precisa ser puntiforme.

No que diz respeito às oscilações, em vez do corpo ser deslocado da sua posição de equilíbrio, ele é girado em torno de seu eixo vertical. Isto causa uma deformação do fio que o sustenta, que tende a retornar ao seu estado original sob a influência do torque restaurador exercido pelo fio. Dentro deste ponto de vista, o sistema é mais parecido com a situação massa-mola, onde a força restauradora não é devido à gravidade, mas à eliminação de deformações em um sistema material.

A freqüência de oscilações de um pêndulo de torção depende do fio e do corpo suspenso. Neste último caso, a dependência se expressa pelo momento de inércia do corpo em torno de um eixo que se situa no prolongamento do fio. No que diz respeito ao primeiro fator, a dependência se dá tanto nos aspectos geométricos do fio (diâmetro e comprimento) bem como no material de que ele é feito.

Neste experimento executaremos medidas de freqüências de um pêndulo de torção, relacionando-as com a distribuição de massa e com a haste utilizada.

MOMENTO DE INÉRCIA

O conceito de momento de inércia ***I*** está ligado ao movimento de rotação de um corpo em torno de um eixo. Esta grandeza mede a inércia (resistência a sair do estado de repouso) de um sistema parado quando nele é aplicado um torque que vai colocá-lo em rotação. Esta resistência também é sentida quando se quer alterar a sua rotação, o que é decorrente do princípio de inércia de Galileu. Para distribuições discreta ou contínua de massa o momento de inércia é expresso por:

$$I = \sum_i m_i\ r_i^2 \qquad \text{ou} \qquad I = \int_V \rho(r)\, r^2\, dv \,. \tag{1}$$

Em ambas as expressões acima, r indica a distância da massa m_i ou do elemento de volume dv até o eixo considerado.

PÊNDULO DE TORÇÃO

No pêndulo de torção montado no laboratório, usa-se como elemento elástico uma vareta de óleo (de cárter de automóvel) na forma de haste delgada flexível. O referido pêndulo descreve oscilações harmônicas cuja freqüência angular obedece à equação

$$\omega(I, K) = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

onde I é o momento de inércia do pêndulo e K está dado pela relação

$$\tau = -K\varphi,$$

entre o torque restaurador da haste, τ, e o ângulo de torção, φ. K depende das características da haste: material de que é feito, sua seção transversal e seu comprimento, C, que no nosso caso é a única grandeza associada à haste a sofrer variação.

A relação entre a constante de torção e o comprimento da haste é tal que K é inversamente proporcional a C. Esta relação pode ser demonstrada a partir de uma análise análoga à de um fio submetido à tração como segue.

O torque τ aplicado a uma extremidade de uma haste, fixada na outra, distribui-se uniformemente ao longo dessa haste. Com efeito, dando-se um corte (imaginário) à distância z da extermidade fixa e denominando-se *1* a parte de comprimento z e *2* a sua complementar, vê-se que esta última, mantida em equilíbrio, está sob ação de um torque $-\tau$ na altura do corte. Sendo assim, ela reage sobre a parte *1* com um torque τ igual e oposto ao que sofre pela ação dessa parte; igual também ao que a parte *2* suporta na sua extremidade livre. Isso vale para todo z de modo que:

$$\tau(z) = \tau = constante.$$

Por outro lado, a deformação (ângulo de torção) que esse torque provoca é proporcional a z. Com efeito, um filete longitudinal da haste – reto para o caso de inexistência de esforço – descreverá sob ação desse torque uma *hélice*. Para efeito de análise a hélice pode ser vista como a trajetória que resulta da composição de dois movimentos de uma partícula: um movimento circular uniforme num plano paralelo à seção transversal e um movimento retilíneo uniforme na direção-Z. Assim sendo, como o ângulo de torção acompanha o ângulo da hélice, a iguais "distâncias percorridas" sobre o eixo-Z correspondem iguais ângulos de deformação φ:

$$\varphi(z) = \alpha z,$$

com

$$\alpha = constante,$$

como queríamos demonstrar.

Como se vê, α representa o ângulo de torção sofrido por um comprimento unitário $(z = 1)$ da haste. Dado o caráter elástico da mesma, α será proporcional ao torque aplicado τ. Em outras palavras,

$$\frac{\tau}{\alpha} = \lambda = constante,$$

para uma dada haste. λ depende do material de que a haste é feita, assim como das dimensões e da forma da seção transversal (perfil) dessa haste. Tem-se ainda, por definição, que

$$\tau = K\,\varphi,$$

$$\tau = K(z)\,\alpha z,$$

$$K(z)z = \frac{\tau}{\alpha} = \lambda,$$

$$K(z) = \frac{\lambda}{z},$$

com

$$\lambda = constante,$$

como queríamos demonstrar.

