ESCOAMENTO DE FLUIDOS

I - INTRODUÇÃO

O movimento dos fluidos é um dos problemas de maior complexidade dentro da física, tanto na observação experimental como na descrição teórica. Esta complexidade está ligada ao fato de se estar lidando com um sistema com um número muito grande de constituintes, e se reflete no número de variáveis necessárias para a sua descrição matemática. O escoamento dos fluidos pode ocorrer dentro dos regimes laminar e turbulento. No primeiro caso ainda é possível, em situações de grande simetria, obter-se uma descrição através de expressões matemáticas simples. Porém, no último caso, só é possível uma descrição estatística do escoamento, isto é através do valor médio da velocidade e suas flutuações em torno deste valor.

Ainda dentro do regime laminar, tem-se que fazer a distinção se a energia dissipada durante o escoamento pode ser desprezada ou não. Em caso afirmativo, a lei de conservação de energia (Equação de Bernoulli) pode ser utilizada para calcular a velocidade e pressão em diversos pontos de um escoamento. Se a dissipação é relevante, então é necessário se usar a equação de Navier-Stokes, que é obtida ao se aplicar a segunda lei de Newton para um elemento de fluido. Nesta equação, os efeitos de dissipação de energia são descritos através do coeficiente de viscosidade η, que mede a intensidade da força de atrito entre duas camadas adjacentes de fluido.

Neste experimento iremos observar e medir o escoamento de fluidos sob a ação da força de gravidade. Serão realizadas medidas do tempo de escoamento da água armazenada em um reservatório cilíndrico em função da diferença entre os níveis inicial e final. Outras variáveis são o raio do orifício e o comprimento da mangueira por onde a água escoa. As medidas de tempo de escoamento são bem mais simples de serem feitas do que a medida da velocidade instantânea do jato. No entanto, com as relações teóricas acontece o inverso. Por isso vamos fazer uma breve explanação sobre a obtenção de relações entre o tempo de escoamento e a variação de altura.

A situação mais simples corresponde a um reservatório de seção reta uniforme, com um furo na sua parede inferior. Se h é a altura da superfície livre do reservatório, a velocidade v com que o jato de fluido sai do reservatório é expressa por:

$$v = \sqrt{2gh}\,. \tag{1}$$

Esta relação foi derivada inicialmente por Torricelli (1636). Com o auxílio da equação de Bernoulli ela pode ser facilmente obtida. Convém notar que esta expressão leva em conta que a seção reta do reservatório (πR^2, no caso de um reservatório cilíndrico) é muito maior que a do furo (πr^2, no caso de um furo circular). Com isso se pode desprezar o fato que a altura do fluido no reservatório está variando. No entanto, ao se observar a situação em que o nível no reservatório varia de maneira apreciável, podemos perceber facilmente que a velocidade do jato diminui à medida que o nível da água vai abaixando. Neste caso, a expressão (1) vale apenas em pequenos intervalos de tempo. O tratamento correto consiste em escrever, na equação de Bernoulli, a velocidade com que o nível da água decresce como dh/dt. Com isso obtém-se a expressão:

$$\frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{2ghr^4}{R^4 - r^4}} \approx \frac{r^2}{R^2}\sqrt{2gh} = \frac{r^2}{R^2}v\,. \tag{2}$$

Note que, para os nossos dados experimentais, $r/R.<0.1$, o que justifica a aproximação efetuada.

A integração da equação acima leva à seguinte relação entre a variação da altura no reservatório e o intervalo de tempo em que o flui escoou:

$$h_1^{1/2} - h_2^{1/2} = \sqrt{\frac{gr^4}{2(R^4 - r^4)}}\ (t_2 - t_1) \approx \frac{r^2}{R^2}\sqrt{g/2}(t_2 - t_1)\,. \tag{3}$$

ou

$$h_1^{1/2} = h_2^{1/2} + \frac{r^2}{R^2}\sqrt{g/2}(t_2 - t_1) \tag{4}$$

A equação de Bernoulli pode ser usada na obtenção da relação de Torricelli porque o efeito da viscosidade dentro do reservatório é pequeno. No entanto, se após sair do orifício, a água transita ainda por um duto estreito, este efeito se torna relevante. Ele faz com que a velocidade da água seja menor que a expressa pela relação (1). Este fato pode ser facilmente constatado pela medida do tempo necessário para o escoamento da água para fora do reservatório, que vai crescer à medida que o comprimento do duto também aumenta. Esta é uma maneira bastante simples de se notar um dos efeitos introduzidos pela viscosidade.

O tratamento teórico para esta nova situação é um pouco mais complexo. Para continuar a usar a equação de Bernoulli temos que levar em conta que uma certa quantidade de energia foi dissipada. Indicaremos este efeito pela variação na densidade de energia $\Delta\varepsilon$. Isto implica que, se tomamos dois pontos dentro de um duto, com a mesma altura vertical, a pressão no ponto a montante é maior do que aquela a jusante. Matematicamente, a variação de pressão é igual à densidade volumétrica de energia dissipada, i.e.,

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = P_2 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \Delta\varepsilon, \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \Delta P = \Delta\varepsilon\,. \tag{5}$$

