PÊNDULO FÍSICO E PÊNDULOS SIMPLES ACOPLADOS

I - INTRODUÇÃO

As oscilações desempenham um papel fundamental na física, seja na mecânica, na acústica, na eletricidade e na ótica. Um sistema massa-mola é a realização mais simples do que se chama de oscilador harmônico: um corpo (massa), acoplado a outro corpo material (mola), é mantido em sua posição de equilíbrio, onde a mola se encontra sem deformações, portanto livre de tensões internas. Se deslocado de sua posição de equilíbrio, a massa sofre a ação de uma força restauradora linear que a força a retornar ao ponto de equilíbrio. Esta força é devida à tendência da mola de retomar ao seu estado original, sem deformações nem tensões internas.

O pêndulo simples é um sistema que executa oscilações harmônicas se afastado por pequenos deslocamentos de sua posição de equilíbrio. Aqui a força restauradora é devida à gravidade que força a massa a retornar para o ponto mais baixo. O pêndulo simples consiste de uma massa m suspensa por um fio de comprimento L e massa $m_L << m$. No tratamento teórico supõe-se que toda a massa m está concentrada em um ponto e também que $\varphi \approx sen(\varphi)$.

O pêndulo físico, ou pêndulo composto, é qualquer sistema suspenso por um ponto O, que pode girar em torno de um eixo horizontal que passa por este ponto. Ele compreende uma vasta gama de situações reais, e não se sujeita às condições quase ideais definidas para o pêndulo simples. É claro que o pêndulo simples restrito a oscilações em um plano é um caso especial do pêndulo físico.

MOMENTO DE INÉRCIA

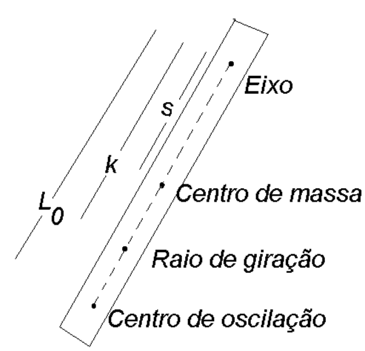
O conceito de momento de inércia $\boldsymbol{I}$ é fundamental na análise de movimentos de rotação de um corpo em torno de um eixo, e será usado nas análises dos pêndulos físicos e de torção. Esta grandeza aparece naturalmente ao escrevermos a energia cinética de um corpo que realiza um movimento circular uniforme de raio r, velocidade angular ω, e velocidade tangencial $v = \omega r$:

$$EC = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega r)^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2 . \tag{1}$$

A definição $I = mr^2$ para uma massa puntiforme m girando em torno de um ponto a uma distância r pode ser generalizada para qualquer distribuição discreta (ou contínua) de massa. O momento de inércia total será a soma (ou integral) do produto das massas m_i por r_i^2, atentando-se que r_i é a distância da massa m_i ao eixo de rotação escolhido. No roteiro seguinte fazemos uma discussão mais detalhada sobre o significado deste conceito.

PÊNDULO FÍSICO

A posição de equilíbrio do pêndulo físico (ver Figura) é aquela em que o centro de gravidade do corpo está no plano vertical que passa pelo eixo de sustentação. Nos casos onde a gravidade é constante, o centro de gravidade coincide com o centro de massa. Quando o corpo é deslocado de sua posição de equilíbrio, o torque restaurador vai ser proporcional ao produto da força (mg) pela distância s do ponto onde ela é aplicada(centro de massa) até o eixo, i.e.:



$$\tau = -m\,g\,s\,\mathrm{sen}\,\varphi\,, \tag{2}$$

onde φ indica o ângulo formado entre a reta que passa pelo eixo e o centro de massa e a direção vertical. A aplicação da segunda lei de Newton a movimentos de rotação leva a:

$$I\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \tau = -mgs\,\mathrm{sen}\,\varphi\,, \tag{3}$$

de onde é possível se obter a freqüência de oscilação do pêndulo $\omega^2 = {mgs}/{I}$.

Definimos também duas grandezas de comprimento: L_o é a distância do eixo ao centro de oscilações, ponto tal que, se toda a massa do corpo estivesse aí concentrada o pêndulo simples assim formado teria a mesma freqüência de oscilação do pêndulo físico; k é o chamado raio de giração, i.e., a distância do eixo a um ponto tal que, se toda a massa do corpo estivesse aí concentrada, o seu momento de inércia com relação ao eixo seria igual ao do corpo que constitui o pêndulo físico:

$$L_o = \frac{I}{m\,s}; \qquad\qquad k = \sqrt{{I}/{m}} \quad . \tag{4}$$

Obtém-se L_o igualando-se a freqüência do pêndulo físico indicada acima com a freqüência do pêndulo simples equivalente $\omega_o^2 = {g}/{L_0}$. A quantidade k foi obtida a partir de sua definição.

O pêndulo físico que usaremos consiste de uma régua retangular de plástico, furada em diversos pontos ao longo do lado mais comprido da régua, eqüidistantes das bordas. Assim podemos fazer um estudo da dependência da freqüência com relação à distância do eixo de rotação ao centro de massa. O momento de inércia de uma distribuição de massa delgada e uniforme ao longo de uma direção e de comprimento total L com relação a um eixo que passa pelo seu centro de massa é dada por:

$$I_{CM} = mL^2/12. \tag{5}$$

Podemos obter o momento de inércia com relação ao eixo onde a régua vai oscilar com o auxílio do teorema dos eixos paralelos. Ele estabelece que o momento de inércia de um corpo em torno de um eixo qualquer pode ser expresso pela soma do momento de inércia em torno de um eixo paralelo ao original, passando pelo centro de massa, e de um termo que é o produto da massa total do corpo pelo quadrado da distância entre os dois eixos, ou seja:

$$I = I_{CM} + ms^2 = mL^2/12 + ms^2. \tag{6}$$

Esta relação pode ser inserida na expressão para a freqüência de oscilações escrita acima, resultando em:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{L^2/12 + s^2}{gs}\,. \tag{7}$$

Esta expressão mostra que o período de oscilações cresce em ambos os limites $s \to 0$ e $s \to \infty$, passando por um mínimo em um valor finito de *s*.