EXPERIMENTO

No experimento teremos duas configurações para o corpo suspenso pela haste:

(i) Barras cilindricas uniformes de massa *m*, raio da base *R* e comprimento *L*, para as quais se tem o momento de inércia com respeito a um eixo perpendicular a sua geratriz e que passa pelo centro de massa dado por: :

$$I_C = \frac{1}{12} m(L^2 + 3R^2).$$

(ii) Barras metálicas retangulares de massa *m* e comprimento *L* suspensas por uma haste delgada que passa pelos correspondentes centros de massa; a barra sustenta duas massas de metal de massa *M* cada, a uma distância *d* do centro da mesma. Seguindo esta configuração, pode-se calcular o momento de inércia do sistema como:

$$I_B = \frac{1}{12} mL^2 + 2Md^2 \tag{3}$$

Deste modo, o período de oscilação deste sistema será determinado por:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{mL^2}{12\kappa} + \frac{2Md^2}{\kappa}. \tag{4}$$

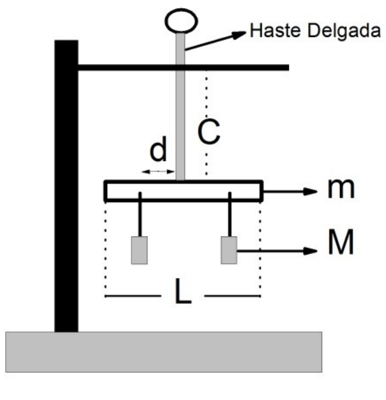
ATENÇÃO: O caráter aditivo do momento de inércia não deve ser confundido com o teorema dos eixos paralelos, que relaciona os momentos de inércia de um mesmo objeto com relação a dois eixos paralelos, passando um deles pelo centro de massa.

II – MATERIAL NECESSÁRIO

1. Barras cilíndricas e retangulares de metal
2. Massas
3. Haste delgada de metal
4. Cronômetro ou relógio
5. Régua
6. Bases, garras e suportes

III - PROCEDIMENTO

Monte o pêndulo de torção com o auxílio de 1 suporte (1 base, 2 hastes e 2 garras), conforme ilustrado na figura abaixo. Inicialmente trabalhe com as barras cilíndricas de metal. Pese a massa *m* de uma delas, meça o seu comprimento *L* e o raio da base *R* e prenda-a na haste pelo centro da mesma, de forma que ela assuma uma posição horizontal. Em seguida faça a barra cilíndrica oscilar, torsionando levemente a haste que a sustenta. Meça o período, a partir da medida do tempo de **20 oscilações**. Registre todos os dados na tabela. Repita o procedimento com mais 3 barras cilíndricas metálicas.
Em seguida, meça o comprimento *C* da haste delgada e registre na tabela. Trabalhe com a barra retangular de metal. Meça a correspondente massa *m*, o seu comprimento *L* e prenda-a na haste delgada pelo centro da mesma, de forma que ela assuma uma posição horizontal.



Considere também as massas *M* que podem ser penduradas na barra retangular. Determine o valor de *M* e pendure-as nos pontos mais próximos do centro da barra. Certifique-se que as massas estão à mesma distância d do centro. Em seguida meça o correspondente período fazendo a medida do tempo de **10 oscilações** e registre os dados na tabela. Mantenha a haste delgada com o mesmo comprimento C usado na primeira série de medidas. Repita o procedimento para mais 4 posições das massas na barra retangular, inclusive usando os furos mais afastados do centro. Registre todos os dados na tabela.

Agora fixe uma configuração das massas na barra e faça variar o comprimento da haste. Além da medida do período para o comprimento original C, faça medidas do período para mais 5 comprimentos diferentes da haste.

IV – TRATAMENTO DOS DADOS

Trace, em papel milimetrado, o quadrado do período de oscilação das diferentes barras metálicas em função da grandeza $m(L^2+3R^2)$. Utilize o método dos mínimos quadrados para fazer um ajuste da reta que melhor descreve os pontos. A partir da forma da equação do movimento para o pêndulo de torção determine o valor de κ.

Trace, em papel milimetrado, o quadrado do período de oscilações medido para a barra retangular com massas penduradas em função do quadrado da distância d. Utilize o método dos mínimos quadrados para fazer um ajuste da reta que melhor descreve os pontos. Relacione o coeficiente angular da reta com a massa pendurada M e o valor constante com o momento de inércia da haste. Compare o valor de M com o obtido na balança, e o valor de $\boldsymbol{I}$ com o dado pela expressão (3).

A partir dos dados da tabela componha a grandeza $T^2 / I\,(4\pi^2)$. Trace em papel log-log este valor em função do comprimento C do fio. Faça um ajuste da reta pelo método dos mínimos quadrados. O resultado obtido da dependência entre κ e C está de acordo com o apresentado na sessão I? Que expressão é obtida para o período de oscilação em função de C e de d?