Por outro lado, a relação para o perfil parabólico do fluxo de Poiseuille,

$$v(x) = \frac{\Delta P}{4L\eta}(r^2 - x^2)\,, \tag{6}$$

mostra que a velocidade não é uniforme em uma seção reta do tubo, mas varia do valor máximo no centro (*x=0*) até se anular na parede (*x=r*). L indica a distância entre dois pontos, entre os quais a diferença de pressão é ΔP. Podemos calcular o valor da velocidade média $v_m = \Delta P r^2 / 8L\eta$ em uma seção reta do tubo, e identificá-la com a velocidade (uniforme) indicada pela equação de Bernoulli. Assim o valor de $\Delta\varepsilon$ em (5) pode ser expresso em termos da velocidade dentro do tubo. Com estas modificações, a expressão para a velocidade de escoamento da água, que percorre um tubo horizontal de comprimento L após sair do reservatório, fica:

$$v = \sqrt{2gh + \frac{64L^2\eta^2}{\rho^2 r^4}} - \frac{8L\eta}{\rho r^2}\,. \tag{7}$$

Já a nova relação entre o tempo de escoamento e a diferença de altura, resultante da integração de uma equação para *dh/dt* análoga a (2), é:

$$(h_1 + b^2)^{1/2} - (h_2 + b^2)^{1/2} + b\ln\frac{(h_1 + b^2)^{1/2} - b}{(h_2 + b^2)^{1/2} - b} = \sqrt{\frac{gr^4}{2(R^4 - r^4)}}\ (t_2 - t_1)\,, \tag{8}$$

onde $b = \dfrac{8L\eta R^2}{\rho r^2 \sqrt{2g(R^4 - r^4)}}$.

Note que, se o valor de b/h_i << 1, a relação (7) pode ser simplificada para a seguinte forma:

$$h_1^{1/2} + 2b\ln h_1^{1/2} = h_2^{1/2} + 2b\ln h_2^{1/2} + \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}}\,(t_2 - t_1)\,. \qquad (9)$$

II - MATERIAL NECESSÁRIO

1. Garrafa plástica
2. Tampas perfuradas
3. Mangueiras
4. Régua
5. Cronometro
6. Água

III - PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Neste experimento cada grupo deverá trabalhar em uma das 6 pias junto às janelas, nas duas salas 211 e 213.

Na primeira série de medidas vamos considerar orifícios de escoamento com raios diferentes Coloque a garrafa com o gargalo para baixo no suporte de madeira, que fica apoiado nas extremidades da pia. Conecte a torneira da pia com o orifício na parede da garrafa. Escolha a tampa perfurada com o menor raio e enrosque no bocal. Tape o orifício da tampa com um dedo e encha a garrafa até o nível mais alto (h_1=30 cm). Em seguida remova o dedo da tampa, de modo a permitir que a água escoe da garrafa. Dispare o cronômetro quando o nível da água passar pela altura h_1=29 cm. Continue a registrar os instante de tempo em que o nível da água passa pelas seguintes alturas h_1= 25, 21, 17, e 13 cm. Na altura h_2=10 cm trave o cronômetro. Com estes dados voce vai calcular o intervalo de tempo para a água escoar de cada uma das 5 alturas h_1 até o nível de referência, h_2=10cm. Registre também o raio do orifício na folha de dados. Em seguida use mais três outras tampas com orifícios distintos e repita o procedimento, realizando duas medidas para o tempo de escoamento de cada uma das 5 diferentes alturas h_1,. Registre todos as medidas na folha de dados. Registre também o raio da garrafa plástica.

Na segunda série de experimentos vamos usar as tampas com as mangueiras. Elas têm diferentes comprimentos L, mas o mesmo raio r. Trabalhe com três mangueiras, registrando os valores de L na folha de dados. Para cada uma delas repita o procedimento descrito na primeira parte (5 diferentes valores da altura h_1). Preste atenção para que a extremidade livre da mangueira esteja à mesma altura da base da tampa da garrafa. Registre todos as medidas na Folha de Dados.

IV - TRATAMENTO DOS DADOS

Calcule os intervalos $\Delta t(h_1) = t(h_2) - t(h_1)$. Com os dados obtidos na primeira série de medidas trace, em papel milimetrado, o valor de $h_1^{1/2}$ em função do tempo de escoamento $\Delta t(h_1)$, para cada valor do raio do orifício. No mesmo papel trace também o valor teórico para esta grandeza ($h_1^{1/2}$), dado pelo lado esquerdo da equação (4). Calcule o valor médio das diferenças entre as medidas e as previsões teóricas para cada raio. Trace, em outro papel, este valor médio em função do raio do orifício. Você pode detectar a presença de um erro sistemático? Como ele depende do raio?

Ainda com os dados da primeira série de medidas trace, em papel log-log, o valor obtido do raio do orifício $r \times \Delta t$, mantendo fixo o valor de h_1=29 cm. Faça o ajuste pelos mínimos quadrados e obtenha a dependência funcional entre r e Δt , $r = a\Delta t^c$ O valor encontrado para c está de acordo com o indicado pela equação (4)?

Com os dados da segunda série de medidas trace, em papel milimetrado, o valor da expressão:

$$h_1^{1/2} + 2b\ln(h_1^{1/2}),$$

em função do tempo de escoamento, para cada valor do comprimento L da mangueira. No mesmo papel trace também o valor teórico para esta grandeza, dado pelo lado direito da equação (9):

$$h_2^{1/2} + 2b\ln h_2^{1/2} + \frac{r^2}{R^2}\sqrt{\frac{g}{2}}\ (t_2 - t_1).$$

Note que o coeficiente de viscosidade para a água, a 20°C, vale 1×10^{-2} dina s /cm^2. Calcule o valor médio das diferenças entre as medidas e as previsões teóricas para cada comprimento L. Trace, em outro papel, este valor médio em função do comprimento da mangueira. Você pode detectar a presença de um erro sistemático? Como ele depende do comprimento?