PÊNDULOS ACOPLADOS

O acoplamento entre dois ou mais sistemas físicos faz com que eles se influenciem mutuamente. Isto pode ser exemplarmente observado quando acoplamos dois pêndulos simples, que é um dos sistemas mecânicos mais simples. Esta influência é observada na alteração das trajetórias de cada um deles com relação à situação sem acoplamento, bem como pela troca de energia entre eles.

No caso dos pêndulos físicos vamos acoplá-los usando uma pequena massa Δm presa longe das extremidades de um barbante que será atado aos fios dos dois pêndulos. Vamos examinar essencialmente sistemas nos quais os pêndulos podem ter a mesma massa ou massas diferentes; o mesmo comprimento ou comprimentos diferentes; os barbantes que acoplam os dois pêndulos podem ser presos à mesma altura ou a alturas diferentes. Cada arranjo vai gerar um sistema físico com características próprias que poderão ser observadas visual e qualitativamente.

Os objetivos deste experimento são: i) executar medidas de freqüências de um pêndulo físico de modo a relacioná-la com a geometria e distribuição de massa que o caracteriza; ii) observar movimentos complexos que aparecem quando consideramos um sistema de pêndulos acoplados. A primeira parte do experimento será realizada pelos alunos, e a segunda terá mais um caráter de aula de demonstração.

II – MATERIAL NECESSÁRIO

1. Haste de acrílico com furos
2. Raio de roda de bicicleta
3. Cronômetro ou relógio
4. Bases, garras e barras cilíndricas.
5. Sistema de pêndulos acoplados

III - PROCEDIMENTO

1 - PÊNDULO FÍSICO

Você vai usar a haste de acrílico como pêndulo físico. Registre na tabela sua massa m e seu comprimento L. Use o raio da roda da bicicleta preso a uma garra como eixo de oscilação. Meça o valor do período usando todos os furos distintos ao longo da haste. No sentido de diminuir os erros de medida, é aconselhável que o período seja determinado a partir da medida do tempo de 10 oscilações. Para cada medida registre também a distância s do furo que contém o eixo até o centro da haste.

2 - PÊNDULOS SIMPLES ACOPLADOS

Tome duas massas iguais (pese-as) e prenda-as aos fios. Ajuste as alturas de sorte a obter pêndulos idênticos (de mesma freqüência). Acople os pêndulos com Δm presa a alturas iguais nos fios dos pêndulos de modo a formar um V. Cole no chão (piso) uma fita crepe na projeção da linha que une os pêndulos simples acoplados. Cole fitas no piso abaixo da posição de equilíbrio de cada pêndulo, perpendicularmente à primeira. Este será o seu sistema de referência.

Mantenha um pêndulo em repouso e acione o outro ao longo da linha que os une, afastando-o da posição de equilíbrio e abandonando-o. Observe o comportamento deles. Repita este procedimento na direção perpendicular à linha que os une. Faça também em uma direção arbitrária. Tente acionar um pêndulo ao longo de uma circunferência com o outro preso, soltando-o quando obtiver a circunferência desejada. Observe o movimento do sistema, inclusive as fases das oscilações.

Varie a altura em que foi atado um dos braços do barbante de acoplamento (p. ex. dobrando o valor deste braço). Repita todos os passos do item anterior. Note que, com a quebra de simetria no acoplamento dos pêndulos, uma propriedade do caso simétrico foi perdida: a energia não é mais totalmente transferida de um pêndulo ao outro. Tente explicar esta e outras diferenças observadas entre as duas maneiras de acoplar os pêndulos.

Continue o experimento modificando agora o comprimento de um dos pêndulos. Com isso a simetria do sistema é quebrada. Repita todos os procedimentos para os pêndulos idênticos. Observe que agora o acoplamento simétrico não garante a total transferência de energia de um pêndulo ao outro. Observe o efeito de quebra de simetria no acoplamento, e tente encontrar uma configuração, também assimétrica, que possibilite a troca total de energia.

Finalmente trabalhe com pêndulos de comprimentos iguais e massas diferentes. Repita todos os procedimentos já descritos acima.

IV – TRATAMENTO DOS DADOS

Trace, em papel milimetrado o período de oscilação T em função da distância s. Note que ele tem um valor mínimo, e cresce quando $s \to 0$ e $s \to L/2$.

Trace também em papel log-log os dados para os 4 menores valores de s (que corresponde aproximadamente ao limite em que $s \to 0$). De acordo com a expressão para o período obtido na Introdução, espera-se uma dependência em uma lei de potência com expoente negativo. Determine, a partir do gráfico, a dependência funcional entre T e s neste limite.

Trace em papel milimetrado o valor de $T^2 s/(4\pi^2)$ em função de s^2. De acordo com a expressão já mencionada, espera-se uma dependência linear entre estas duas grandezas. Usando o método dos mínimos quadrados faça o ajuste da melhor reta entre elas. A partir dos valores obtidos para o coeficiente angular e termo constante determine a dependência do momento de inércia do pêndulo físico em função da distância s. Verifique se ela satisfaz o teorema dos eixos paralelos. Finalmente obtenha o raio de giração k em função de s.